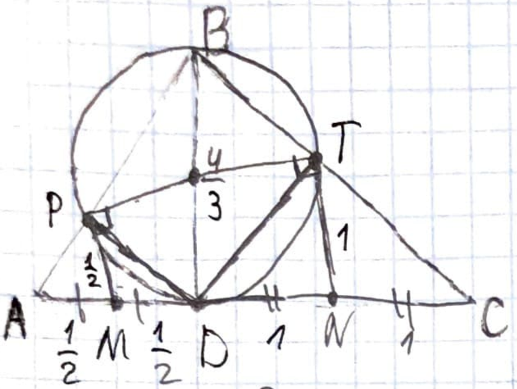
Часть 1

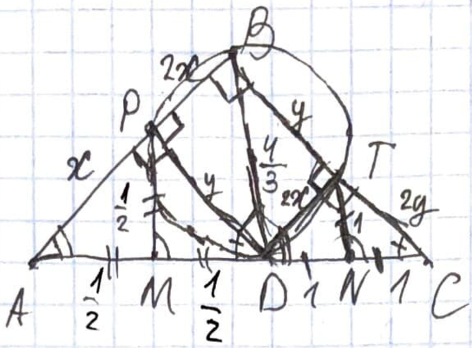
Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

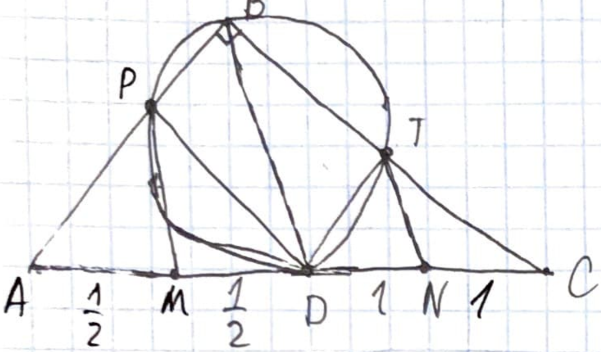
Шифр: **211006355**

ID профиля: **131580**

Вариант 12







$AC = 3$

$S_{APD} = xy \cdot \frac{1}{2}$; $S_{ABC} = 9xy \cdot \frac{1}{2} = xy \cdot \frac{1}{2} + 4xy \cdot \frac{1}{2} + 4xy \cdot \frac{1}{2}$

$S_{BDT} = xy = \frac{2x \cdot y \cdot \frac{2}{3}}{\frac{4}{3}}$

№2.

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2} \,\Big|^2$; $\quad 4+3x-x^2 = (x+1)(4-x)$

$x \in [-1; 4]$

$-2\sqrt{4+3x-x^2} + \cancel{8} = \cancel{8} + 6x - 2x^2$

$\sqrt{4+3x-x^2} = x^2 - 3x \,\Big|^2 \qquad x \in (-\infty; 0] \cup [3; +\infty)$

$4 + 3x - x^2 = x^4 - 6x^3 + 9x^2 \qquad t = x^2 - 3x$

$x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 3x - 4 = 0$

$1 + 6 + 10 + 3 - 4 \neq 0$

$16 - 48 + 40 - 6 - 4$

56

$\sqrt{4-t} = t \,\Big|^2$

$t^2 + t - 4 = 0$

$t = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$

$x^2 - 3x - \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} = 0$

$D = 9 - 2 + 2\sqrt{17} = 7 + 2\sqrt{17}$

$x = \frac{3 \pm \sqrt{7 + 2\sqrt{17}}}{2}$

$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}=2\sqrt{4+3x-x^2}-3\ |^2$

$5-2\sqrt{4+3x-x^2}=16+12x-4x^2+9-12\sqrt{4+3x-x^2}$

$10\sqrt{4+3x-x^2}=20+12x-4x^2$

$t=3x-x^2$ $\quad 6x-2x^2$

$5\sqrt{4+t}=10-2t\ |^2 \quad t\leq 5$

$100+25t=400-160t+16t^2$

$16t^2-185t+300=0$

$15025 \mid 25$
$150 \quad 601$

185^2
$\times 185$
925
1480
185
$34225-19200=15025$

16
$\times 1200$
3200
16
19200

$\times 505$
505
2525
2525

$\times 115$
115

$\times 405$
405
2025
2025

$\times 105$
105
525
405
11025

$\times 101$
101
101
101
10201

$x^2+2xy+5y^2+2a^2-2ax-6ay=0$

$y=3-x$

1) $y>3-x$

$(x+y)^2$

$2xy=3xy-xy$

$3xy-6ay=3y(x-2a)$

$B=\frac{-4a^2}{2a}=-2a=x,\ y=4a^3-4a^3-ay+4a^3+2=0$

$y=4a^2+\frac{2}{a}$

$4a^2+\frac{2}{a}-2a=3>0$

$\overset{2}{\sqrt{x+1}} - \overset{1}{\sqrt{4-x}} + \overset{3}{\sqrt{3}} = 2\overset{4}{\sqrt{4+3x-x^2}} - 3 \,|^2$

$x+1+4-x-2\sqrt{4+3x-x^2} = 16+12x-4x^2+9-$

$-12\sqrt{4+3x-x^2}$

$5\sqrt{4+3x-x^2} = 10+6x-2x^2$

$t = 3x-x^2$

$5\sqrt{4+t} = 10+2t \,|^2$

$100+25t = 100+40t+4t^2$

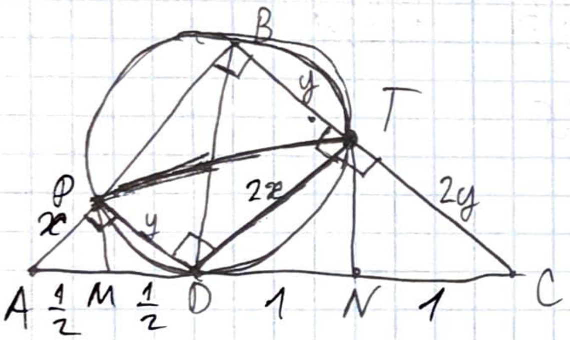
$4t^2-65t=0$

$t=0,\ t=\frac{15}{4}$

$x=0;3 \qquad x^2-3x+\frac{15}{4}=0 \quad x=\varnothing$

при $x=0 \quad 2\sqrt{4+3x-x^2}-3=1,\ \sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}=-1 \Rightarrow x\neq 0$

$\frac{60}{58}\Big|\frac{7}{8}$ $\quad 29 \times 29 \quad 261 \quad 58$



$\begin{cases} y^2+4x^2=\frac{16}{9} \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$

$3x^2=\frac{7}{9}$

$x^2=\frac{7}{27} \Rightarrow x=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{\frac{7}{3}} =$

$=\frac{\sqrt{21}}{9}$

$y=\frac{\sqrt{60}}{9}=\frac{2\sqrt{15}}{9}$

$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 9\cdot xy=\frac{\sqrt{15}\cdot\sqrt{21}}{9}=\frac{\sqrt{35}}{3}$

$\frac{60}{81}+\frac{84}{81}=$

$(x-a)^2+(\sqrt{5}y-\frac{3}{5}\sqrt{5}a)^2=0$

$(x-a)^2+(\sqrt{5}y-\frac{3}{5}\sqrt{5}a)^2=0{,}8a^2-2xy$

$2xy-0{,}8a^2=0$

$xy=0{,}4a^2;\ x=a,\ y=\frac{3}{5}a$

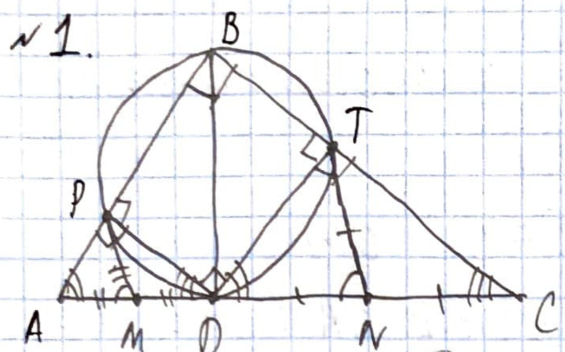
$2a^3-2a^2x-6a^2y+ax^2+2axy+5ay^2=0$

$ax^2+4a^2x-ay+4a^3+2=0$

$6a^2x+(6a^2-a)y+2a^3+2-2axy$

Чистовик - 1.

№1.



Дано:

ABC - треугольник

$D \in AC$

BD - диаметр; $BD = \frac{4}{3}$

$AM = MD$

$DN = NC$

$PM \parallel TN$

$PM = \frac{1}{2}$; $TN = 1$

Найти:

$\angle ABC = ?$

$S_{ABC} = ?$

Решение:

Т.к. BD - диаметр, а точки P и T лежат на окружности, то $\angle DPB = \angle DTB = 90°$ как углы, опирающиеся на диаметр.

$\angle APD = 180° - \angle DPB = 90°$; $\angle DTC = 180° - \angle DTB = 90° \Rightarrow \triangle APD$ и $\triangle DTC$ прямоугольные. Медиана, проведённая в прямоугольном треугольнике из вершины прямого угла равна половине гипотенузы $\Rightarrow AM = MD = PM = \frac{1}{2}$; $DN = NC = TN = 1$.

Т.к $PM \parallel TN$, а AC - секущая, то $\angle AMP = \angle DNT$ как соответственные. $\triangle AMP$ и $\triangle DNT$ - равнобедренные треугольники с равным углом против основания

$\triangle AMP \sim \triangle DNT$ по 2 сторонам и углу между ними:

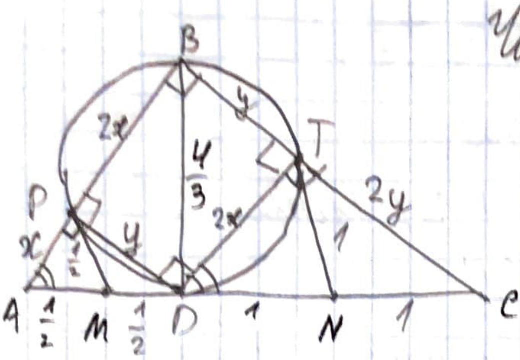
1) $\angle AMP = \angle DNT$

2) $\frac{AM}{DN} = \frac{PM}{NT}$ т.к. $AM = PM$; $DN = NT$. Значит $\angle PAM = \angle TDN$

Аналогично доказывается, что $\triangle PMD \sim \triangle TNC$ и $\angle TCN = \angle PDM$. $\angle PAM + \angle PDM = 90°$ т.к. $\angle APD = 90°$; $\angle TDN = \angle PDM$.

Значит $\angle PDT = 180° - \angle PDM - \angle TDN = 90°$. Четырехугольник BPDT вписан в окружность $\Rightarrow$ сумма противолежащих углов равна $180°$, $\angle PDT = 90° \Rightarrow \angle ABC = 90°$

Чистовик-2.



Фигура BPDT – прямоугольник $\Rightarrow$

$PD = BT$ и $PB = DT$

Пусть $AP = x$; $PD = y$. Тогда

$DT = 2x$ и $TC = 2y$ (т.к. $\triangle APD \sim \triangle DTC$, ~~КПА~~ по 2-ум углам, $k = \frac{DC}{AD} = \frac{2}{1} = 2$). Отсюда следует система из 2-ух т. Пифагора для $\triangle APD$ и $\triangle BDT$:

$$\begin{cases} y^2 + 4x^2 = \frac{16}{9} \\ y^2 + x^2 = 1 \end{cases} \qquad 3x^2 = \frac{7}{9} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{21}}{9}; \; y = \sqrt{1 - x^2} = \frac{2\sqrt{15}}{9}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot 3y = \sqrt{21} \cdot \frac{\sqrt{15}}{9} = \frac{\sqrt{35}}{3}$$

Ответ: $\angle ABC = 90°$; $S_{ABC} = \frac{\sqrt{35}}{3}$

Чистовик-3

№2.

$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+3=2\sqrt{4+3x-x^2}$ $\quad (x+1)(4-x)=4+3x-x^2$

$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}=2\sqrt{4+3x-x^2}-3 \ |^2$ $\quad x\in[-1;4]$

$x+1+4-x-2\sqrt{4+3x-x^2}=16+12x-4x^2+9-12\sqrt{4+3x-x^2} \ |:2$

$5\sqrt{4+3x-x^2}=10+6x-2x^2$

Замена $t=3x-x^2$

$5\sqrt{4+t}=10+2t \ |^2$

$100+25t=100+40t+4t^2$

$4t^2-15t=0 \Rightarrow t(4t-15)=0$

1) $t=0$

В.к.з

$3x-x^2=0 \Rightarrow x=0;3$ Проверим корни

$\sqrt{0+1}-\sqrt{4-0}+3=2\sqrt{4+3\cdot 0-0^2}$

$1-2+3=4$

$2\neq 4 \Rightarrow x\neq 0$

$\sqrt{3+1}-\sqrt{4-3}+3=2\sqrt{4+3\cdot 3-3^2}$

$2-1+3=4$

$4=4 \Rightarrow x=3$

2) $t=\frac{15}{4}$

$3x-x^2=\frac{15}{4} \Rightarrow x^2-3x+\frac{15}{4}=0 \quad D<0 \Rightarrow x=\varnothing$

Ответ: $x=3$.

Чистовик-4.

№3.

1) $a=0$. В этом случае $ax^2+4a^2x-ay+4a^3+2=0$ – не парабола $\Rightarrow a\neq 0$

2) $a\neq 0$. В этом случае координаты вершины B будут иметь вид:

$x=\frac{-4a^2}{2a}=-2a$; $4a^3-4a^3-ay+4a^3+2=0 \Rightarrow y=4a^2+\frac{2}{a}$

Т.е. $B\left(-2a; 4a^2+\frac{2}{a}\right)$

Уравнением точки является уравнение окружности с радиусом 0. Преобразуем первое уравнение

$x^2+2xy+5y^2+2a^2-2ax-6ay=(x-a)^2+\left(\sqrt{5}y-\frac{3\sqrt{5}}{5}a\right)^2+2xy-$
$-\frac{4}{5}a^2=0$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006355**

ID профиля: **131580**

Вариант 12

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \dfrac{5}{4} \\ 2x^4 + 2y^4 + 5x^2y^2 = \dfrac{9}{4} \end{cases}$$

$a = x^2y^2$; $b = x^2+y^2$, $x^4+y^4 = b^2 - 2a$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{b} + a = \dfrac{5}{4} \\ 2b^2 - 4a + 5a = \dfrac{9}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{b} + a = \dfrac{5}{4} \\ 2b^2 + a = \dfrac{9}{4} \end{cases}$$

$2b^2 - \dfrac{1}{b} - 1 = 0 \mid \cdot b$

$2b^3 - b - 1 = 0$

$(b-1)(2b^2+2b+1) = 0$

$D<0 \Rightarrow b = 1$

$a = \dfrac{1}{4}$

В.К.3

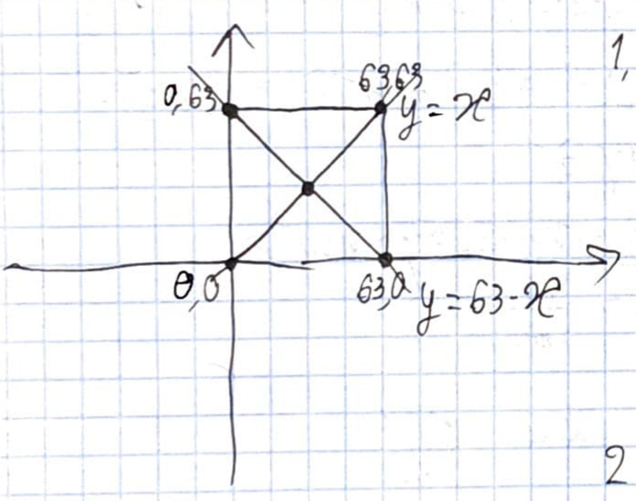
$$\begin{cases} x^2y^2 = \dfrac{1}{4} \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 = \dfrac{1}{4y^2} \\ \dfrac{1}{4y^2} + y^2 = 1 \mid \cdot 4y^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} -\,\|\,- \\ 4y^4 - 4y^2 + 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -\,\|\,- \\ (2y^2-1)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

62^2

$$\begin{array}{r} \times\ 62 \\ 62 \\ \hline 124 \\ 372\ \ \\ \hline 3844 \end{array}$$

$3844 - 123 = 3721$

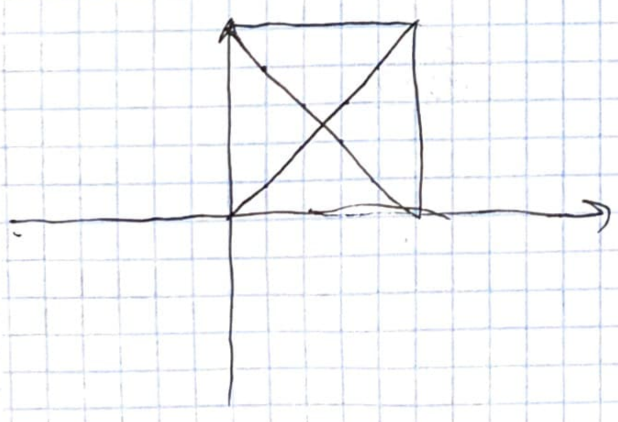


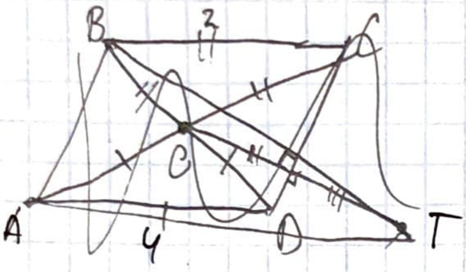
$1, 2, 3 \ldots, 62$

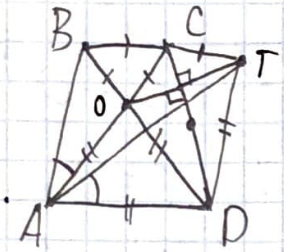
62^2

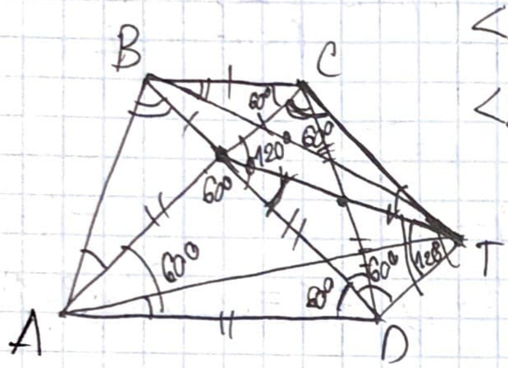
$$\begin{array}{r} \times\ 124 \\ 3600 \\ \hline 744 \\ 372\ \ \\ +\ 446400 \\ 7502 \\ \hline 453902 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\ 62 \\ 121 \\ \hline 62 \\ 124\ \ \\ 62\ \ \ \ \\ \hline 7502 \end{array}$$

$2 \cdot 62 = 124$





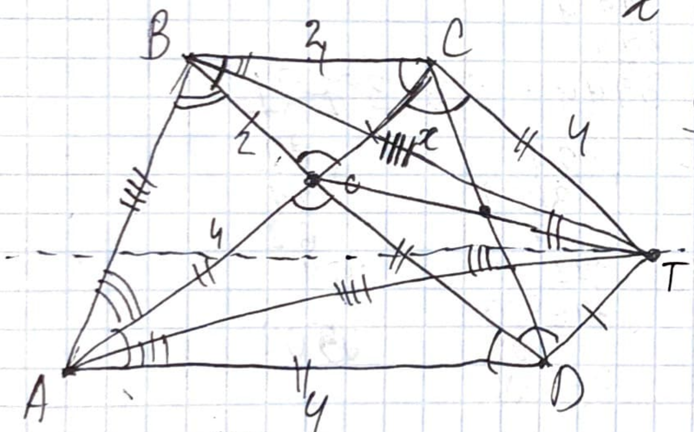




$\angle ABC = \angle BCD$

$\angle BCD = 60^\circ$

$\angle DOT + \angle DTO = 120^\circ$



$x^2 = 4 + 16 - 16 \cdot \cos 120^\circ \Rightarrow x = 2\sqrt{3}$

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \sin 120^\circ + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$

$S_{ABT} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sin 60^\circ = 3\sqrt{3} \Rightarrow \frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{3}$

122

$62^2 - 2 \cdot 61 - 1$

62×62

124

372

$3844 - 123 = 3721$

3600

$\times$ 124

14400

72

36

446400

$+$ 7502

453902

~~124~~

121

$\times$ 62

242

726

7502

Чистовик - 1.

№4

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2}+x^2y^2=\frac{5}{4} \\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2=\frac{9}{4} \end{cases}$$

Замена $a=x^2y^2$; $b=x^2+y^2 \Rightarrow x^4+y^4=b^2-2a$

$$\begin{cases} \frac{1}{b}+a=\frac{5}{4} \\ 2b^2-4a+5a=\frac{9}{4} \end{cases}$$

$2b^2-\frac{1}{b}=1 \quad |\cdot b;\ b\neq 0$

$2b^3-b-1=0$

$(b-1)(2b^2+2b+1)=0 \Rightarrow b=1$

$D<0$

$\frac{1}{1}+a=\frac{5}{4} \Rightarrow a=\frac{1}{4}$

В.к.з.

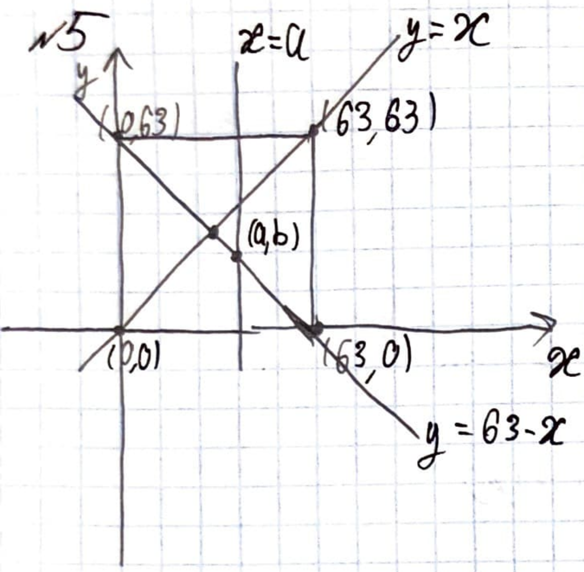
$$\begin{cases} x^2y^2=\frac{1}{4};\ x,y\neq 0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2=\frac{1}{4y^2} \\ \frac{1}{4y^2}+y^2=1 \quad |\cdot 4y^2 \end{cases} \quad \begin{cases} -\|- \\ 4y^4-4y^2+1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} -\|- \\ (2y^2-1)^2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Чистовик-2.

№5



Т.к. сторона квадрата нечётная, то диагонали (а таковыми являются прямые $y=63-x$ и $y=x$) пересекутся не в узле, а в центре клетки. Узлы могут быть выбраны только внутри квадрата, и будут иметь координаты $(a;b)$, где $0<a<63$; $0<b<63$ => значений a и b поровну и 62. Для точки $(a;b)$ рассмотрим прямую $x=a$. Внутри квадрата на ней лежат 62 точки, одна из которых занята (наша $(a;b)$) => для выполнения условия нельзя брать 61 оставшуюся точку на этой прямой (иначе два узла будут лежать на прямой, параллельной оси Oy). Для прямой $y=b$ случай аналогичен. А это значит, что если мы берём первую точку на одной из прямых $y=x$ или $y=63-x$, то в качестве второй точки мы можем взять любую из $62^2-2\cdot61-1=3721$ точек. Из этих точек на одной из прямых $y=x$ и $y=63-x$ лежат $2\cdot62-3$ (среди этих трёх наша $(a;b)$, и точки $(63-a;b)$ и $(a;63-b)$, всего же внутри квадрата на прямых $y=x$ и $y=63-x$ лежат по 62 точки на каждой), т.е. 121 точка. Соберём всё воедино. Первую точку $(a;b)$ мы выберем на одной из прямых $y=x$ или $y=63-x$, можем мы это сделать

Чистовик-3

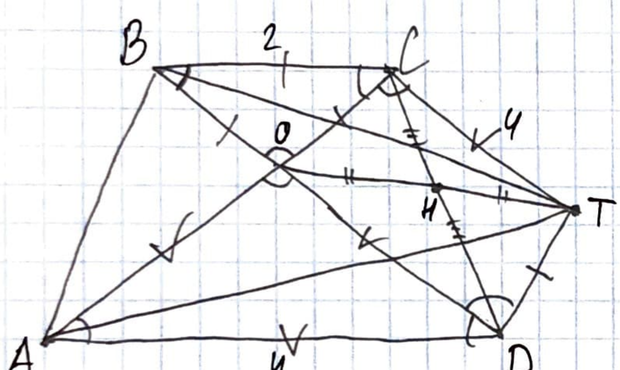
ровно $2 \cdot 62 = 124$ способами. Вторую же точку мы выбираем среди 3721 оставшейся возможной точки, но при этом нужно учесть, что если обе точки лежат на прямых $y = x$ или $y = 63 - x$ (не важно, на одной или на разных), то такие случаи будут посчитаны дважды. Итого:

$124 \cdot (3721 - 121) + \frac{124 \cdot 121}{2} = 453902$ способа.

Ответ: 453902.

№6 Чистовик - 4.

Перед тем как рисовать четырёхугольник, определимся какой он. $\angle CBO = \angle ODA = \angle OAD = \angle BCO = 60^\circ \Rightarrow$ $BC \parallel AD$, а диагонали - секущие. При этом диагонали равны, ведь точкой пересечения делятся на равные отрезки. Значит это или квадрат, или прямоугольник, или равнобокая трапеция. Но т.к. противоположные основания не равны, будем считать, что это трапеция (в принципе для доказательства первого пункта это неважно)



Рассмотрим фигуру OCTD: $OH = HT$ (условие симметричности относительно центра CD) $CH = HD$ (H - центр CD). Значит диагонали точкой пересечения делятся пополам $\Rightarrow$ OCTD - параллелограмм. $\angle COD =$ $= 180^\circ - \angle BOC = 120^\circ \Rightarrow \angle OCT = 180^\circ - \angle COD = 60^\circ$. Значит $\angle BCT = 120^\circ$. Аналогично доказываем, что $\angle ADT = 120^\circ$

Т.к. OCDT - параллелограмм, то $OC = DT$ и $CT = OD$.

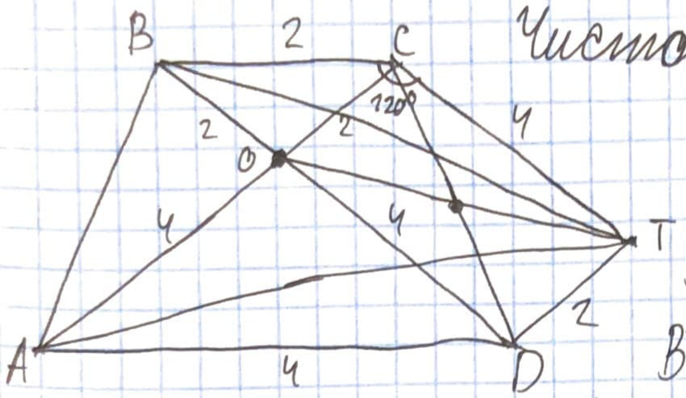
Рассмотрим $\triangle BOA$, $\triangle BCT$ и $\triangle TDA$:

1) $\angle BOA = \angle BCT = \angle TDA = 120^\circ$ ($\angle BOA = 180^\circ - \angle BOC$)

2) $BO = BC = TD$ (как стороны правильного треугольника и равные этим сторонам отрезки)

3) $AO = TC = AD$ (аналогично п.2) $\Rightarrow \triangle BOA = \triangle BCT = \triangle TDA$ по 2 сторонам и углу между ними $\Rightarrow AB = BT = AT$ и $\triangle ABT$ правильный.

Чистовик-5.



Из прошлого пункта $\angle BCT = 120^\circ$, $BC = 2$ и $CT = OD = 4$

По т. косинусов:

$BT^2 = 4 + 16 - 16\cos 120^\circ = 28 \Rightarrow$

$\Rightarrow BT = 2\sqrt{7}$. $S_{ABT} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{7} \cdot 2\sqrt{7} \cdot \sin 60^\circ = 7\sqrt{3}$

$S_{ABCD} = 2S_{ABO} + S_{BOC} + S_{AOD}$ ($\triangle ABO = \triangle DCO$ по 2 сторонам и углу)

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sin 60^\circ + 2 \cdot 4 \cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3} =$

$= 9\sqrt{3}$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{7}{9}$

Ответ: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{7}{9}$