Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

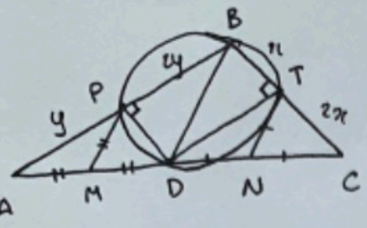
Шифр: **211006389**

ID профиля: **366929**

Вариант 12

Чистовик

Задача №1



Дано: $\triangle ABC$; $D \in AC$; ω - ок-ть с диаметром BD; $\omega \cap AB = P$, $\omega \cap BC = T$; M-середина AD, N-середина DC; $PM \parallel TN$

а) $\angle ABC$ - ?

б) Если $MP = \frac{1}{2}$; $NT = 1$; $BD = \frac{4}{3}$, то S_{ABC} - ?

Решение

а) Четырёхугольник $PBTD$ - вписанный, $\angle BPD = \angle BTD = 90°$, т.к. они опираются на диаметр ок-ти ω. Тогда $\angle APD = 90°$, как смежный с $\angle BPD$, и $\angle DTC = 90°$, как смежный с $\angle BTD$, $\triangle APD$ и $\triangle DTC$ прямоугольные. В них PM и TN - медианы, проведённые из прямых углов, то $PM = AM = MD$ и $DN = TN = NC$, $\triangle AMP$, $\triangle MPD$, $\triangle DNT$ и $\triangle NTC$ - равнобедренные. Пусть $\angle PMD = \alpha$, $\angle AMP = \beta$. Т.к. $PM \parallel TN$ - по условию, то $\angle PMD = \angle TNC = \alpha$ - соответственные. Аналогично $\angle AMP = \angle DNT = \beta$. Тогда $\angle MPD = \angle MDP = \angle NTC = \angle NCT = \frac{180-\alpha}{2}$ и $\angle MAP = \angle MPA = \angle NTD = \angle NDT = \frac{180-\beta}{2}$. Заметим, что $\angle APD = 90° = \angle APM + \angle MPD = \frac{180-\alpha}{2} + \frac{180-\beta}{2}$. При этом $\angle APD = \angle BAC + \angle BCA = 90°$, то $\angle ABC = 180° - \angle APD = 90°$

б) $PBTD$ - прямоугольник (по доказанному в прошлом пункте), то $DT \parallel AB$ и $PD \parallel BC$. Тогда по теореме о пропорциональных отрезках $\frac{AP}{PB} = \frac{AD}{DC} = \frac{1}{2}$ $(AD = AM + MD = 2PM)$ и $\frac{CT}{TB} = \frac{CD}{DA} = \frac{2}{1}$ $(CD = CN + ND = 2TN)$. Пусть $TC = 2x$, $BT = x$, $AP = y$, $PB = 2y$

Из прямоугольных $\triangle APD$ и $\triangle PBD$ $(PD = BT)$: $AP^2 + PD^2 = AD^2$; $PB^2 + PD^2 = BD^2$

$$\begin{cases} y^2 + x^2 = 1 & (1) \\ 4y^2 + x^2 = \frac{16}{9} & (2) \end{cases}$$, вычтем (1) из (2): $3y^2 = \frac{7}{9}$, откуда $y = \frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}$

Тогда $x = \frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}$. $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} 3y \cdot 3x = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{7}{3}} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{7} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{35}}{3}$

Ответ: а) $\angle ABC = 90°$

б) $S_{ABC} = \frac{\sqrt{35}}{3}$

211006389 (U366929 M1276754)

Чистовик

Задача №2

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$

Обл. опр.: $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \\ 4+3x-x^2 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 4 \end{cases}$

Пусть $\sqrt{x+1} = a$, $\sqrt{4-x} = b$, $a \geq 0$, $b \geq 0$, то

$\begin{cases} a - b + 3 = 2ab \\ a^2 = -b^2 + 5 \end{cases}$ $\begin{cases} a = \frac{b-3}{1-2b} & (1) \\ a^2 = -b^2 + 5 & (2) \end{cases}$, подставим (1) в (2):

$\frac{(b-3)^2}{(1-2b)^2} = -b^2 + 5$; $(b-3)^2 = (1-2b)^2 \cdot (-b^2+5)$

$4b^4 - 4b^3 - 18b^2 + 14b + 4 = 0$

$2b^4 - 2b^3 - 9b^2 + 7b + 2 = 0$, $b = 1$ - корень

$(b-1)(2b^3 - 9b - 2) = 0$, $b = -2$ - корень

$(b-1)(b+2)(2b^2 - 4b - 1) = 0$

$(b-1)(b+2)\left(b - \frac{2+\sqrt{6}}{2}\right)\left(b - \frac{2-\sqrt{6}}{2}\right) = 0$

$b = -2$ и $b = \frac{2-\sqrt{6}}{2}$ не удовл. $b \geq 0$

$b = 1$

$\sqrt{4-x} = 1$

$x = 3$

$b = \frac{2+\sqrt{6}}{2}$

$\sqrt{4-x} = \frac{2+\sqrt{6}}{2}$; $16 - 4x = 4 + 4\sqrt{6} + 6$

$4x = 16 - 4 - 4\sqrt{6} - 6$

$2x = 8 - 2 - 2\sqrt{6} - 3$

$x = \frac{3-2\sqrt{6}}{2}$

Ответ: 3; $\frac{3-2\sqrt{6}}{2}$

211006389 (U366929 M1276754)

Чистовик

Задача № 3

$2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0$ - точка A

$ax^2+4a^2x-ay+4a^3+2=0$ - парабола с вершиной в точке B

Запишем уравнение данной параболы в виде $y=x^2+4ax+4a^2+\frac{2}{a}$

Её вершина (точка B) будет иметь координаты $(-2a; \frac{2}{a})$

Для того, чтобы обе точки лежали по одну сторону от прямой, их координаты должны одновременно удовлетворять или

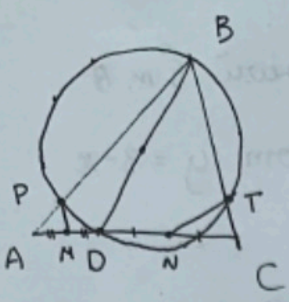
~~у~~ $y<3-x$, или $y>3-x$

211006389 (U366929 M1276754)

Черновик

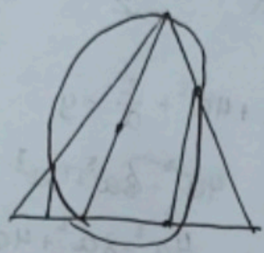
а) $\angle ABC$ - ?

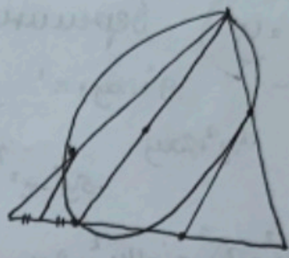
б.) $MP = \frac{1}{2}$; $NT = 1$; $BD = \frac{4}{3}$ $\quad S_{ABC}$ - ?

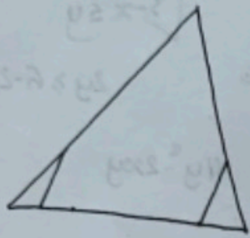


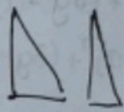
2,8

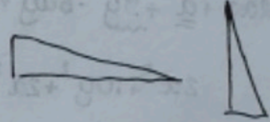
$PM \parallel TN$

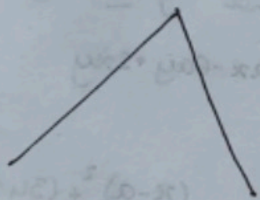


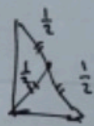




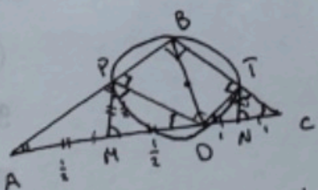






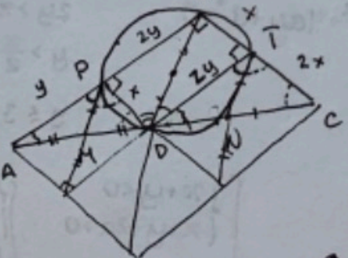


$\angle ABC$ - ?



а) $90°$

б.) $MP = \frac{1}{2}$; $NT = 1$, $BD = \frac{4}{3}$



$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC$

AC

$\frac{TC}{BC} = \frac{DC}{AC} = \frac{2}{3}$

$\frac{S_{ABD}}{S_{BDC}} = \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} \sqrt{y^2+x^2} = 1 \\ \sqrt{x^2+4y^2} = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2+x^2=1 \\ x^2+4y^2=\frac{16}{9} \end{cases} \qquad \begin{cases} 3y^2 = \frac{7}{9} \\ y^2 = \frac{7}{27} \\ y = \sqrt{\frac{7}{27}} \end{cases}$$

$\sqrt{\frac{7}{27}} = \frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}$

$\sqrt{\frac{7}{27}} \qquad \frac{7}{27} + \frac{20}{27} \qquad \frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}$

Черновик

$2a^2 - 2ax - 6ay + x^2 + 2xy + 5y^2 = 0$ – т. A

$ax^2 + 4a^2x - ay + 4a^3 + 2 = 0$ – парабола с вершиной в т. B

Точки A и B лежат по одну сторону от $y = 3 - x$

$\dfrac{ax^2 + 4a^2x + 4a^3 + 2}{a} = y$ вершина $\dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-4a}{2} = -2a$

$(-2a; \dfrac{2}{a})$

$y^2 + 2xy + x^2$

$-4y^2 + 2xy$

$-5y^2 - x^2$ $x^2 + 4ax + 4a^2 + \dfrac{2}{a} = y$

$\cancel{(x+y)^2}$

$\cancel{4a^2 - 8a^3 + 4a^3}$

$\left[\begin{array}{l} 3-x \geq y \\ 3-x \leq y \end{array}\right.$

$(x-a)^2 + (\cancel{9y}\ 3y^2 - a)^2 + -4y^2 + 2xy = 0$ $4a^2 - 8a^2 + 4a^2 + \dfrac{2}{a} =$ $2y \geq 6 - 2x$

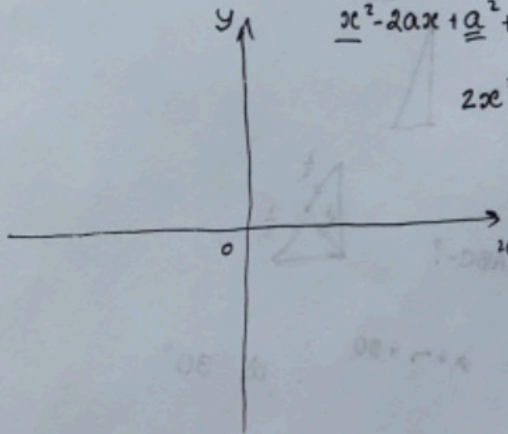
$(x-a)^2 + (3y^2 - a)^2 + (y+x)^2 - 5y^2 - x^2 = 0$

$(x-a)^2 + (3y-a)^2 + (y+x)^2 = 5y^2 + x^2$ $= \dfrac{2}{a}$ $4y^2 - 2xy$

$x^2 - 2ax + a^2 + 9y^2 - 6ay + a^2 + y^2 + 2xy + x^2 = 5y^2 + x^2$

$2y(x-2y) > 0$

$2x^2 + 10y^2 + 2a^2 - 2ax - 6ay + 2xy$



$(x-a)^2 + (3y-a)^2 - 4y^2 + 2xy = 0$

$(x-a)^2 + (3y-a)^2 = 4y^2 - 2xy$

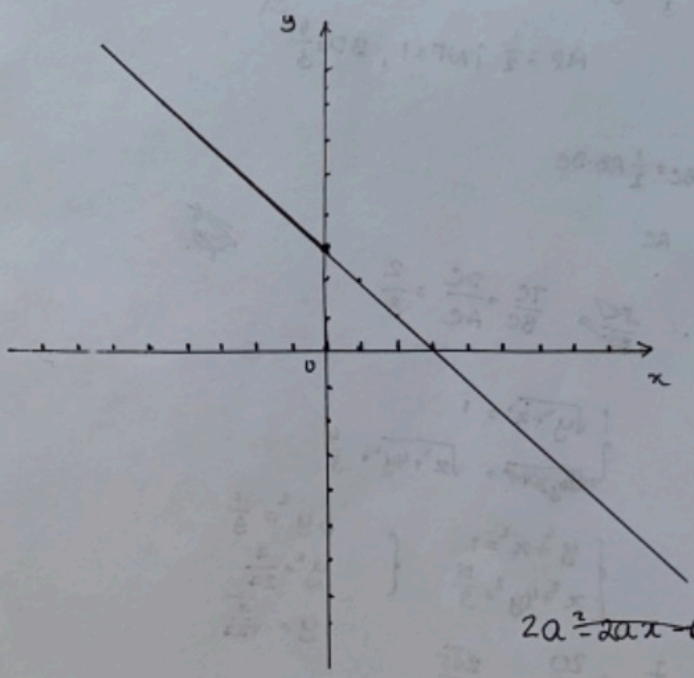
$(3y-a)^2 = 4y^2 - 2ay$ $4y^2 > 2xy$

$9y^2 - 6ay + a^2 = 4y^2 - 2ay$ $2y^2 > xy$

$5y^2 - 4ay + a^2 = 0$ $2y > x$

$y > \dfrac{x}{2}$

$y \leq 3 - x$



$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y<0 \\ x+y-2a>0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y>0 \\ x+y-2a<0 \end{cases} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < y \\ 2a < x+y \end{cases} \\ \begin{cases} x > -y \\ 2a > x+y \end{cases} \end{array}\right.$

$(x-a)^2 + (3y-a)^2 - 4y^2 + 2xy = 0$

$2a(a - x - y) + (x+y)^2 + 4y^2 = 0$

$-2a(x+y) + (x+y)^2 + 4y^2 + 2a^2 = 0$

$(x+y)(x+y-2a) + 4y^2 + 2a^2 = 0$

$2(2y^2 + a^2)$

$2a^2 \cancel{-2ax-6}$

211006389 (U366929 M1276754)

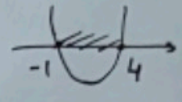
Черновик

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$

ОДЗ: $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \\ 4+3x-x^2 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 4 \\ -(x-4)(x+1) \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 4 \\ (x-4)(x+1) \leq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 4 \end{cases}$

$x^2 - 3x - 4 = 0$

$\begin{cases} x_1 x_2 = -4 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -1 \end{cases}$



$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = \cancel{2\sqrt{(x+1)(x-4)}}\ 2\sqrt{(x+1)(4-x)}$

$a \geq 0,\ b \geq 0$

Пусть $\sqrt{x+1} = a$, $\sqrt{4-x} = b$, то

$\begin{cases} a - b + 3 = 2ab \\ a^2 = -b^2 + 5 \end{cases}$ $\begin{cases} a(1-2b) = b-3 \\ a^2 = -b^2 + 5 \end{cases}$ $\begin{cases} a = \frac{b-3}{1-2b} \\ \end{cases}$

$x+1 = -(4-x)+5$

$x+1 = x-4+5$

$2b^4 - 9b^2 - 2b - 2b^3 + 9b + 2 =$

$= 2b^4 - 2b^3 - 9b^2 + 7b + 2$

$b \neq \frac{1}{2}$

$\frac{(b-3)^2}{(1-2b)^2} = -b^2 + 5$

$(b-3)^2 = (1-2b)^2 \cdot (-b^2+5)$

$b^2 - 6b + 9 = (1 - 4b + 4b^2)(-b^2+5)$

$b^2 - 6b + 9 = -b^2 + 5 + 4b^3 - 20b - 4b^4 + 20b^2$

$4b^4 - 4b^3 - 18b^2 + 14b + 4 = 0$

$2b^4 - 2b^3 - 9b^2 + 7b + 2 = 0$; $b = 1$ – корень

$2-2-9+7+2$

$(b-1)(2b^3 - 9b - 2) = 0$; $b = -2$ – корень

$\cancel{-2\cdot 27}\ 27 - 2$

3

$(b-1)(b+2)(2b^2 - 4b - 1) = 0$ <0

$(b-1)(b+2)\left(b - \frac{2+\sqrt{6}}{2}\right)\left(b - \frac{2-\sqrt{6}}{2}\right) = 0$

$\hat{0}$

$2b^3 - 9b - 2 = 0$

$2\cdot 8 - 9\cdot 2 - 2$

$-2\cdot 8 + 9\cdot 2 - 2$

$b = 1$

$\sqrt{4-x} = 1$

$x = 3$

$(2b^2 - 4b - 1)(b+2) =$

$= 2b^3 - \cancel{4b^2} - b + \cancel{4b^2} - 8b - 2 =$

$= 2b^3 - 9b - 2$

$2b^2 - 4b - 1$

$\cancel{\frac{D}{4} = 4+2 = 6}$; $D = 16 + 8 = 24$; $\sqrt{D} = 2\sqrt{6}$, $b = \frac{4 \pm 2\sqrt{6}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{6}}{2}$

$2{,}5 \cdot 2{,}5$: $125 + 50 = 6{,}25$

$\sqrt{6} =$

$b = \frac{2+\sqrt{6}}{2}$

$\sqrt{4-x} = \frac{2+\sqrt{6}}{2}$

$4 - x = \frac{(2+\sqrt{6})^2}{4}$

$16 - 4x = 4 + 4\sqrt{6} + 6$

$4x = 16 - 4 - 4\sqrt{6} + 6$

$2x = 8 - 2 - 2\sqrt{6}\ \cancel{+3} - 3$

$x = \frac{3 - 2\sqrt{6}}{2}$

$2b^4 - 2b^3 - 9b^2 + 7b + 2 \ |\ b-1$

$-\ 2b^4 - 2b^3 \qquad 2b^3 - 9b - 2$

$-9b^2 + 7b$

$-\ -9b^2 + 9b$

$-2b + 2$

$-\ -2b + 2$

0

$2b^3 - 9b - 2 \ |\ b+2$

$-\ 2b^3 + 4b^2 \qquad 2b^2 - 4b - 1$

$-4b^2 - 9b$

$-\ -4b^2 - 8b$

$-b - 2$

$-\ -b - 2$

0

$\frac{\sqrt{81} - \sqrt{24}}{2} \approx 2$ $\quad 9 \quad -2\cdot 2{,}5$

$\frac{3-5}{2} = -\frac{2}{2}$

$\frac{3 - 2\cdot 2{,}4}{2} =$

$\frac{3 - 4{,}8}{2} =$

$= \frac{-1{,}8}{2} =$

$= -0{,}9$

$\frac{3-5}{2} = \frac{-2}{2} = -1$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006389**

ID профиля: **366929**

Вариант 12

Чистовик

Задача №4

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2}+x^2y^2=\dfrac{5}{4} \\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2=\dfrac{9}{4} \end{cases}$$

Пусть $x^2y^2=a$, $x^2+y^2=b$, $a\geq 0$, $b>0$, тогда имеем

$$\begin{cases} \dfrac{1}{b}+a=\dfrac{5}{4} \\ 2(b^2-2a)+5a=\dfrac{9}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} a=\dfrac{5}{4}-\dfrac{1}{b} & (1) \\ 2(b^2-2a)+5a=\dfrac{9}{4} & (2) \end{cases}$$

Подставим (1) в (2):

$2b^3-b-1=0$, $b=1$ - корень

$(b-1)(2b^2+2b+1)=0$

Для $2b^2+2b+1$ $D<0$, поэтому $b=1$, то $a=\frac{1}{4}$

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2y^2=\dfrac{1}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2=1-y^2 & (3) \\ x^2y^2=\dfrac{1}{4} & (4) \end{cases}$$

Подставим (3) в (4):

$(1-y^2)y^2=\frac{1}{4}$

$y^2-y^4=\frac{1}{4}$; $y^2=\frac{1}{2}$; $y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, то $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cancel{\begin{cases} y=\frac{1}{\sqrt{2}} \\ x=\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}}$ $\cancel{y=}$

Ответ: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Чистовик

Задача №5

Всего имеем $62 \cdot 62 = 3844$ узла, ~~в~~ которые можем ~~ставить~~ выбирать (все узлы, не считая границы). Из них $62 \cdot 2 = 124$ узла расположены на прямых $y=x$ и $y=63-x$ (они являются диагоналями данного квадрата). Тогда всего способов выбрать два узла так, чтобы хотя бы один из них лежал на диагонали:

$124 \cdot 3843$.

Найдём теперь кол-во способов расположить эти два узла на прямой, параллельной осям координат:

имеем 62 прямые, параллельные оси OX, для каждой из них будет выбран один из двух узлов на диагонали и какой-то второй узел из оставшихся. Это $2 \cdot 61$ способа для одной прямой, $2 \cdot 61 \cdot 62$ всего

Аналогично для 62 прямых, параллельных OY, то есть всего

$2 \cdot 61 \cdot 62 \cdot 2$

Тогда всего способов выбрать узлы:

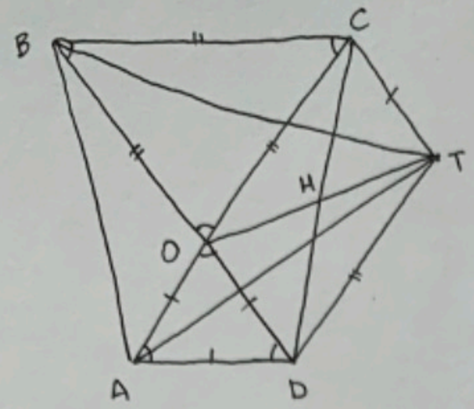
$124 \cdot 3843 - 4 \cdot 61 \cdot 62 = 461404$

Ответ: 461404

211006389 (U366929 M1276755)

Чистовик

Задача №6



Дано: четырёхугольник ABCD; $AC \cap BD = O$;
$\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ - правильные; H - середина CD;
т. T симметрична т. O относительно H;

а) Д-ть, что $\triangle BTA$ - правильный
б) Если $BC = 2$, $AD = 4$, то $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$ - ?

Решение

а.) Т.к. $\angle ADB = \angle CBD = 60°$ - внут. накрест лежащие, то $BC \parallel AD$. $\triangle ABO = \triangle COD$ по двум сторонам и вертикальным $\angle AOB = \angle COD$, то $AB = CD$, ABCD - равнобокая трапеция. В CTDO H-точка пересечения диагоналей, при этом $CH = HD$ и $OH = HT$, тогда CTDO - параллелограмм, $OD = CT = AO = AD$ и $CO = TD = BO = CB$. Рассмотрим $\triangle BCT$ и $\triangle ADT$: $BC = TD$, $CT = AD$, $\angle BCT = \angle BCA + \angle TCO$ и $\angle ADT = \angle ADB + \angle TDO$, при этом $\angle BCA = \angle ADB$ и $\angle TCO = \angle TDO$, то $\angle BCT = \angle ADT$, $\triangle BCT = \triangle ADT$ по двум сторонам и углу между ними, $BT = TA$. BCTD - равнобокая трапеция, т.к. $CT \parallel BD$ и $BC = TD$, то $BT = CD$. Тогда у $\triangle BCT$ и $\triangle COT$: CT - общая, $BC = TD$, $CD = BT$ - $\triangle BCT = \triangle CDT$ по трём сторонам. $\triangle CTD = \triangle OCD = \triangle BOA$, т.е. $\triangle BCT = \triangle BOA$, то $AB = BT$. Получаем, $AB = BT = TA$, $\triangle BTA$ - правильный, ч.т.д.

б.) $S_{ABCD} = \frac{1}{2} h (BC + AD)$, где h - высота трапеции, равная сумме высот $\triangle AOD$ и $\triangle BOC$ или $3\sqrt{3}$, то $S_{ABCD} = 3\sqrt{3} \cdot 3 = 9\sqrt{3}$; $S_{AOB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot BO \cdot AO = 2\sqrt{3}$ ($\angle AOB = 120°$)

~~$\angle AOB = 120°$, $\sin\angle AOB = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $S_{AOB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot BO \cdot AO = \sqrt{p(p-BO)(p-AO)(p-AB)}$. Пусть $AB = x$~~, то

~~$\sqrt{(3+\frac{x}{2})(\frac{x}{2}+1)(\frac{x}{2}-1)\cdot 3} = 2\sqrt{3}$~~

~~$(3+\frac{x}{2})(\frac{x}{2}+1)(\frac{x}{2}-1)3 = 12$~~

~~$x^3 + 6x^2 - 4x - 68 = 0$~~

$S_{ABCD} + \cancel{2}S_{BCT} = S_{ABT} + 2S_{BCT}$

$S_{ABCD} = S_{ABT} + S_{BCT}$

$9\sqrt{3} = S_{ABT} + 2\sqrt{3}$

$S_{ABT} = 7\sqrt{3}$, то $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{7\sqrt{3}}{9\sqrt{3}} = \frac{7}{9}$

Ответ: б.) $\frac{7}{9}$

Черновик

№4

$\frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4}$

$\frac{1}{a+b} + ab = \frac{5}{4}$

$\frac{1+ab(a+b)}{a+b} = \frac{5}{4}$

$2x^4+2y^4+5x^2y^2 = \frac{9}{4}$

$4+4ab(a+b) = 5(a+b)$

$2a^2+2b^2+5ab = \frac{9}{4}$

$4+4a^2b+4ab^2-5a-5b=0$

$b^2 = x^4+2x^2y^2+y^4$

$2a^2+5ab+2b^2 = \frac{9}{4}$

$\frac{4}{a+b}+4ab=5$

$2+\frac{5b}{a}+2\frac{b^2}{a^2} = \frac{9}{4}$

$8x^4+8y^4+20x^2y^2=9$

$\begin{cases} 4+4a^2b+4ab^2-5a-5b=0 \\ 2+5\frac{b}{a}+2\frac{b^2}{a^2} = \frac{9}{4} \end{cases}$

Пусть $x^2y^2 = a$, $a>0$
$x^2+y^2 = b$, $b>0$

$\begin{cases} \frac{1}{b}+a = \frac{5}{4} \quad (1) \\ 2(b-2a)+5a = \frac{9}{4} \end{cases}$

$\begin{cases} 2a^2+5ab+2b^2 = \frac{9}{4} \\ \frac{4}{a+b}+4ab=5 \end{cases}$

$\{$

(1) $\frac{1+ab}{b} = \frac{5}{4}$

$b=1$, то $a=\frac{1}{4}$

$5b = 4+4ab$

$b(4a-5) = -4$

$b = -\frac{4}{4a-5}$

$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2y^2=\frac{1}{4} \end{cases}$ $\begin{cases} x^2=1-y^2 \end{cases}$

$y=\frac{1}{\sqrt{2}}$, то $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$(1-y^2)y^2 = \frac{1}{4}$

$(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}); (\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}})$

$2b-4a+5a=\frac{9}{4}$

$y^2-y^4=\frac{1}{4}$

$2b+a=\frac{9}{4}$

$-y^4+y^2-\frac{1}{4}=0$, $y^2=t$

$a=\frac{9}{4}-2b$

$-2b+1+\frac{1}{b}=0$

$-t^2+t-\frac{1}{4}=0$; $t^2-t+\frac{1}{4}=0$

$\frac{1}{b}+\frac{9}{4}-2b=\frac{5}{4}$

$\cancel{D}=$ $4t^2-4t+1=0$

$D=\cancel{16}\,0$

$-2b^2+b+1=0$

$(2t-1)^2$

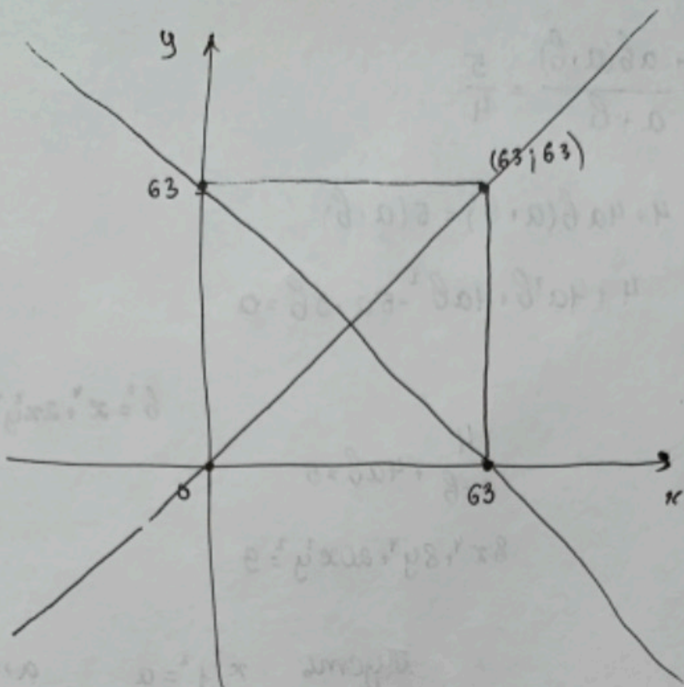
$y^2=\frac{1}{2}$; $y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$t=\frac{1}{2}$

$2b^2-b-1=0$

$D=1+8=9$; $b=\frac{1\pm3}{4}$; $b_1=1$; $b_2=-\frac{1}{2}$ - не уд

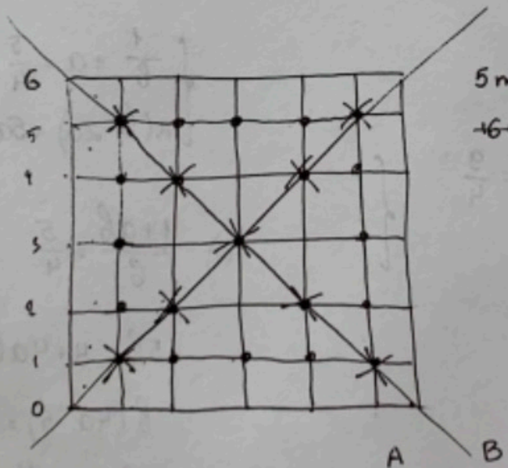
Черновик



$y = 63 - x$

хотя бы один из узлов лежал на прямой, но оба узла не лежали на прямой, парал. осям координат

$$\begin{array}{r} 62 \\ \times\, 62 \\ \hline 124 \\ 372 \\ \hline 3844 \end{array}$$



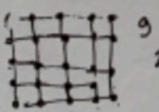
5 точек 9 точек

~~16+5=21 точка~~

4

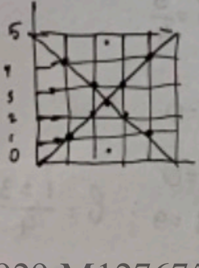
$62 \cdot 2 - 1 = 124 - 1 = 123$ точки

$62 \cdot 62 = 3844$



$123 \cdot 3843$ - всего способов поставить две точки

$2 \cdot 62 \cdot 2 \cdot 61 =$ - всего способов поставить две точки на одну и ту же прямую, парал. осям координат.



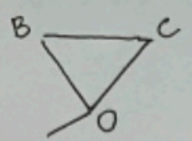
$$\begin{array}{r} 3843 \\ \times\, 124 \\ \hline 15372 \\ 7686 \\ 3843 \\ \hline 476532 \end{array}$$

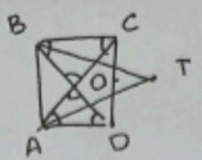
$$\begin{array}{r} 476532 \\ -\, 15128 \\ \hline 461404 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 61 \\ \times\, 62 \\ \hline 122 \\ 366 \\ \hline 3782 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3782 \\ \times\, 4 \\ \hline 15128 \end{array}$$

Черновик

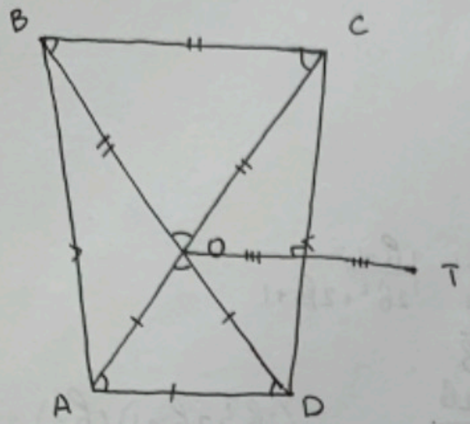


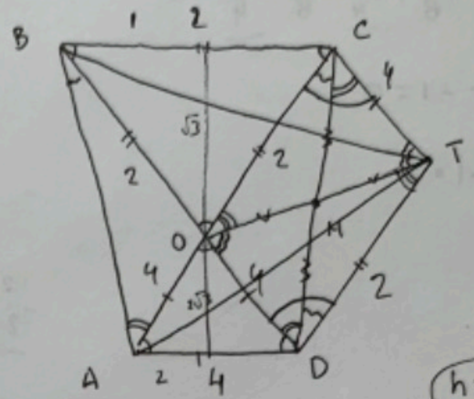


а) Д-ть: $\triangle ABT$ - правильный

б) $BC=2$; $AD=4$; $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$ - ?

$S_{ABCD}=3\sqrt{3}\cdot 3=9\sqrt{3}$





$BO \parallel CT$

$DT \parallel AC$

$h=3\sqrt{3}$

$\sqrt{(3+\frac{x}{2})(\frac{x}{2}+1)(\frac{x}{2}-1)3} = 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$(3+\frac{x}{2})(\frac{x}{2}+1)(\frac{x}{2}-1)$

$\sqrt{16-4}$

$\triangle BCT=\triangle ADT \to BT=AT$

$BA=CD$

$168 : 13$, -13, 48, $1\,56$

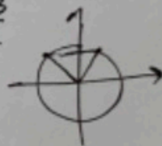
$ACTD=\triangle BCT$

$3\sqrt{3}$

$16\times 4 = 64$

$25\times 9 = 125$

$\sin(120)=\frac{\sqrt{3}}{2}$



$16 \times 9 = 144$

$9+6=15$

$4a(5-4a)^2-9(5-4a)^2+128=0$

$4a(25-40a+16a^2)-9(25-40a+16a^2)+128=0$

$100a-160a^2+64a^3-225+360a-144a^2+128=0$

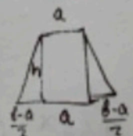
$\sin 60=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$225-128=97$

$32\times 4 = 128$

$64a^3-304a^2+460a-97=0$

$96+72=168$



20

$\frac{5}{4}-\frac{9}{4}=-1$

$\frac{1}{2}(2+4)\cdot H$

$2\cdot 28$ $\quad 2\cdot 14\cdot 2$ $\quad 2\cdot2\cdot2\cdot7$

$a=\frac{5}{4}-\frac{1}{b}$

$\cancel{309+97}$

$\frac{1}{b}=\frac{5}{4}-a=\frac{5-4a}{4}$

$2(b^2-\frac{5}{2}-\frac{2}{b})+\frac{25}{4}-\frac{5}{b}=\frac{9}{4}$

$\frac{b-a}{2}$

$\frac{b}{1}=\frac{4}{5-4a}$

$\frac{b-a}{2}\cdot h+ah$

$(\frac{x^2}{4}-1)(3+\frac{3x}{2})3$

$2b^2-5-\frac{4}{b}+\frac{25}{4}-\frac{5}{b}=\frac{9}{4}$

$h(\frac{b-a}{2}+a)$

$2b^3-b-9=0$

$16\times 4 = 64$

$\frac{8\sqrt{3}}{4}$

8

$\frac{9x^2}{4}+\frac{3x^3}{8}-9-\frac{3x}{2}=12$

$2b^2-\frac{9}{b}-1=0$

$18-2-9$

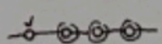
$2-1-9$

$b(2b^2-1)=9$

$h(\frac{b+a}{2})$

$18x^2+3x^3-72-12x=96$

$2b^3-b-9=0$



3 9 1

-3 -9 -1

$2\cdot 9-1$

$3x^3+18x^2-12x-168=0$

$\cancel{8+6\cdot 4}$

$2(\frac{16}{(5-4a)^2}-2a)+5a=\frac{9}{4}$

$\frac{k}{x}\cdot\frac{m}{n}$

$32+a(5-4a)^2=\frac{9(5-4a)^2}{4}$

$x^3+6x^2-4x-56=0$

$\frac{32}{(5-4a)^2}-4a+5a=\frac{9}{4}$

$\frac{km}{xn}=9$

$128+4a(5-4a)^2=9(5-4a)^2$

$27+6\cdot9-4\cdot3-56=0$

27

$64+6\cdot4-16-56$ $\quad \cancel{8+6}$

$27+54-12-56$

Черновик

$a = \frac{5}{4} - \frac{1}{b}$

$2\left(b^2 - \frac{10}{4} + \frac{2}{b}\right) + \frac{25}{4} - \frac{5}{b} = \frac{9}{4}$

$2b^2 - \frac{20}{4} + \frac{4}{b} + \frac{25}{4} - \frac{5}{b} - \frac{9}{4} = 0$

$2b^2 - \frac{1}{b} - 1 = 0$

$2b^3 - b - 1 = 0$

1

$2b^3 - b - 1 \;|\; b-1$

$-\; 2b^3 - 2b^2 \;|\; 2b^2 + 2b + 1$

$2b^2 - b$

$-\; 2b^2 - 2b$

$b - 1$

$(2b^2 + 2b + 1)(b-1) =$

$= 2b^3 \cancel{+2b^2} + b \cancel{-2b^2} - 2b - 1 =$

$= 2b^3 - b - 1$

$D = 4 -$

$a = \frac{5}{4} - 1$

$a = \frac{1}{4}$

$\left(3 + \frac{x}{2}\right)\left(\frac{x^2}{4} - 1\right)3 = 12$

S_{ABC}

$\left(3 + \frac{x}{2}\right)\left(\frac{x^2}{4} - 1\right) = 4$

$\frac{3x^2}{4} - 3 + \frac{x^3}{8} - \frac{x}{2} = 4$

$6x^2 - 32 + x^3 - 4x = 32$

$32 \cdot 2$

$x^3 + 6x^2 - 4x - 64 = 0$

$27 + 54 - 12 - 64$

$64 + 6 \cdot 16 - 4 \cdot 4 - 64$