Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

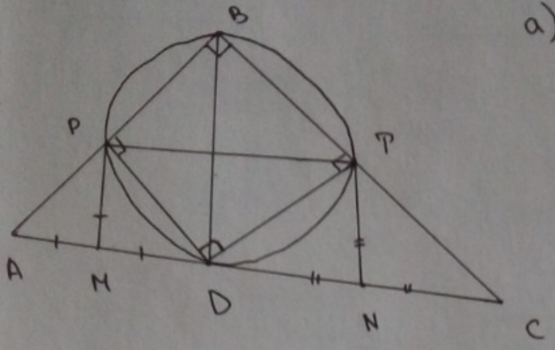
Шифр: **211006492**

ID профиля: **376924**

Вариант 12

Чистовик. 1.

Задание №1.



а) BD - диаметр $\Rightarrow \angle BPD = \angle BTD = 90°$

$\Rightarrow \angle APD = \angle CTD = 90°$

$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \triangle APD \text{ - пр-ый} \\ AM = MD\end{array}\right\} \Rightarrow PM = AM = MD$ (мед. в пр-ом $\triangle$).

$\Rightarrow \triangle AMP$ - р/б

$\Rightarrow \angle APM = \angle PAM = \alpha$.

$\Rightarrow \angle PMD = 2\alpha$ (внешний).

$\left.\begin{array}{l}\triangle TDC \text{ - пр-ый} \\ DN = NC\end{array}\right\} \Rightarrow TN = NC$ (мед. в пр. $\triangle$).

$\Rightarrow \triangle TNC$ - р/б $\Rightarrow \angle CTN = \angle TCN = \beta$

$\Rightarrow \angle TND = 2\beta$ (внешний)

$\angle PMD + \angle TND = 180°$ ($TN \parallel PM$)

$2\alpha + 2\beta = 180 \Rightarrow \alpha + \beta = 90°$. $\angle ABC = 180 - \alpha - \beta = 90°$

б). $PM = 0{,}5 \Rightarrow AD = 2PM = 1$

$\angle PBT = 90° = 180 - \angle PDT$ (впис. 4-ик)

$\Rightarrow \angle PDT = 90°$. $\Rightarrow$ PBTD - прямоугольник ($PD = BT$; $BP = DT$).

$\triangle APD$: $AP^2 = AD^2 - PD^2 = 1 - PD^2$

$NT = 1 \Rightarrow DC = 2$

$\triangle DTC$: $TC^2 = DC^2 - DT^2 = 4 - DT^2$

$\Rightarrow AP^2 + TC^2 = 5 - (PD^2 + DT^2) = 5 - PT^2 = 5 - \frac{16}{9} = \frac{29}{9}$

$AC^2 = (AP + PB)^2 + (TC + BT)^2 \Leftrightarrow 9 = \frac{29}{9} + \frac{16}{9} + 2AP \cdot BP + 2TC \cdot BT$.

~~8Rz 4ts 4zr~~ $2 = AP \cdot BP + TC \cdot BT$.

$\cancel{AP^2 = 1 - PD^2 = 1 - \frac{16}{9} - BP^2}$
$\cancel{PD^2 + BP^2 = \frac{16}{9}}$

$AP^2 = BP^2 - \frac{7}{9}$

$TC^2 = 4 - \frac{16}{9} + BT^2 = BT^2 + \frac{20}{9}$

M

Чистовик. 2

Задание №2.

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$$

ОДЗ:

$x+1 \geq 0 \quad x \geq -1$

$4-x \geq 0 \quad x \leq 4$

$4+3x-x^2 \geq 0$

$(4-x)(x+1) \geq 0$

$x \in [-1; 4]$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} = 2\sqrt{4+3x-x^2} - 3$$

$$x+1+4-x-2\sqrt{(x+1)(4-x)} = 4(4+3x-x^2)+9-12\sqrt{4+3x-x^2}$$

$$5+10\sqrt{(x+1)(4-x)} - 4(4+3x-x^2) - 9 = 0.$$

$\sqrt{4+3x-x^2} = t$; $t \geq 0$

$4t^2 - 10t + 4 = 0$

$2t^2 - 5t + 2 = 0$

$D = 25 - 16 = 9$

$t = \dfrac{5 \pm 3}{4} = 2; \dfrac{1}{2}$

1) $t = 2$

$4+3x-x^2 = 4$

$x^2 - 3x = 0$

$x = 0; 3$

2) $t = \dfrac{1}{2}$

$4+3x-x^2 = \dfrac{1}{4}$

$x^2 - 3x - \dfrac{16}{4} + \dfrac{1}{4} = 0$

$x^2 - 3x - \dfrac{15}{4} = 0$

$D = 9 + 15 = 24$

$x = \dfrac{3 \pm 2\sqrt{6}}{2} = 1,5 \pm \sqrt{6}$

$1,5 - \sqrt{6} \vee -1$

$2,5 \vee \sqrt{6}$

$6,25 > 6$

$\Rightarrow 1,5 - \sqrt{6} > -1.$

$1,5 + \sqrt{6} \vee 4$

$\sqrt{6} \vee 2,5$

$6 < 6,25$

$\Rightarrow 1,5 + \sqrt{6} < 4.$

Ответ:

$x = 0;\ 1,5 \pm \sqrt{6};\ 3.$

Чистовик 3

Задание №3.

$$\begin{cases} A: & 2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0 \\ B: & ax^2+4a^2x-ay+4a^3+2=0 \end{cases}$$

1). $x^2+2x(y-a)+5y^2-6ay+2a^2=0.$

$x^2+2x(y-a)+(y-a)^2-(y-a)^2+5y^2-6ay+2a^2=0.$

$(x+y-a)^2+5y^2-y^2-6ay+2ay+2a^2-a^2=0.$

$(x+y-a)^2+(4y^2-4ya+a^2)=0 \Leftrightarrow (x+y-a)^2+(2y-a)^2=0.$

$(x+y-a)^2+(2y-a)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-a=0 \\ 2y-a=0 \end{cases}$ $\quad a=2y \quad x=y.$ $\Rightarrow$ Все точки A такие, что лежат на прямой $y=x$, причём в каждой точке $a=2y$.

$A(x;y) \quad y=x.$

2) $ax^2+4a^2x-ay+4a^3+2=0.$

$ay=ax^2+4a^2x+4a^3+2 \quad a\neq0.$

$y=x^2+4ax+4a^2+\frac{2}{a}$

$y=(x+2a)^2+\frac{2}{a}.$

$x_0=-2a \qquad B\left(-2a;\frac{2}{a}\right)$

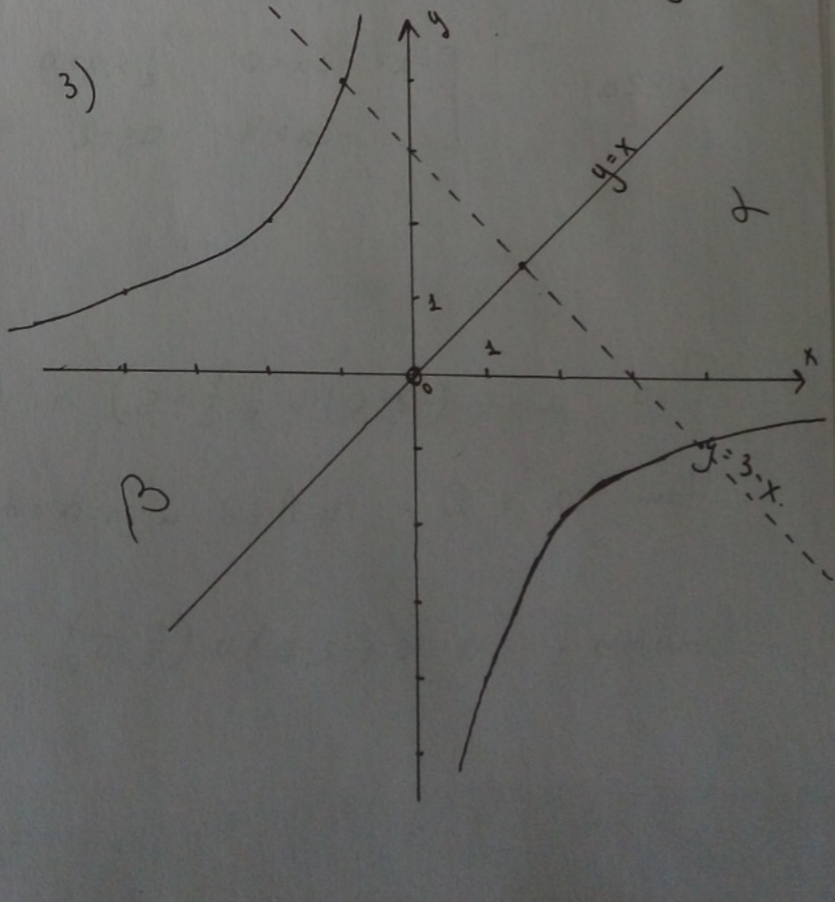
$y_0=\frac{2}{a}$

$B(x;y)$

$y=\frac{2}{a}=\frac{-4}{-2a}=\frac{-4}{x}.$

Все точки B такие, что лежат на графике функции $y=\frac{-4}{x}$, причём $x=-2a$.

3)



211006492 (U376924 M1277400)

Чистовик 4.

4) Прямая $y=3-x$ разделила плоскость Oxy на две полуплоскости: для удобства обозначим полуплоскость $y>3-x$ за α; а $y<3-x$ за β.

5) $\begin{cases} y=x \\ y=3-x \end{cases}$ $x=1,5$ – т. перес. ф-ии $y=x$ с $y=3-x$

$\Rightarrow$ при $x<1,5$ т. $A \in \beta$ $\quad$ $x<1,5$ $\quad x=\frac{a}{2}$ $\quad \frac{a}{2}<1,5$ $\quad a<5$

при $x>1,5$ т. $A \in \alpha$.

$\Rightarrow$ при $a<5$ т. $A\in\beta$

при $a>5$ т. $A\in\alpha$.

6) $\begin{cases} y=-\frac{4}{x} \\ y=3-x \end{cases}$ $\quad 3-x=-\frac{4}{x}$

$x=-1;4$ – т. пер. ф-ии $y=-\frac{4}{x}$ с $y=3-x$.

$\Rightarrow$ при $x\in(-\infty;-1)\cup(0;4)$ т. $B\in\beta$

при $x\in(-1;+0)\cup(4;+\infty)$ т. $B\in\alpha$

$x=-2a$ $\quad \left[\begin{array}{l} -2a<-1 \\ 0<-2a<4 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} a>\frac{1}{2} \\ -2<a<0 \end{array}$

$x=-2a$ $\quad \left[\begin{array}{l} -1<-2a<0 \\ -2a>4 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \frac{1}{2}>a>0 \\ a<-2 \end{array}$

При $a\in(-2;0)\cup(\frac{1}{2};+\infty)$ т. $B\in\beta$.

При $a\in(-\infty;-2)\cup(0;\frac{1}{2})$ т. $B\in\alpha$.

При $a\in(-2;0)\cup(\frac{1}{2};5)$ т. $A\in\beta$ и т. $B\in\beta$.

При $a\in\varnothing$. т. $A\in\alpha$ и т. $B\in\alpha$.

Ответ: $a\in(-2;0)\cup(\frac{1}{2};5)$.

Чистовик 4.

211006492 (U376924 M1277400)

Черновик.

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$$

$$4+3x-x^2 = (4-x)(x+1)$$

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{4-x}$$

$$3 = x+1+4-x-2$$

$$\cancel{\sqrt{x+1} + \sqrt{4-x} + \ldots + (x+1+4-x) + 2\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{4-x}}$$

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{4-x} + 3 = \underbrace{x+1+4-x}_{5} + 2\sqrt{x+1}\sqrt{4-x}$$

$+5$

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{4-x} + 8 = \Big(\underbrace{\sqrt{x+1} + \sqrt{4-x}}_{t}\Big)^2$$

$$t^2 - t - 8 = 0.$$

$$D = 1 + 32 = 33.$$

$$\cancel{t = \frac{1\pm 5}{2} = -2;\ 3}$$

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{2}$$

$$5 - 2\sqrt{t} = 4t + 9 - 12\sqrt{t}$$

$$10\sqrt{t} = 4t + 4 \qquad 5\sqrt{t} = 2t + 2$$

$$25t = 4t^2 + 4 + 8t$$

$$4t^2 - 17t + 4 = 0.$$

$$D = 289 - 64 = 225 = 15^2$$

$$t = \frac{17 \pm 15}{8} = \frac{1}{4};\ 4$$

$$3x - x^2 = 0 \qquad x = 0;\ 3$$

или $x^2 - 3x - 4 + \frac{1}{4} = 0$

$$x^2 - 3x - 3\tfrac{3}{4} = 0. \quad \left(3\tfrac{3}{4} = \tfrac{15}{4}\right)$$

$$D = 9 + 15 = 24.$$

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{4-x} = \frac{1+\sqrt{33}}{2}$$

$$5 + 2\sqrt{4+3x-x^2} = \frac{\overset{34.}{1+33} + 2\sqrt{33}}{4.}$$

$$8\sqrt{4+3x-x^2} = 14 + 2\sqrt{33}$$

$$16(4+3x-x^2) = 49 + 33 + 14\sqrt{33}.$$

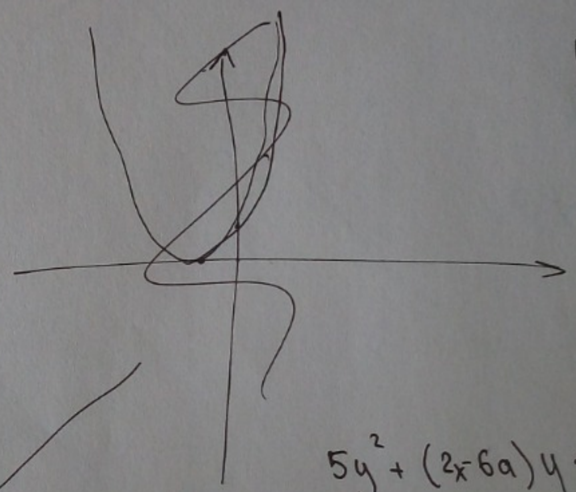
Черновик.

$2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0.$

$ax^2+4a^2x-ay+4a^3+2=0.$

$$y=\frac{ax^2+4a^2x+4a^3+2}{a}=x^2+4ax+4a^2+\frac{2}{a}=(x+2a)^2+\frac{2}{a}$$

$(x+1)^2=$

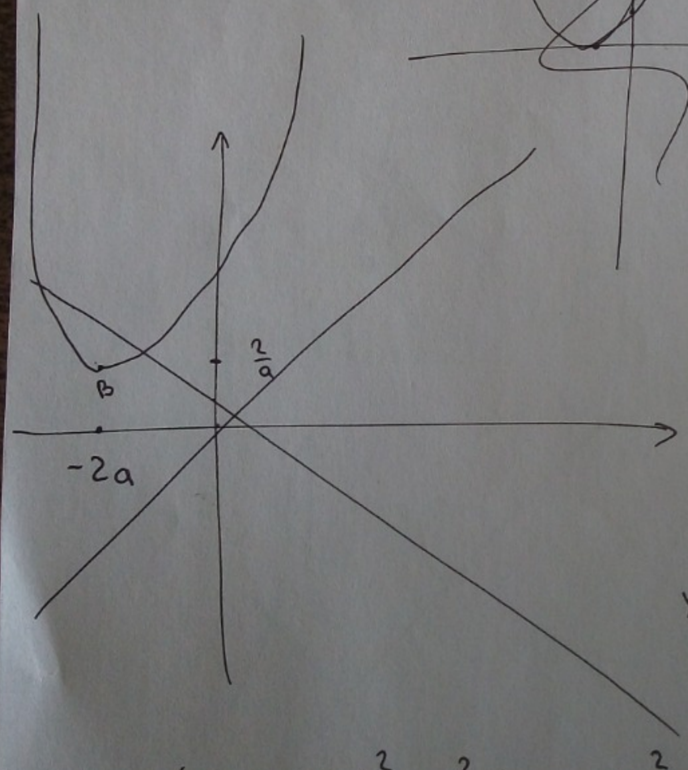


$B:\ \left(-2a;\ \frac{2}{a}\right)$

$y=3-x.$

$y=x$

$5y^2+(2x-6a)y+$



$\cancel{(x-3a)^2=x^2+9a^2-6ax}$

$x^2+x(2y-2a)+(a^2+y^2-2ay)$

$(x+y-a)^2+a^2-4ay+4y^2=0.$

$(x+y-a)^2+(a-2y)^2=0.$

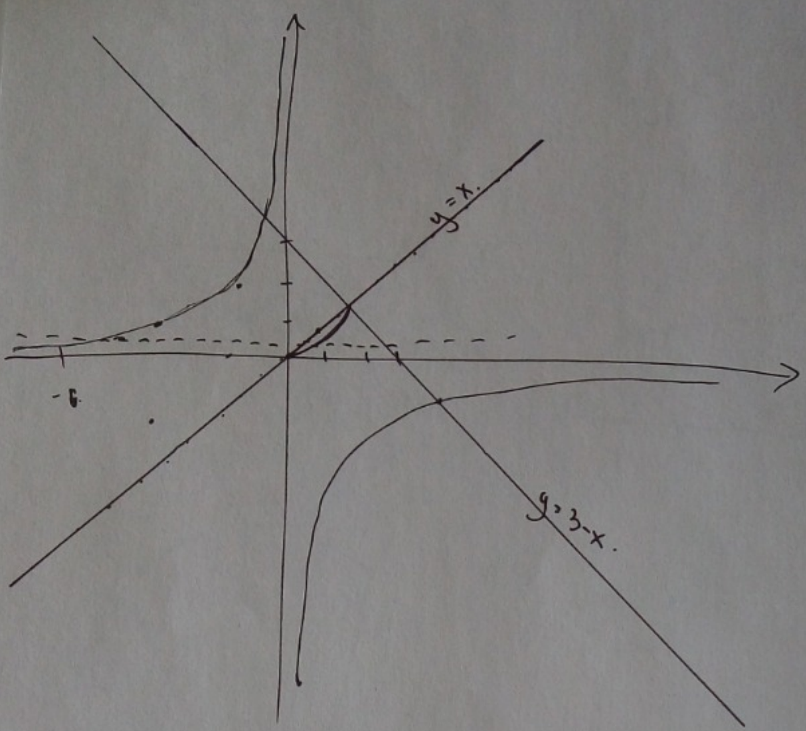
$$\begin{cases}x+y-a=0\\ a-2y=0\end{cases}$$

$a=2y$ $\quad x=y.$

$A(x;\ x)$

$B\left(-4x;\ \frac{2}{x}\right).$

Черновик.



$a=2y.$ $A(x;y)$ $x=y$

$B\left(-2a; \frac{2}{a}\right)$

$A(x;x) \to a=2x.$

$B\left(-4x; \frac{1}{x}\right)$

$y=3-x > y=x.$

$3-x > x$ $x<1{,}5.$

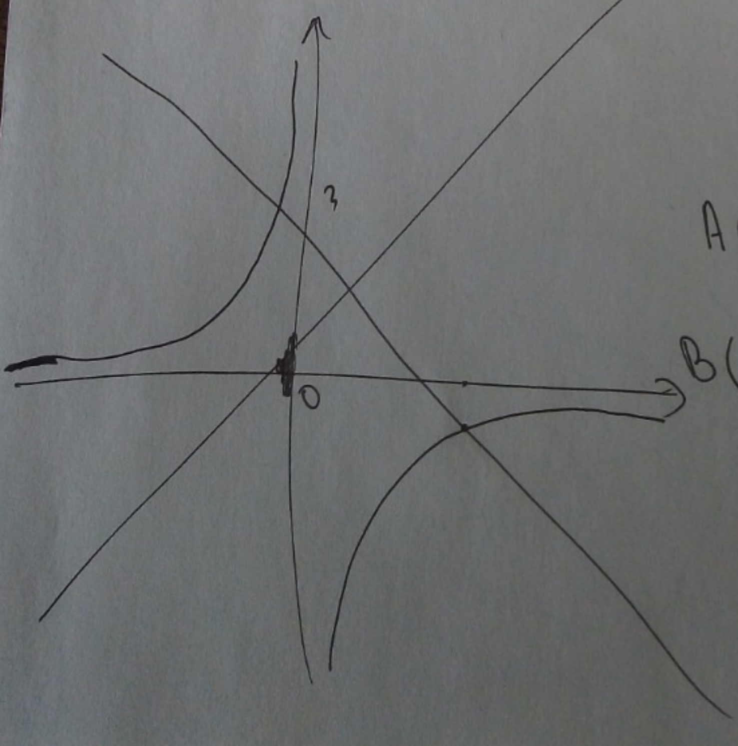
$B\left(-2a; \frac{2}{a}\right)$

$A\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right).$

$a<3.$

$2a<6$ $-2a>-6.$

$a<3.$ $\frac{2}{a}<\frac{2}{3}.$

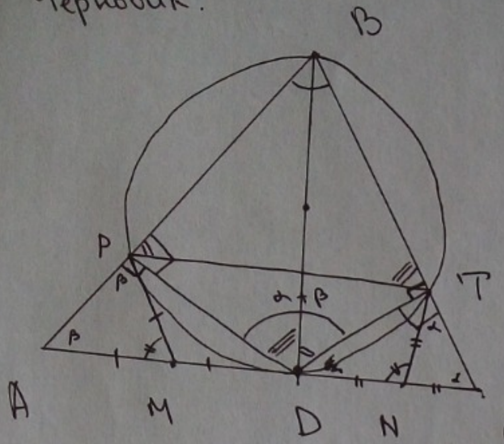


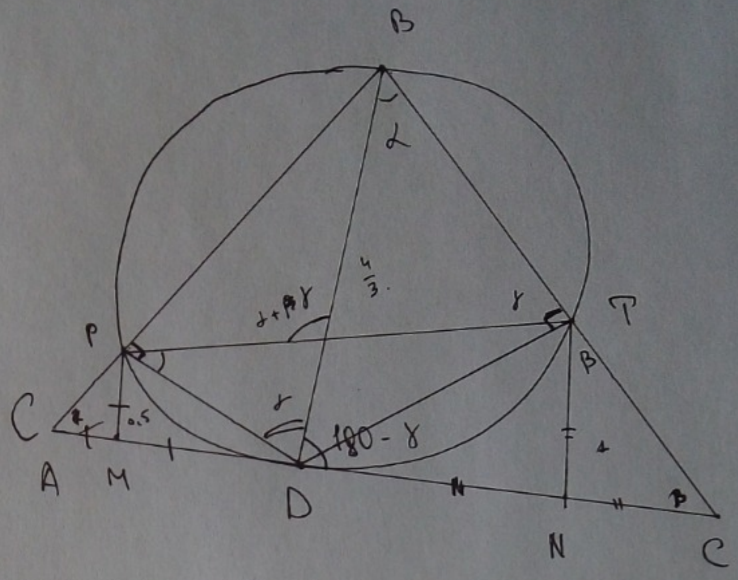
$A(x;y)$ $y=x.$

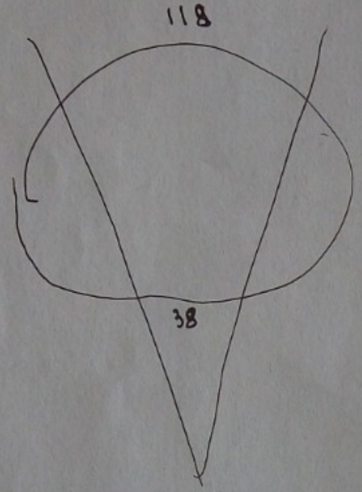
$B(x;y)$ $y=\frac{2}{a}=\frac{4}{2a}=-\frac{4}{-2a}=-\frac{4}{x}.$

~~При $x \in (-\infty; -1) \cup (0;1)$~~.

Черновик.







$\cancel{\frac{118-38}{2} = 40}$

$\cancel{\beta = \frac{2\gamma - 2\alpha}{2} = \gamma - \alpha}$

$\cancel{180 - \gamma - \gamma + \alpha = 180 - 2\gamma + \alpha}$.

$\cancel{180 - \alpha - \gamma + \alpha = 180 - \gamma}$

$BD^2 = BT^2 + TD^2$

$DC^2 = TC^2 + DT^2$

$BD^2 - DC^2 = BT^2 - TC^2 =$

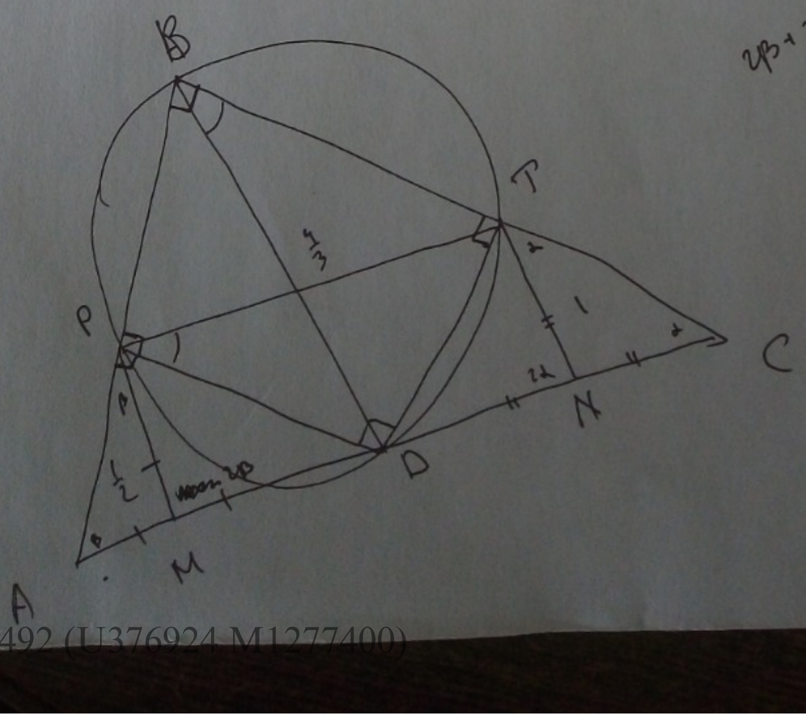
$a^2 + b^2 = 9$

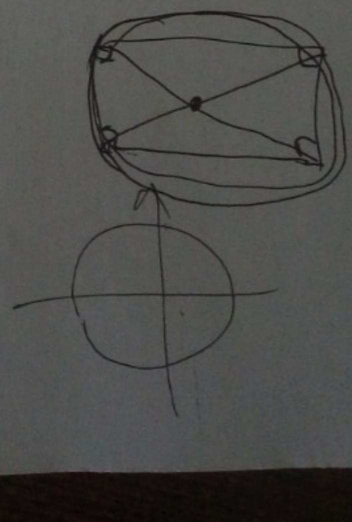
$ab = ?$

$2\beta + 2\alpha = 180$

$\alpha + \beta = 90$.

$\cancel{(b+a)^2}$.





Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

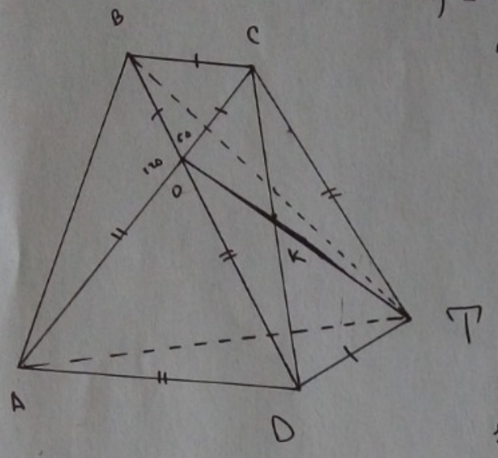
Шифр: **211006492**

ID профиля: **376924**

Вариант 12

Чистовик 1.

Задача №6.



а) $\triangle OBC$ - р/с $\Rightarrow \angle OBC = \angle BCO = \angle COB = 60^\circ$

$\triangle OAD$ - аналогично

$\Rightarrow \angle AOB = \angle COD = 120^\circ$

$CK = KD$ (по усл.)
$OK = KT$ (по усл) $\Big| \Rightarrow COKT$ - пар-мм.

$\Rightarrow CO = OT;\quad CT = OD;\quad \angle CTD = 120^\circ.$

$\angle TCO = \angle ODT = 60^\circ.$

1. $BC = DT$
2. $CT = AD$
3. $\angle BCT = \angle ADT = 120^\circ$

$\Big| \Rightarrow \triangle BCT = \triangle TDA$ (по 2 ст. и углу)

$\Rightarrow BT = AT$

$\angle CTB = \angle TAD$

$\angle CBT = \angle ATD$

$\angle CBT + \angle CTB = 180 - 120 = 60^\circ$

$\Rightarrow \angle CTB + \angle ATD = 60^\circ$

$\angle BTA = \angle CTD - \angle CTB - \angle ATD =$

$= 120^\circ - 60^\circ = 60^\circ.$

$\Leftarrow$

$\angle BTA = 60^\circ$
$BT = AT$ $\Big| \Rightarrow \triangle ABT$ - р/с.

б) $BC = 2$
$AD = 4$

$\dfrac{S_{\triangle ABT}}{S_{\triangle ABCD}} = ?$

$S_{\triangle ABT} = \dfrac{AB \cdot BT \cdot \sin 60}{2} = \dfrac{AB^2}{2} \cdot \sin 60.$

$AB^2 = BT^2 = BC^2 + CT^2 - 2BC \cdot CT \cdot \cos 120 =$ $CT = AD = 4$

$= 4 + 16 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 28$

$S_{\triangle ABT} = \dfrac{28}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 7\sqrt{3}$ $\sin 60 = \sin 120$

$S_{ABCD} = S_{\triangle BCO} + S_{\triangle AOD} + 2S_{\triangle AOB} = \dfrac{BC^2}{2}\sin 60 + \dfrac{AD^2}{2}\sin 60 + 2 \cdot \dfrac{BC \cdot AD}{2}\sin 120 =$

$= \dfrac{\sin 60}{2}\left(BC^2 + AD^2 + 2BC \cdot AD\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{4}(BC + AD)^2 = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot 36 = 9\sqrt{3}$

$\dfrac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}} = \dfrac{7\sqrt{3}}{9\sqrt{3}} = \dfrac{7}{9}$ Ответ: $\dfrac{7}{9}$

Чистовик 1.

Чистовик 2

Задача №1.

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2 = \frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \\ 2(x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

$x^2+y^2 = t;\ t > 0$

$2t^2 - \frac{1}{t} = 1 \qquad 2t^3 - t - 1 = 0 \qquad t=1$ - корень.

$(t-1)(2t^2+2t+1)=0.$

$$\begin{array}{r|l} 2t^3+0t^2-t-1 & t-1 \\ \underline{2t^3-2t^2} & 2t^2+2t+1 \\ 2t^2-t & \\ \underline{2t^2-2t} & \\ t-1 & \\ \underline{t-1} & \\ 0. & \end{array}$$

$t=1 \qquad D = 4-8=-4<0\ \varnothing.$

$x^2+y^2=1.$

$\Rightarrow\ 1+x^2y^2=\frac{5}{4}$

$x^2y^2=\frac{1}{4}$

$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2y^2=\frac{1}{4} \end{cases} \quad x^2-x^4=\frac{1}{4} \quad (2x^2-1)^2=0$

$x^2=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow y^2=\frac{1}{2} \Leftrightarrow y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$

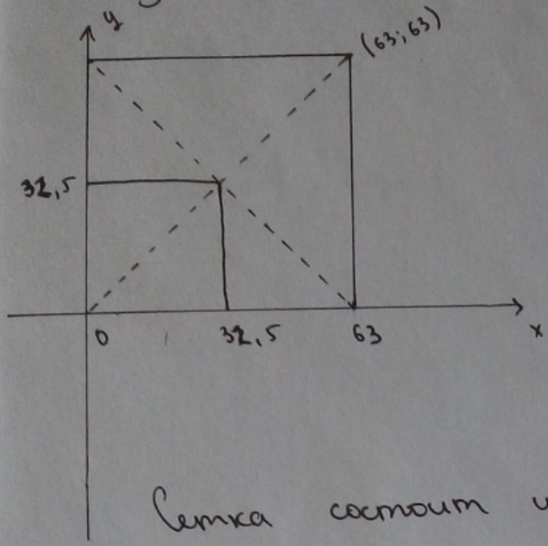
Ответ: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(-\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$

Чистовик 2

Задача №1.

Чистовик №3

Задача №2.



Прямые $y=x$ и $y=63-x$ являются соответственно диагоналями данного квадрата.

$\begin{cases} y=x \\ y=63-x \end{cases} \Rightarrow x = 31{,}5.$

Пересечение диагоналей не является точкой сетки.

Сетка состоит из 62 столбцов и 62 строк

$\Rightarrow$ Всего точек в сетке − 62^2

Рассмотрим точки на диагонали:

Будем называть точку плохой, если она лежит в одной строке или одном столбце с данной диагональной точкой (Другие диагональные не считаем)

Тогда для каждой диагональной точки есть 120 плохих точек.

Хорошая точка, соответственно, не лежит в одной строке или одном столбце с данной диагональной точкой, (и сама не является диагональной)

$\Rightarrow$ Кол-во хороших точек для каждой диагональной:

$= N_{x_1} = 62^2 - 120 - 124 = 62^2 - 244$ (124 − кол-во диагональных точек).

$\Rightarrow$ Кол-во способов выбрать одну диагональную точку и одну недиагональную, удовлетворяющих —

Чистовик 1.

Чистовик 4.

– условиям:

$$N_1 = 124\left(62^2 - 244\right)$$

Теперь рассмотрим только пары диагональных точек:

Для каждой диагональной точки существуют 2 другие диагональные плохие точки =>

Тогда для данной диагональной точки хороших точек

– $N_{x_2} = 124 - 1 - 2 = 121$

=> Тогда кол-во способов выбрать 2 диаг. точки, удовлетворяющие условию:

$$N_2 = \frac{124 \cdot 121}{2} = 121 \cdot 62$$

~~$N = N_1 + N_2 = 124\left(62^2 - 244\right) + 123 \cdot 60 = 123\left(62^2 - 1843\right) = 450303$~~

~~Ответ: 450303.~~

$$N = N_1 + N_2 = 124\left(62^2 - 244\right) + 62 \cdot 121 =$$

$$= 62\left(2 \cdot 62^2 - 488 + 121\right) = 62\left(2 \cdot 62^2 - 367\right) = 267902$$

=> Кол-во способов выбрать одну диагональную ... и одну недиагональную, удовлетворяющие ...

Чистовик 4.

Черновик

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \\ 2x^4 + 2y^4 + 5x^2y^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

$$2(x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = \frac{9}{4}$$

$$\frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4}$$

$$2(t^2) - \frac{1}{t} = 1$$

$$\frac{2t^3 - t - 1}{t} = 0.$$

$$(t-1)(2t^2+2t+1) = 0.$$

$t = 1$ или $D = 4 - 8 < 0.$

$$x^2+y^2 = 1.$$

$$x^2y^2 = \frac{1}{4}$$

$$x^2(1-x^2) = \frac{1}{4}$$

$$t - t^2 - \frac{1}{4} = 0.$$

$$4t^2 - 4t + 1 = 0$$

$$t = \frac{1}{2}$$

$$x^2 = \frac{1}{2}$$

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

3844 + 2 = 4688

4688 − 387 = 4321

4321 + 162 = 8642

25926 … 267902

$$2t^3 - t - 1 \mid t - 1$$
$$2t^3 - 2t^2 \quad 2t^2 + 2t + 1$$
$$2t^2 - t$$
$$2t^2 - 2t$$
$$t - 1$$

$$(2t^2+2t+1)(t-1) =$$
$$= 2t^3 - \cancel{2t^2} - \cancel{2t} + \cancel{2t^2} - 2t + t - 1 =$$
$$= 2t^3 - t - 1$$

2 + 3 + 6 = 11

28 / 34.

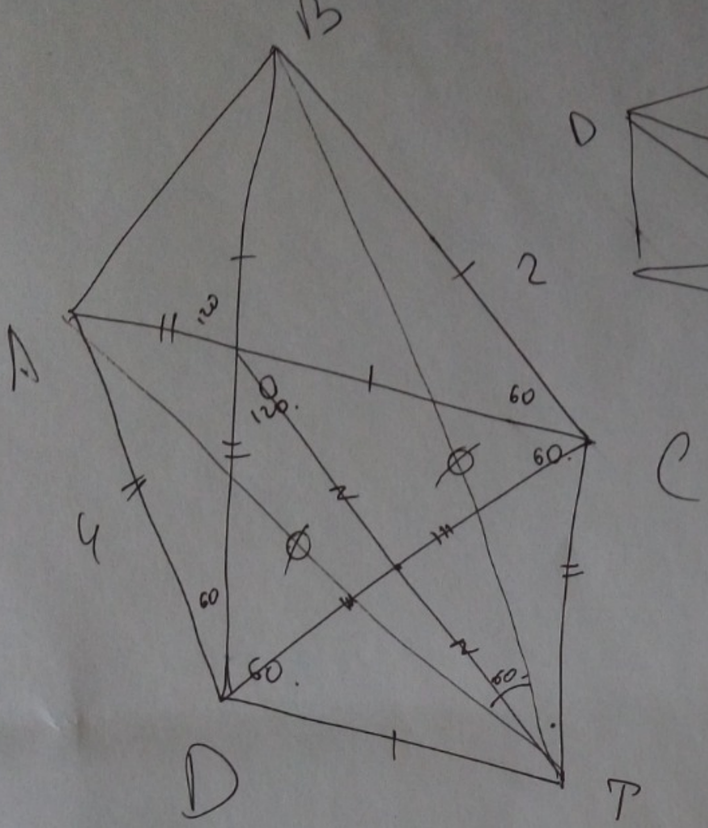
17.

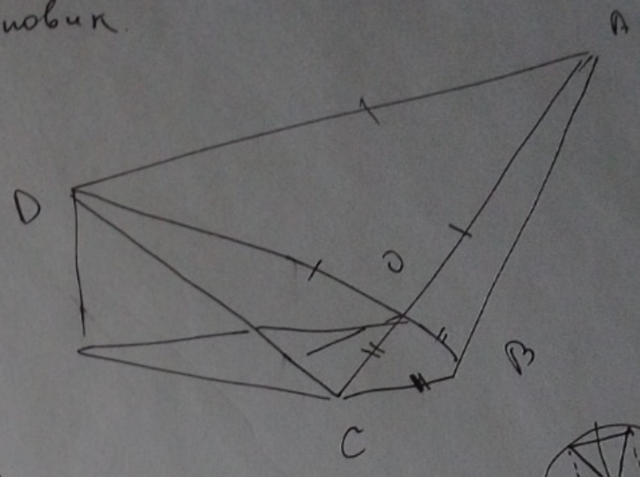
+ 17.

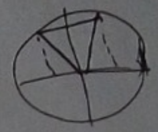
60 + 61 + 62.

Чистовик 4.

Черновик.







$$S_{\triangle ABT} = \frac{AB^2 \cdot \sin 60}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot AB^2$$

$$AB^2 = BT^2 = 4 + 16 + 2 \cdot 2 \cdot 4 \cos \cancel{60} =$$

$$AB^2 = 20 + 16 \cdot \frac{1}{2} = 18.$$

$S_{\triangle ABT} = 7\sqrt{3}$

$\cancel{S_{ABCD}} =$

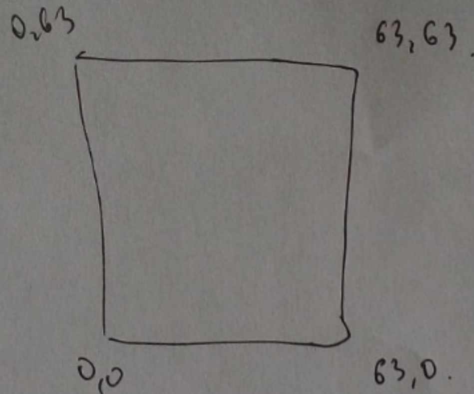
$ab \vee (a-2)(b+2)$

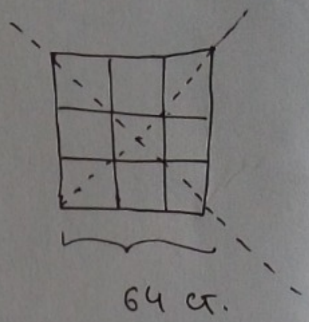
$\cancel{ab} \vee \cancel{ab} - 2b + 2a - 4$

$2b + 4 \vee 2a$

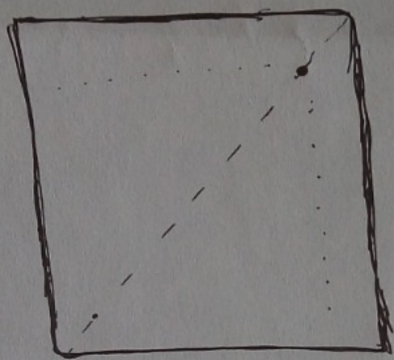
$b + 2 \vee a$

Черновик.





62 ст. нужн.



$2 \cdot 62\big((61 \cdot 2)\big)$ ~~[illegible]~~

62^2 – всего.

$62^2 - 62 - 61 =$

$= 62 \cdot 61 - 61 =$

$= 61 \cdot 61$

$61 \cdot 61 \cdot (61 \cdot 61 - 1).$

Для каждой диагональной точки есть

122 плохих точки.

Всего точек 62^2

Хороших точек – $62^2 - 122$

Тогда для каждой диагональной точки – $62^2 - 122 - 61$ способов

выбрать хорошую точку.