Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211006395**

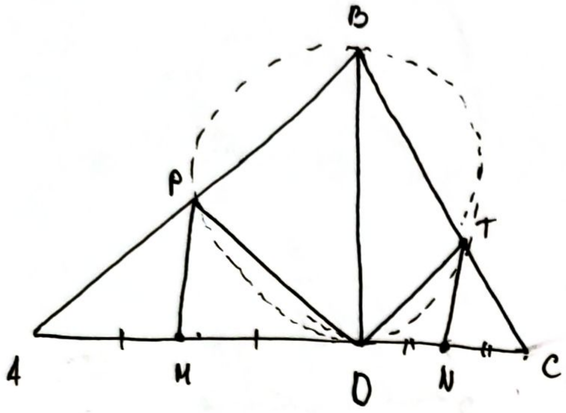
ID профиля: **848801**

Вариант 12

Чистовик Математика, 10 класс

Страница: 1

Задание: 1



Решение:

Проведём PD и DT.

$\angle APD = \angle DTC = 90^\circ \Rightarrow$ т.к. PM и TN - медианы $\triangle$, то

$\triangle AMP$ и $\triangle PMD$ - равнобед, и $\triangle DNT$ и $\triangle TNC$ - равнобед.

Пусть $\angle A = \alpha \Rightarrow \angle A = \angle APM \Rightarrow \angle MPD = \angle PDM = 90^\circ - \alpha$ и $\angle PMD = 2\alpha$.

Пусть $\angle NTC = \angle TCN = \beta$; $\angle TDN = \angle DTN = 90 - \beta$; $\angle DNT = 2\beta \Rightarrow$

$\angle PDT = 180^\circ - 90^\circ + \alpha - 90^\circ + \beta = \alpha + \beta$.

Так как $PM \parallel NT$, то $\angle AMP = \angle DNT \Rightarrow 2\beta = 180^\circ - 2\alpha \Rightarrow 2\beta + 2\alpha = 180^\circ \Rightarrow$

$\beta + \alpha = 90^\circ \Rightarrow$ т.к. $\angle ABC = 180^\circ - \alpha - \beta$, то $\angle ABC = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

Ответ: $\angle ABC = 90^\circ$

Страница: 2

Задание: 2

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} = 2\sqrt{4+3x-x^2} \quad |\cdot 2$

$5 - 2\sqrt{4+3x-x^2} = 4(\sqrt{4+3x-x^2})^2 - 12\sqrt{4+3x-x^2} + 9$

$-10\sqrt{4+3x-x^2} + 4 + 4(\sqrt{4+3x-x^2})^2 = 0$

$4(\sqrt{4+3x-x^2})^2 - 10\sqrt{4+3x-x^2} + 4 = 0 \quad |:2$

$2(\sqrt{4+3x-x^2})^2 - 5\sqrt{4+3x-x^2} + 2 = 0$

ОДЗ:

$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \end{cases}$

$x \in [-1; 4]$

Замена: $\sqrt{4+3x-x^2} = t$

$2t^2 - 5t + 2 = 0$

$\left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{4+3x-x^2} = 2 \\ \sqrt{4+3x-x^2} = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 4+3x-x^2 = 4 \\ 4+3x-x^2 = \frac{1}{4} \end{array}\right. \Rightarrow$

$\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \\ x = \frac{3-2\sqrt{6}}{2} \\ x = \frac{3+2\sqrt{6}}{2} \end{array}\right.$

При $x=0$: $\sqrt{1} - \sqrt{4} + 3 = 2\sqrt{4}$

$1 - 2 + 3 = 2\cdot 2$

$2 = 4$ - не подходит

При $x=3$:

$\sqrt{4} - \sqrt{1} + 3 = 2\cdot\sqrt{4+3\cdot 3 - 3^2}$

$2 - 1 + 3 = 2\cdot 2$

$4 = 4$ - подходит

При $x = \frac{3+2\sqrt{6}}{2}$:

$2\sqrt{4+3x-x^2} = 2\sqrt{4 + \frac{(3+2\sqrt{6})\cdot 3}{2} - \frac{9 + 4\cdot 6 - 2\cdot 3\cdot 2\sqrt{6}}{4}}$

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 \geq 1 \Rightarrow$ ответ не подходит

v_1

Страница: 3:

При $x = \frac{3-2\sqrt{6}}{2}$:

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = \sqrt{\frac{3-2\sqrt{6}}{2} + \frac{2}{2}} - \sqrt{\frac{8}{2} - \frac{3-2\sqrt{6}}{2}} + 3 =$

$\sqrt{\frac{5-2\sqrt{6}}{2}} - \sqrt{\frac{8-3+2\sqrt{6}}{2}} + 3 = 1$

$2\sqrt{4+3x-x^2} = 2\sqrt{4+3\cdot\frac{3-2\sqrt{6}}{2} - \left(\frac{3-2\sqrt{6}}{2}\right)^2} = 2\cdot\frac{1}{2} = 1 \Rightarrow$ ответ подходит.

Ответ: $x=3$; $x = \frac{3-2\sqrt{6}}{2}$.

Чистовик Математика, 10 класс

Страница 4:

Задание: 3

$2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0$

$y=\frac{1}{5}\left(-\sqrt{-a^2+4ax-4x^2}+3a-x\right)=\frac{1}{5}\left(-\sqrt{-(a-2x)^2}+3a-x\right)$

Возможно только когда:

$y=\frac{1}{5}(0+3a-x)$

$y=\frac{1}{5}\left(3a-\frac{a}{2}\right)=2{,}5:5a=\frac{1}{2}a$

$x;y=\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right)$

$ax^2+4a^2x-ay+4a^3+2=0$

$ax^2+4a^2x+4a^3+2=ay \quad |:a\ (a\neq0)$

$x^2+4ax+4a^2+\frac{2}{a}=y$

$x_3=\frac{-4a}{2}=-2a$

$y_3=(-2a)+4(-2a)\cdot a+4a^2+\frac{2}{a}=4a^2-8a^2+4a^2+\frac{2}{a}=$

одна точка $\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right)$ - A

вторая точка $\left(-2a;\frac{2}{a}\right)$ $\Rightarrow$

либо обе выше, либо обе ниже:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\frac{2}{a}\geq 3+2a\\ \frac{a}{2}\geq 3-\frac{a}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}\frac{2}{a}<3+2a\\ \frac{a}{2}<3-\frac{a}{2}\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\in(-\infty;-2)\cup\left(0;\frac{1}{2}\right)\\ a\in(3;+\infty)\end{cases} \Rightarrow \text{нет точек}\\ \begin{cases}a\in(-2;0)\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right)\\ a\in(-\infty;3)\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $(-2;0)\cup\left(\frac{1}{2};3\right)$

ЧЕРНОВИК

Страница 2:

б2

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+3=2\sqrt{4+3x-x^2}$$

$$\cancel{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+3=\sqrt{16+12x-4x^2}\right)}$$

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+3=2\sqrt{(x+1)(x-\tfrac{1}{4})}$$

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+3=2\sqrt{x+1}\sqrt{x-\tfrac{1}{4}}$$

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+3=\sqrt{x+1}\sqrt{4x-1}$$

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+3-\sqrt{x+1}\sqrt{4x-1}=0$$

$$\sqrt{x+1}\left(1-\sqrt{4x-1}\right)-\sqrt{4-x}+3=0.$$

$x+1$

$D = 9-4\cdot 4\cdot(-1)=25$

$x_1 = \frac{-3-5}{8} = -1$

$x_2 = \frac{-3+5}{8} = \frac{1}{4}$

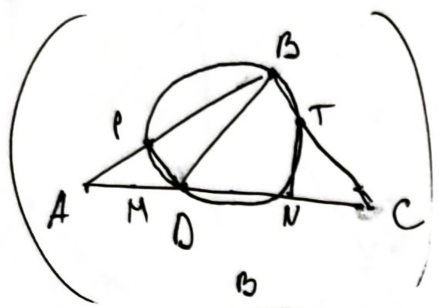
$x_2 = -$

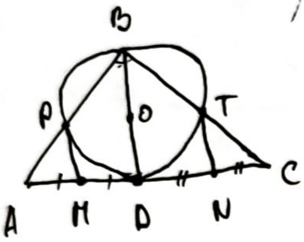
$$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+3=2\sqrt{4+3x-x^2}\ \Big|\cdot 2$$

Черновик

Страница: 1

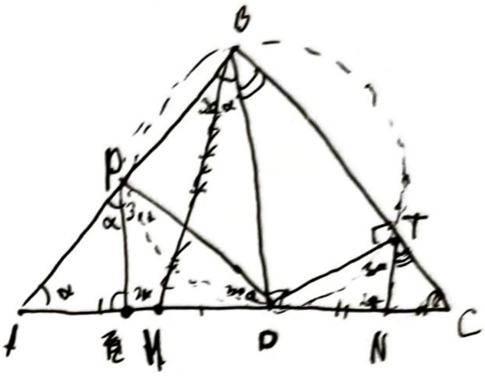
№1





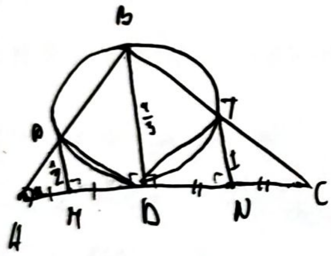
Найти:
$\angle ABC$

Дано:
$\triangle ABC$
$AM = MD$
$DN = NC$
BD - диам.
$PM \parallel TN$



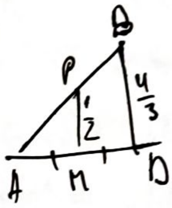
Решение:

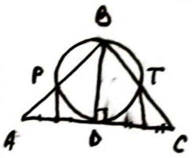
① AC - кас. к окр., тогда
если

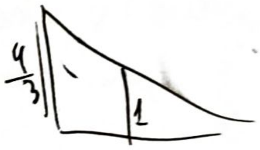


$MP = \frac{1}{2}$
$NT = 1$
$BD = \frac{4}{3}$

S_{abc} ?







Решение:

① BD - диаметр окр. (O, OB), а AC кас. к этой окр., т.к. ~~...~~ AC проходит через окр. $\Rightarrow \angle BDC = 90^\circ \Rightarrow$
$\angle ABD$ - прям. и $\triangle BDC$ - прямоуг. $\Rightarrow BD$ также высота $\triangle ABC$

$AP = PM \Rightarrow$ ... тогда $\angle ABC = 90^\circ$

$\angle MPD = \angle PDM = 90 - \alpha$;

$\angle PMD = 2\alpha$

AMP ~ MD

Пусть $\angle NTC = \beta \rightarrow \angle NTC = \angle TCN$; $\angle TDN = \angle DTN = 90^\circ - \alpha$; $\angle DNT = 2\beta$

$\Rightarrow \angle PDT = 180^\circ - 90^\circ + \alpha - 90^\circ + \beta = \alpha + \beta$

т.к. $PM \parallel NT$, то $\angle AMP = \angle DNT$. $\Rightarrow 2\beta = 180 - 2\alpha \Rightarrow 2\beta + 2\alpha = 180^\circ \Rightarrow$

$\beta + \alpha = 90^\circ \Rightarrow$ т.к. $\angle ABC = 180^\circ - \alpha - \beta$, то $\angle ABC = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

Ответ: $\angle ABC = 90^\circ$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006395**

ID профиля: **848801**

Вариант 12

Страница 1:

Задание 4:

Замена:

$x^2+y^2=a$

$x^2\cdot y^2=b$

$x^2+y^2=(x^2+y^2)^2-2y^2x^2=a^2-2b$

тогда система принимает вид:

$$\begin{cases}\frac{1}{a}+b=\frac{5}{4}\\ 2(a^2-2b)+5b=\frac{9}{4}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{1}{a}+b=\frac{5}{4}\\ 2a^2-4b+5b=\frac{9}{4}\end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases}\frac{1}{a}+b=\frac{5}{4}\\ 2a^2+b=\frac{9}{4}\end{cases}$$

$2a^2+b-\frac{1}{a}-b=\frac{9}{4}-\frac{5}{4}$

$2a^2-\frac{1}{a}=\frac{4}{4}=1$

$2a^2-\frac{1}{a}=1 \quad \Big|\cdot a \quad a\neq 0$

$2a^3-1=a$

$2a^3-a-1=0$

$(a-1)\underbrace{(2a^2+2a+1)}_{>0 \text{ т.к } D=4-4\cdot 2<0}=0$

$\Rightarrow a=1 \Rightarrow$

$b=\frac{9}{4}-2\cdot 1=\frac{1}{4}$, тогда

$$\begin{cases}x^2+y^2=1\\ x^2\cdot y^2=\frac{1}{4}\end{cases}$$

$(1-y^2)\cdot y^2=\frac{1}{4}$

$y^2-y^4+\frac{1}{4}=0$

Чистовик

Математика, 10 класс

Страница: 2

1) $\frac{1}{4}(2y^2-1)^2=0 \Rightarrow$

$y^2=\frac{1}{2}$

$y=\frac{1}{\pm\sqrt{2}}$

2) $x^2 \cdot y^2=\frac{1}{4}$

$x^2 \cdot \frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

$x^2=\frac{1}{2}$

$x=\frac{1}{\pm\sqrt{2}}$

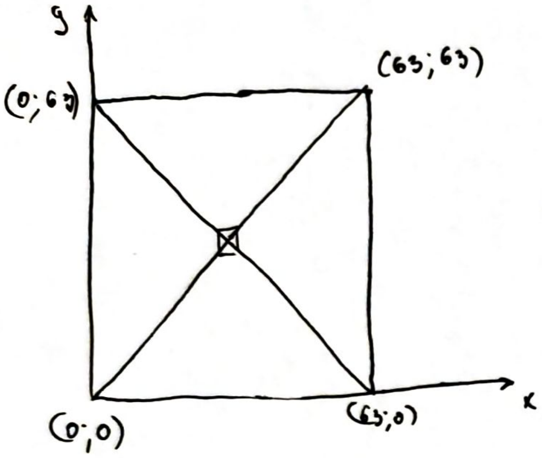
$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{\sqrt{2}} \\ x=\frac{1}{-\sqrt{2}} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} y=\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y=\frac{1}{-\sqrt{2}} \end{array}\right. \end{cases}$$

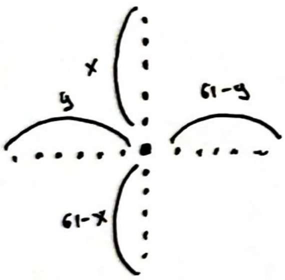
Ответ: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Чистовик

Страница: 3

Задание: 5





Не включая границу узла на каждой из прямых $63-1=62$, причём пересечение не является узлом.

Посчитаем кол-во || исходов.

Выберем точку с одной из прямых:

$62+62=124$ варианта выбрать точку с прямых.

Для каждой из этих точек существует вариант выбрать 2 т. || оси:

по вертикали и горизонтали остаётся 61 точка без I^й всего $61+61 \Rightarrow$

всего вариантов выбрать точку $=$

$(61+61)(62+62)=122\cdot124$.

Всего вариантов выбрать вторую точку:

$62\cdot62-1$

уже выбрали

$\Rightarrow$

всего выбрать 2-ую точку

Всего вариантов: $124\,(62\cdot62-1)-122\cdot124=3843\cdot124-$

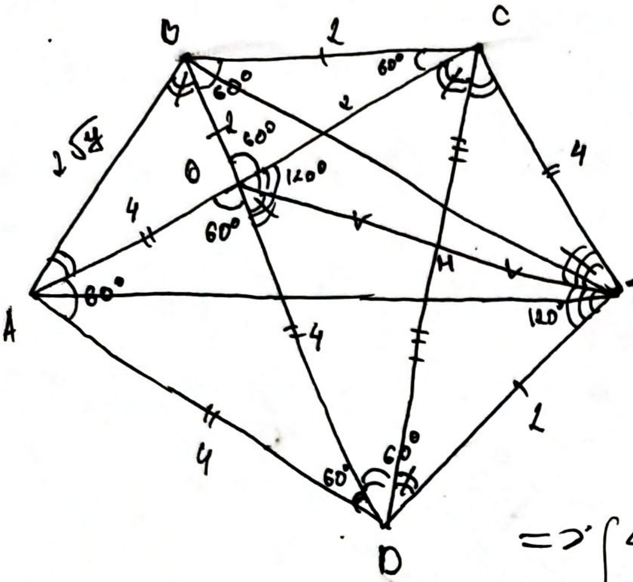
$-124\cdot122=124(3843-122)=124\cdot3721=461404$

Ответ: 461404

Чистовик   Математика, 10 класс

Страница: 4

Задание: 6



Решение:

а) OT и CD диагонали четырёхуг.

OCTD т.к. делятся пополам

$\Rightarrow$ OCTD – параллелог. $\Rightarrow CT \parallel OD$ и $OC \parallel DT$

$\Rightarrow \begin{cases} \angle ODC = \angle DCT \\ \angle CDT = \angle OCD \\ \angle TOD = \angle CTO \end{cases}$ $DT = OC$, $CT = OD$ $\Rightarrow$ т.к. $CT \parallel BD$, то

BCTD – трапец. и т.к. $CO \parallel DT$, то ACTD – трап. $\Rightarrow \angle CBD + \angle BCT = 180^\circ \Rightarrow$

~~(т.к. ∠BCK = 80°, то)~~ $60^\circ + 60^\circ + \angle OCT = 180^\circ \Rightarrow \angle OCT = 60^\circ \Rightarrow \angle COD = \angle CTD = 120^\circ$.

т.к. $\angle BOA = 360^\circ - 120^\circ - 120^\circ - 120^\circ \Rightarrow \triangle ABO = \triangle OCD$ по 2-ум сторонам и углу между ними. $\Rightarrow \angle ABD = \angle ACD$ и $\angle BAC = \angle BDC$.

$\triangle BOA = \triangle BCT$ по двум сторонам и углу между ними ($\angle = 120$; $BO = BC$; $OA = CT$)

$\Rightarrow BT = AB$ соотв.

$\triangle ADT = \triangle BCT$ по 2-ум сторонам и углу между ними ($\angle = 120$; $AD = TC$; $BC = DT$)

$\Rightarrow AT = BT \Rightarrow AT = BT = AB \Rightarrow \triangle ABT$ – равносторон. $\Rightarrow$ правильный ч.т.д.

б) Если $BC = 2$, то $BO = OC = DT = 2$

Если $AD = 4$, то $AO = OD = CT = 4$

По теореме cos ($\triangle ABO$):

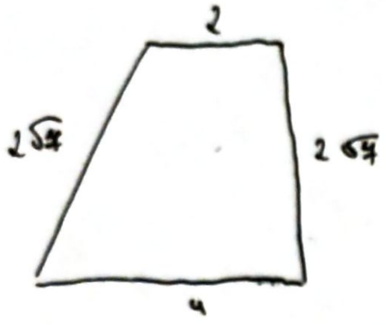
$AB^2 = BO^2 + AO^2 - 2\cos 120^\circ \cdot BO \cdot AO = 2^2 + 4^2 - 2\cos 120^\circ \cdot BO \cdot AO =$

$20 - 16\left(-\frac{1}{2}\right) = 20 + 8 = 28 \Rightarrow$

$AB = 2\sqrt{7} = AT = BT$

S равностороннего $\triangle = \frac{\sqrt{3}}{4}(2\sqrt{7})^2 = \frac{\sqrt{3} \cdot 28}{4} = 7\sqrt{3}$

Остаётся четырёхугольник ABCD.



Рассмотрим $\triangle CTD$:

$CT = 4$, $DT = 2$, $\angle CTD = 120° \Rightarrow CD = 2\sqrt{7}$

по теореме cos:

$CD^2 = 2^2 + 4^2 - 2\cos 120° \cdot 2 \cdot 4 = 28$

$CD = 2\sqrt{7}$

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot d$; $d = \sin\angle BOC = \frac{1}{2}(2+4) \cdot (2+4) \cdot \sin 60° = \frac{6 \cdot 6}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$

тогда $\frac{S_{ADT}}{S_{ABCD}} = \frac{7\sqrt{3}}{9\sqrt{3}} = \frac{7}{9}$

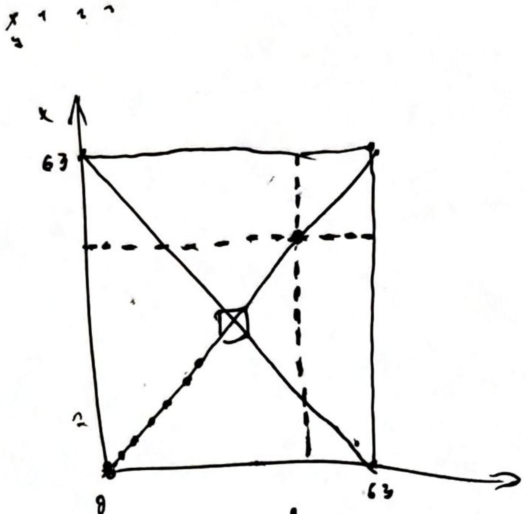
Ответ: $\frac{7}{9}$

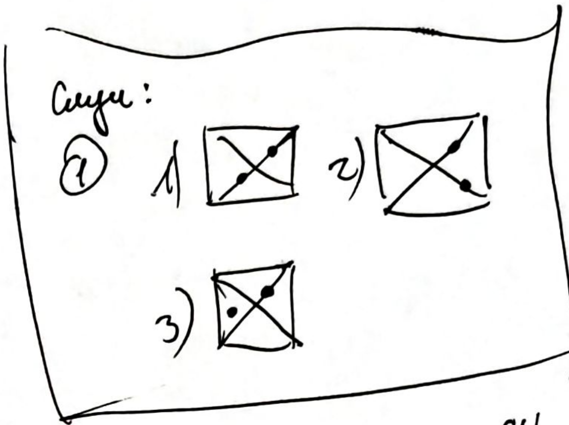
Черновик

Математика, 10 класс

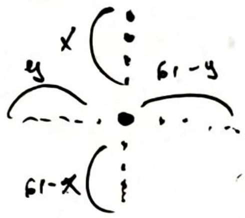
Страница: 1

~~Нол~~ Задание: 5





$\frac{61!}{(61-2)!\,2!}$



всего узлов $61 \times 61 = 481$

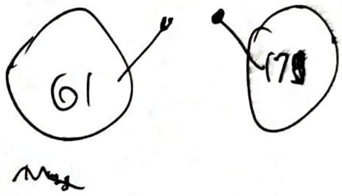
прямые $x = y$ и $y = 63 - x$ – диагонали □

① Найдём кол-во сп. выбрать два узла на 1-ой пр.:

всего 61 узел $C_{61}^{2} =$

② + кол-во если 1 узел лежит на диаг, а второй не леж

$481 - \underbrace{60}_{\text{диаг 1}} - \underbrace{60}_{\text{диаг 2}} - \underbrace{61}_{\text{прямая} \parallel x} - \underbrace{61}_{\text{прям} \parallel y} = 481 - 303 = 178$



$\underbrace{61}_{\text{выбр. на прям}} + \underbrace{178}_{\text{вне прямой}}$

③ $178 \cdot 61$ = для одной прямой с разн. точк.

$178 \cdot 61$

① $(61+61)(62+62) = 122 \cdot 124$.

② $62 \cdot 62 - 1$ т.к 1 уже выбрали

Тогда.

$124(62 \cdot 62 - 1) - 124 \cdot 124 = 3843 \cdot 124 - 124 \cdot 122 =$

$124(3843 - 122) = 124 \cdot 3721 = \underline{461404}$

$3721 \times 124 = 461404$

3843×124

Черновик

Страница 2

Зам.

$x^2+y^2=a$

$x^2 \cdot y^2=b$

$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2y^2x^2=a^2-2b$

$$\begin{cases} \frac{1}{a}+b=\frac{5}{4} \\ 2(a^2-2b)+5b=\frac{9}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{1}{a}+b=\frac{5}{4} \\ 2a^2-4b+5b=\frac{9}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{a}+b=\frac{5}{4} \\ 2a^2+b=\frac{9}{4} \end{cases} \quad \ominus$$

$2a^2+b-\frac{1}{a}-b=\frac{9}{4}-\frac{5}{4}$

$2a^2-\frac{1}{a}=\frac{4}{4}=1$

$2a^2-\frac{1}{a}=1 \,\Big|\cdot a,\ a\neq 0$

$2a^3-1=a$

$2a^3-a-1=0$

$(a-1)(2a^2+2a+1)=0$ $\qquad D=4-4\cdot 2=-4<0 \Rightarrow 2a^2+2a+1>0$

$\Rightarrow a=1$

$b=\frac{9}{4}-2\cdot 1=\frac{1}{4}$

Возвр.:

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2\cdot y^2=\frac{1}{4} \end{cases}$$

$(1-y^2)\cdot y^2=\frac{1}{4}$

$y^2-y^4+\frac{1}{4}=0$

$\frac{1}{4}(2y^2-1)^2=0 \Rightarrow$

$y^2=\frac{1}{2}$

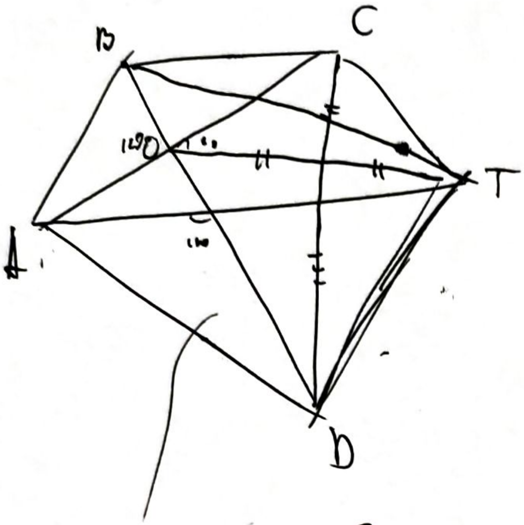
$y=\pm\frac{1}{2} \rightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{2} \\ x=-\frac{1}{2} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} y=\frac{1}{2} \\ y=-\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{2} \\ x=-\frac{1}{2} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} y=\frac{1}{2} \\ y=-\frac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases}$$

Черновик

Страница: 3



Соединение CT и TD — диагонали четырёхугольника OCTD

$$\begin{cases} \angle ODC = \angle DCT \\ \angle CDT = \angle OCD \\ \angle TOD = \angle CTD \end{cases} \quad . \ CT \parallel BD, \text{ то}$$

BCTD — трапец.

ACTD — трапец.

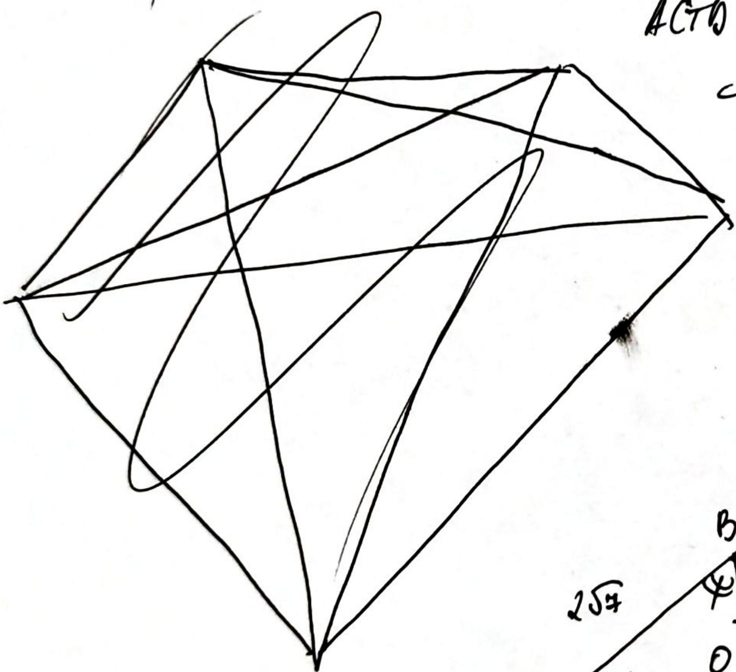
$\angle CBD + \angle BCT = 180^\circ \Rightarrow$

$\angle OCT = 60^\circ \Rightarrow \angle CTD = \angle COD = 120^\circ$

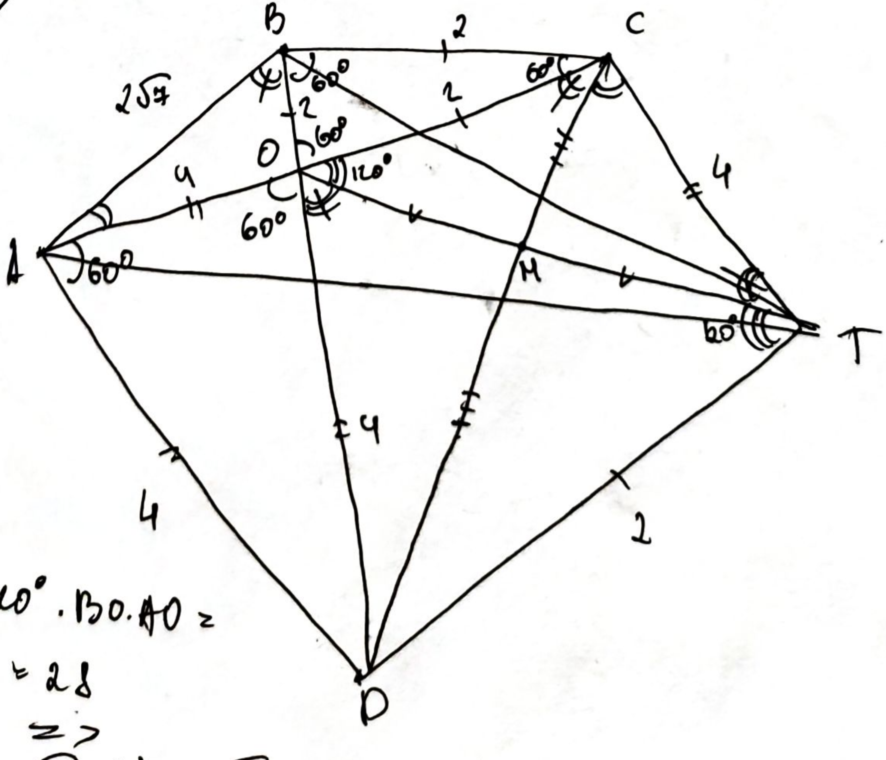
$\triangle ABO = \triangle OCD$ по 2 и $\angle$

$\triangle BOA = \triangle BCT$ по 2 и $\angle$

$\triangle ADT = \triangle BCT$ по 2 и $\angle$



$AB = AT = BT \Rightarrow \triangle ABT$ — равност. ч.т.д.



б) $BO = OC = DT = 2$

$AO = OD = CT = 4$

$AB^2 = BO^2 + AO^2 - 2\cos 120^\circ \cdot BO \cdot AO =$

$2^2 + 4^2 - 2\cos 120^\circ \cdot 2 \cdot 4 = 28$

$AB = 2\sqrt{7} = AT = BT \Rightarrow$

$S_\triangle = \frac{\sqrt{3}}{4}(2\sqrt{7})^2 = \frac{\sqrt{3}\cdot 28}{4} = 7\sqrt{3}$