Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211006337**

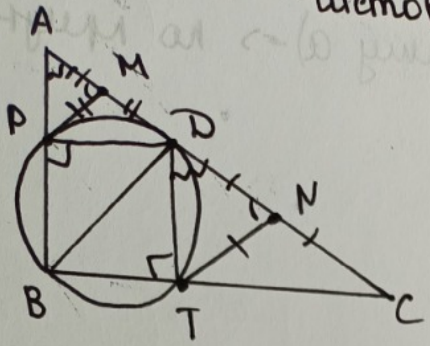
ID профиля: **303943**

Вариант 12

Чистовик

N 1

1



а) т.к. BD – диаметр окружности $\Rightarrow \angle BTD = 90°$; $\angle BPD = 90°$ (по свойству окружности). Тогда $\triangle DTC$ – прямоугольный, т.к. в нем угол T смежный с углом 90°. Аналогично $\triangle APD$ – прямоугольный. По свойству прямоугольного треугольника медиана равна $\frac{1}{2}$ гипотенузы $\Rightarrow PM = AM = MD$; $TN = ND = NC$ (т.к. по условию M – середина AD; N – середина DC)

т.к. $PM \parallel TN \Rightarrow \angle PMA = \angle TND$, как соотв. при $PM \parallel TN$; AC – секущая.

Заметим, что в $\triangle APM$ и DTN:

$\angle AMP = \angle PNT$ (выше доказано)

$DN : NT = AM : MP = 1 : 1$

$\Rightarrow \triangle APM \sim \triangle DTN$ по 2м сторонам и углу между ними $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle TDN = \angle PAM$, как соответственные в подобных треуг-х

тогда $AB \parallel DT$ по признаку ($\angle TDN = \angle PAM$ (соответств.); AC – секущая) $\Rightarrow$ по свойству $\parallel$ прямых $\angle PBT + \angle DTB$ (односторонние при $PB \parallel DT$; BC – секущая) $= 180°$; $\angle DTB = 90° \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle PBT = 180° - 90° = 90°$ – искомый

Ответ: 90°

чистовик

(2)

б) в $BTDP$ $\angle B = 90°$ и ~~углы~~ $BP \parallel TD$ по пункту а) => по признаку это прямоугольник => $BT = PD$

т.к. $MP = \frac{1}{2}$; $MP = MA = MD = \frac{1}{2}$ (по п.а)

аналогично $DN = NC = NT = 1$

пусть $PD = BT = a$; $\angle TND = \angle PMA = \alpha \Rightarrow \angle PMD = 180° - \alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow \cos(\angle PMD) = -\cos\alpha$

тогда по теореме cos для $\triangle TND$:

$$DT^2 = 1 + 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos\alpha$$

$$DT = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 - a^2}$$, т.к. $\triangle BDT$ - прямоуг. по т. Пифаг.

$$\left(\frac{4}{3}\right)^2 - a^2 = 2 - 2\cos\alpha$$

по теореме cos для $\triangle PMD$:

$$PD^2 = 0{,}25 + 0{,}25 - 2 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}25 \cdot (-\cos\alpha)$$

$$\begin{cases} a^2 = 0{,}5 + 0{,}125\cos\alpha \\ \frac{16}{9} - a^2 = 2 - 2\cos\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2 = 0{,}5 + 0{,}125\cos\alpha \\ a^2 = 2\cos\alpha - \frac{2}{9} \end{cases}$$

приравняем: $\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\cos\alpha = 2\cos\alpha - \frac{2}{9}$

$$\frac{13}{18} = \frac{15}{8}\cos\alpha$$

$374 : 2 = 187$

$$\cos\alpha = \frac{13 \cdot \cancel{8}^{4}}{\cancel{18}_{9} \cdot 15} = \frac{52}{135}$$

№1 (продолж.) Чистовик 3

$$a^2 = \frac{1}{2} + \frac{52}{135\cdot 8} = \frac{1}{2} + \frac{13}{270} = \frac{148}{270} \to$$

$$\to a = \frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{30}}$$

тогда по теореме cos для ΔTNC ($\angle N = 180^\circ - \alpha$):

$$1 + 1 + 2\cdot 1\cdot 1 \cos\alpha = TC^2$$

$$2 + \frac{104}{135} = TC^2$$

$$TC = \sqrt{\frac{374}{135}} = \frac{\sqrt{374}}{3\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{748}}{3\sqrt{30}}$$

по теореме cos для ΔAPM:

$$AP^2 = 0{,}5 - 2\cdot 0{,}25\cdot 0{,}25\cos\alpha$$

$$AP^2 = \frac{1}{2} - \frac{1\cdot \cancel{52}^{13}}{\cancel{8}_{4}\cdot 135}$$

$$AP^2 = \frac{270-13}{4\cdot 135} = \frac{257}{4\cdot 135} \Rightarrow AP = \frac{\sqrt{257}}{2\sqrt{135}}$$

по т. Пифаг. для ΔBPD: $PB = \sqrt{\frac{16}{9} - \frac{148}{270}} = \sqrt{\frac{332}{270}} = \frac{\sqrt{332}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{135}} = \frac{\sqrt{664}}{2\sqrt{135}}$

$$S_{ABC} = \frac{AB\cdot BC}{2} = \frac{(BT+TC)(BP+AP)}{2} = \frac{(2\sqrt{7}+\sqrt{748})(\sqrt{664}+\sqrt{257})}{6\sqrt{30}\cdot\sqrt{135}}$$

Ответ: а) 90°

б) $\frac{(2\sqrt{7}+\sqrt{748})(\sqrt{664}+\sqrt{257})}{6\sqrt{4050}}$

Чистовик

(4)

№2 $\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{-x^2+3x+4}$

~~D(~~ область определение:

$\begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 4 \\ -x^2+3x+4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in [-1; 4]$

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} = 2\sqrt{x+1}\sqrt{4-x} - 3 \quad \uparrow^2$

~~$4(-x^2+3x+4$~~

$x+1+4-x-2\sqrt{x+1}\sqrt{4-x} = 4(-x^2+3x+4)+9-12\sqrt{x+1}\sqrt{4-x}$

$-10\sqrt{x+1}\sqrt{4-x}+4+4(-x^2+3x+4)$

пусть $\sqrt{x+1}\sqrt{4-x} = a$

$-10a+4+4a^2=0$

$4a^2-10a+4=0$ $\quad a=2 \Rightarrow \sqrt{x+1}\sqrt{4-x}=2$

$a_1 = \frac{1}{2}$ $\quad x_1=0$

$a_2 = 2$ $\quad x_2=3$

проверка: $\sqrt{1} - \sqrt{4} < 0 \Rightarrow$ не явл. реш.

$\sqrt{4} - \sqrt{1} > 0 \Rightarrow$ явл-ся реш-ем

$a=\frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{x+1}\sqrt{4-x}=2$ (т.к. при возведении в квадрат обе части д.б. одного знака)

$x_1 = +0{,}75+\sqrt{6}$ обе части ($\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}$ и $2\sqrt{x+1}\sqrt{4-x}$ одного знака)

$x_2 = +0{,}75-\sqrt{6}$, но тогда $\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}$ и $2\sqrt{x+1}\sqrt{4-x}$ не одного знака $\Rightarrow$ не явл-ся решением

Ответ: $\{3; \frac{3}{4}+\sqrt{6}\}$

Чистовик

N3 $2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0$

$x^2+(2y-2a)x+2a^2-6ay+5y^2=0$

квадратное относ. x:

$D=-(4a^2+16y^2-24ay)=0$ (т.к. в противном случае 0 или 2 реш-й, чего не может быть)

тогда $x=\dfrac{2a-2y+0}{2}=a-y$

~~аналогично квадратное относ. y:~~

подставим x:

$(a-y)^2+(2y-2a)(a-y)+2a^2-6ay+5y^2=0$

$a^2-y^2-4ay+5y^2=0$

$(a-2y)^2=0$

$y=\dfrac{a}{2} \Rightarrow x=a-\dfrac{a}{2}=\dfrac{a}{2}$

~~если Аa~~

B - вершина параболы: $ax^2+4a^2x-ay+4a^3+2=0$

$y=x^2+4ax+4a^2+\dfrac{2}{a}$

x верш. $=-2a$

y верш. $=\dfrac{2}{a}$

если A и B по одну сторону от $x+y=3$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_A+y_A>3\\x_B+y_B>3\end{cases}\\ \begin{cases}x_A+y_A<3\\x_B+y_B<3\end{cases}\end{array}\right.$$

211006337 (U303943 M1275974)

2. подставим найденные чистовик значение:

$$\begin{cases} \frac{2}{a} - 2a > 3 \\ a > 3 \end{cases} \quad (1) \qquad a \neq 0$$

$$\begin{cases} \frac{2}{a} - 2a < 3 \\ a < 3 \end{cases} \quad (2)$$

1) $a > 3 \Rightarrow$ можем умножить в $\frac{2}{a} - 2a > 3$ обе части на a

$2 - 2a^2 > 3a$

$2a^2 + 3a - 2 < 0$

$a \in (-2; \frac{1}{2})$, но т.к. $a > 3 \Rightarrow$ реш-й нет

2) $\frac{2}{a} - 2a < 3$

пусть $a > 0$ $(a \in (0;3))$:

$2 - 2a^2 - 3a < 0$

$2a^2 + 3a - 2 > 0$

$a \in (-\infty; -2) \cup (\frac{1}{2}; +\infty)$. т.к. $a < 3$ и $a > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a \in (\frac{1}{2}; 3)$

пусть $a \in (-\infty; 0)$:

$2a^2 + 3a - 2 < 0$

$a \in (-2; \frac{1}{2})$, т.к. $a < 0 \Rightarrow a \in (-2; 0)$

итого: $a \in (-2;0) \cup (\frac{1}{2}; 3)$

Ответ: $a \in (-2; 0) \cup (\frac{1}{2}; 3)$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006337**

ID профиля: **303943**

Вариант 12

чистовик

№4

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \\ 2x^4 + 2y^4 + 5x^2y^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

замена: пусть $x^2 = a$! $a \geq 0$
$y^2 = b$ $b \geq 0$

$$\begin{cases} \frac{1}{a+b} + ab = \frac{5}{4} \quad (1) \\ 2a^2+2b^2+5ab = \frac{9}{4} \quad (2) \end{cases}$$

$(2): 2(a+b)^2 + ab = \frac{9}{4}$

$(2)-(1): 2(a+b)^2 + \frac{1}{a+b} = 1$

пусть $a+b=m$; $m \geq 0$, т.к. a и $b \geq 0$

$2m^2 + \frac{1}{m} = 1 \; \Big| \cdot m$, $m \neq 0$ (т.к. иначе $a=0$ и $b=0 \Rightarrow x^2+y^2=0 \Rightarrow$ в исходном уравн-и деление на 0)

$2m^3 - m + 1 = 0$

$(m-1)(2m^2+2m+1) = 0$

- $m = 1$
- $2m^2+2m+1=0$
  $D<0 \Rightarrow$ решений нет

$a+b=1$
$x^2+y^2=1$ (обратная замена)

подставим в исходное:

$$\begin{cases} 1 + x^2y^2 = \frac{5}{4} \\ 2 + x^2y^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$ пусть $x^2y^2 = t$, $t \geq 0$

$$\begin{cases} 1+t = \frac{5}{4} \\ 2+t = \frac{9}{4} \end{cases} \Rightarrow t = \frac{1}{4}$$

чистовик

№4 $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2y^2=\frac{1}{4} \end{cases}$

пусть $x^2=a$ $\quad$! $a\geq 0$

$y^2=b$ $\quad$ $b\geq 0$

$\begin{cases} a+b=1 \\ ab=\frac{1}{4} \end{cases}$ $b=1-a$

$a(1-a)=\frac{1}{4}$

$a^2-a+\frac{1}{4}=0 \mid \cdot 4$

$4a^2-4a+1=0$

$(2a-1)^2=0$

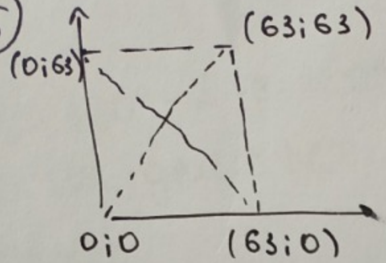
$a=0{,}5$

$x^2=0{,}5 \Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$y^2=1-x^2=\frac{1}{2} \Rightarrow y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

Ответ: $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right);\left(\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right);\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right);\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$

№5 **чистовик**



заметим, что точка не может лежать квадрата одновременно на 2х диагоналях, т.к. точка пересечения диагоналей не лепит на линиях сетки.

Всего внутри квадрата $62 \cdot 62$ узлов (не включая границу). $y = x$ и $y = 63 - x$ — это диагонали квадрата. На каждой из них внутри квадрата 62 узла. Расположим 1ю точку на какой-то прямой из двух данных. Это можно сделать $62 + 62 = 124$ способами.

Чтобы точки не лежали на прямой, параллельной координатным осям, их координаты $(x_1 и x_2; y_1 и y_2)$ не должны быть одинаковыми. Следовательно, вторую точку можно выбрать $(62 \cdot 62) - 61 - 61$ способами.

~~Таких~~ вариантов, когда обе точки лежат на диагоналях, $(62+62)(62+62-1) - (62+62)$ (вычитаем $62+62$, т.к. это кол-во случаев, когда точки лежат на прямой, параллельной осям координат). Эти варианты (обе точки на диагоналях, посчитали дважды => их нужно вычести)

Итого: $124(62 \cdot 62 - 61 - 61) - (62+62)(62+62-1) + (62+62) =$

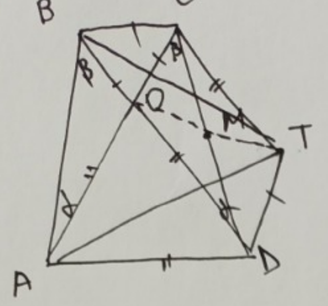
$= 455400$ способов

Ответ: 4554 00 способов.

№6

чистовик

пусть M - середина CD



а) $BO=OC=BC$
$AO=OD=DA$ по определению правильного Δ

т.к. T симметрично O относительно M =>

=> $OM=MT$; т.к. M - сер. CD => $CM=MD$; $\angle CMO=\angle TMD$, как вертикальные => $\Delta CMO=\Delta TMD$ по СУС => $TD=CO$, как соотв; $\angle OCM=\angle TDM$, как соотв.

аналогично $\Delta OMD=\Delta TMC$ => $OD=CT$, как соотв.; $\angle CDO=\angle MCT$, как соотв.

$\Delta COD=\Delta BOA$ по СУС ($CO=OB$; $AO=OD$; $\angle COD=\angle BOA$, как вертик.) =>

=> $\angle CDO=\angle BAO=\alpha$ | $\alpha+\beta=180^\circ-(180^\circ-60^\circ)=120^\circ$ по теореме о сумме углов в Δ, т.к. $\angle$ в правильном треугольнике 60°

$\angle OCD=\angle OBA=\beta$

∢ ΔTDA и ΔBOA: $TD=BO$ (транзит.)
$AD=OA$ (транзит.)
$\angle TDA=60^\circ+\alpha+\beta=120^\circ$
$\angle BOA=180^\circ-\alpha-\beta=120^\circ$
=> $\Delta TDA=\Delta BOA$ по СУС => $AB=TA$, как соотв.

∢ ΔTCB и ΔAOB:

$BC=BO$ (транзит.)
$AO=TC$ (транзит.)
$\angle BOA=120^\circ$
$\angle TCB=180^\circ-\alpha-\beta=120^\circ$ => $\Delta TCB=\Delta AOB$ по СУС => $AB=BT$, как соотв.

по транзитивн. $AB=BT=TA$ => ΔABT - правильный, ч.и.т.д.

211006337 (U303943 M1275975)

чистовик

б) $BC = 2 = DT$

$AD = 4 = CT$

т.к. $\angle DTC = 180^\circ - \alpha - \beta = 120^\circ$:

по теореме cos для $\triangle DCT$:

~~$CD^2 = 4 + 16 + 2 \cdot \frac{1}{2}$~~

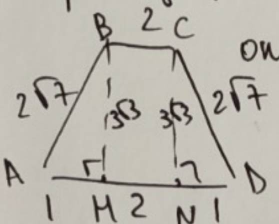
$CD^2 = 4 + 16 - 2 \cdot \cos 120 \cdot 4 \cdot 2$

$CD^2 = 20 + 8 \Rightarrow CD = 2\sqrt{7}$

$\triangle BOA = \triangle COD$ по п. а) $\Rightarrow BA = CD$

$\angle OBC = \angle ODA = 60^\circ$ (т.к. $\triangle BOC$ и $\triangle OAD$ - правильные) $\Rightarrow$

$\Rightarrow BC \parallel AD$ (BD - секущая) по признаку $\Rightarrow ABCD$ - равнобокая трапеция.



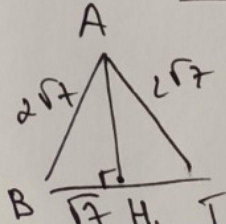
опустим высоты BH и CN

$\triangle ABH = \triangle CDN$ ($\angle ABH = \angle CDN$ по св-ву р/б трапеции; $CD = AB$; $BH = CN$, как высоты) $\Rightarrow ND = HA$, как соотв.

$BC = HN$ (т.к. $BHNC$ — пар-м по признаку; $BC = HN$; $BC \parallel HN$) $\Rightarrow AH = ND = \frac{4-2}{2} = 1$

$AB = CD = 2\sqrt{7} \Rightarrow BH = CN = 3\sqrt{3}$ (по теореме Пифагора)

$S_{ABCD} = \frac{(BC + AD)(BH)}{2} = 3 \cdot 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$



в $\triangle ABT$ (р/с) все стороны равны $2\sqrt{7}$

AH_1 - высота, является медианой и биссектр.

по св-ву р/с $\triangle \Rightarrow BH_1 = \sqrt{7} \Rightarrow AH_1 = \sqrt{14}$ по т. Пифагора $\Rightarrow$

$\Rightarrow S_{ABT} = \frac{2\sqrt{7} \cdot \sqrt{14}}{2} = 7\sqrt{2}$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{7\sqrt{2}}{2 \cdot 9\sqrt{3}} = \frac{7}{9\sqrt{6}} = \frac{7\sqrt{6}}{54}$ Ответ: $\frac{7\sqrt{6}}{54}$