Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211006332**

ID профиля: **847151**

Вариант 12

Чистовик.

Задача №2

ОДЗ:

$4+3x-x^2\ge 0$

$x\in[-1;4]$

$x+1\ge 0 \quad x\ge -1$ } сходится

$4-x\ge 0 \quad x\le 4$

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+3=2\sqrt{4+3x-x^2}$$

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}=2\sqrt{4+3x-x^2}-3 \quad | \text{возведём в квадрат}$$

$$x+1+4-x-2\sqrt{(x+1)(4-x)}=4(4+3x-x^2)+9-12\sqrt{4+3x-x^2}$$

$$10\sqrt{(x+1)(4-x)}=4(\underbrace{4+3x-x^2}_{(x+1)(4-x)})+4$$

Пусть $\sqrt{(x+1)(4-x)}=t$

$t>0$

$$10t=4t^2+4$$

$$4t^2-10t+4=0$$

$$2t^2-5t+2=0$$

$$D=25-16=9$$

$$t_{1;2}=\frac{5\pm 3}{4}=2;\ \frac{1}{2}.$$

1) случай:

$$\sqrt{(x+1)(4-x)}=2$$

$$(x+1)(4-x)=4$$

$$-x^2+3x+4=4$$

$$x(-x+3)=0$$

$$x=0 \text{ или } x=3$$

$x=0$ при подстановки не подходит

$x=3$ подходит при подстановки

2) случай

$$\sqrt{(x+1)(4-x)}=\frac{1}{2}$$

$$-x^2+3x+4=\frac{1}{4}$$

$$-4x^2+12x+16=1$$

$$-4x^2+12x+15=0$$

$$4x^2-12x-15=0$$

$$D=144+16\cdot 15=\cancel{240}$$

$$=384$$

$$x_{1;2}=\frac{12\pm 8\sqrt{6}}{8}=$$

$$x_{1;2}=\frac{3\pm 4\sqrt{6}}{4}$$

$x=\frac{3-4\sqrt{6}}{4}$ ${}^{>8}$ — не подходит по ОДЗ, тк выражение $x<-1$

и $x=\frac{3+4\sqrt{6}}{4}$ — не подходит, тк $x>4$

Ответ: $x=3$; $\cancel{x=\frac{3+4\sqrt{6}}{4}}$

1

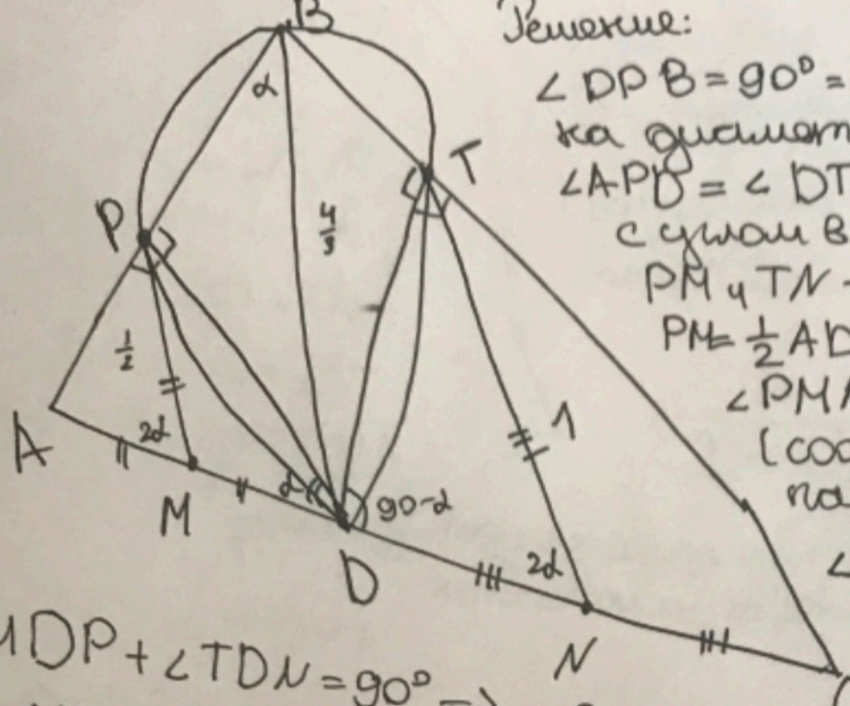
211006332 (U847151 M1277584)

Задача № 1

Чистовик

Ответ: а) 90° б) 2

Решение:



$\angle DPB = 90^\circ = \angle DTB$ (опираются на диаметр) $\Rightarrow$

$\angle APD = \angle DTC = 90^\circ$ (смежные с углом в 90°) $\Rightarrow$

PM и TN — медианы прямоугол Δ.

$PM = \frac{1}{2}AD$ и $TN = \frac{1}{2}DC$

$\angle PMA = \angle TND = 2\alpha$

(соответственные углы парал. прямых)

$\angle TDN = 90 - \alpha$

(у равнобед ΔTND)

и

$\angle PDM = \alpha$

(у равнобед. ΔPMD)

$\angle MDP + \angle TDN = 90^\circ \Rightarrow \angle PDT = 90^\circ$,

а $\angle ABC + \angle PDT = 180^\circ$

(вписанный 4-угольник) $\Rightarrow$ $\angle ABC = 90^\circ$

б) $AC = AD + DC = 3$

$AD = 2PM = 1$ $DC = 2TN = 2$

$\angle ADP = \angle ABD = \alpha$ (угол между касательной и хордой (AD — касательная к окружности, т.к.

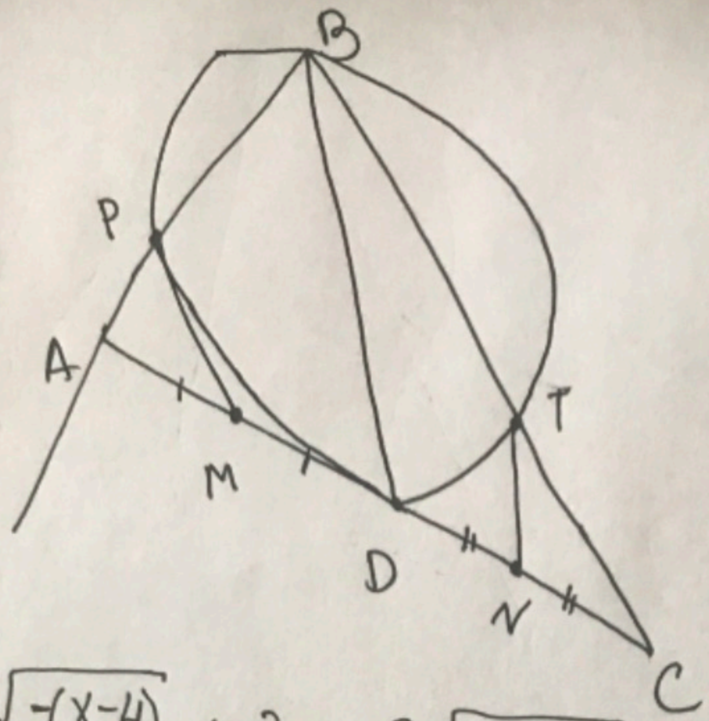
Если бы окружность пересекала AC в какой-то точке, то пересекала бы AB или AC в продолжении сторон, но BD — диаметр т.е. наибольший отрезок в окружности) $\Rightarrow$ $\angle BDD = 90 - \alpha$ и $\angle ADB = 90^\circ \Rightarrow$

BD — высота ΔABC

$S = AC \cdot BD \cdot \frac{1}{2} = 2$

ZBD

2



$$\sqrt{x+1} - \sqrt{-(x-4)} + 3 = 2\sqrt{(x+1)(x-4)}$$

$\sqrt{x+1} = t$
$\sqrt{x-4} = k$

$$t - \sqrt{-1}$$

$$\sqrt{x+1} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2} + \sqrt{4-x}$$

$$x+1+3+6\sqrt{x+1} = 4(4+3x-x^2) + 4 - x + 4\sqrt{4+3x-x^2}\cdot\sqrt{4-x}$$

$$2x + 6\sqrt{x+1} = 16+12x-4x^2$$

$$x + 3\sqrt{x+1} = 8 + 6x - 2x^2 + 2\sqrt{(x+1)(4-x)^2}$$

~~kAl~~

$$\cancel{t - k + 3 = 2tk}$$

$$\cancel{t + 3 = k(2t+1)}$$

$$x+3\sqrt{x+1} = 8+6x-2x^2+2(4-x)\sqrt{x+1}$$

$$(8-2x)\sqrt{x+1}$$

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$

$-x^2+3x+4 \geq 0$

$D = 9+16 = 25$

$x_{1;2} = \frac{-3 \pm 5}{-2} = 4; -1$

$x+1 \geq 0$

$x \geq -1$

$4-x \geq 0$

$4 \geq x$

$x \in [-1; 4]$

$-(x+1)(x-4)$

$(a-b+c)(a-b+c) =$

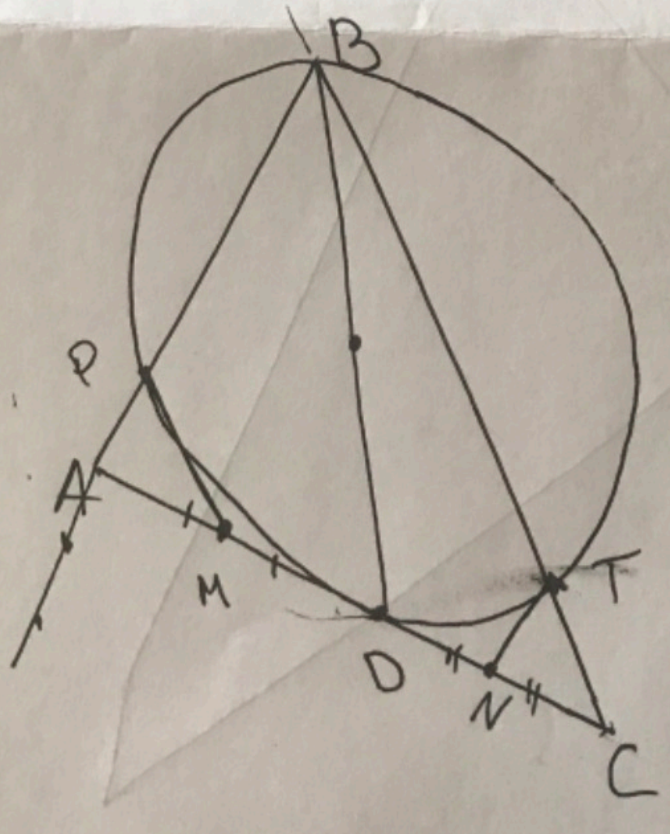
$a^2+b^2+c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$

$x + \underbrace{1+4}_{5} - x + 9 \quad - 2\sqrt{x+1}\sqrt{4-x} + 6\sqrt{x+1} - 6\sqrt{4-x}$

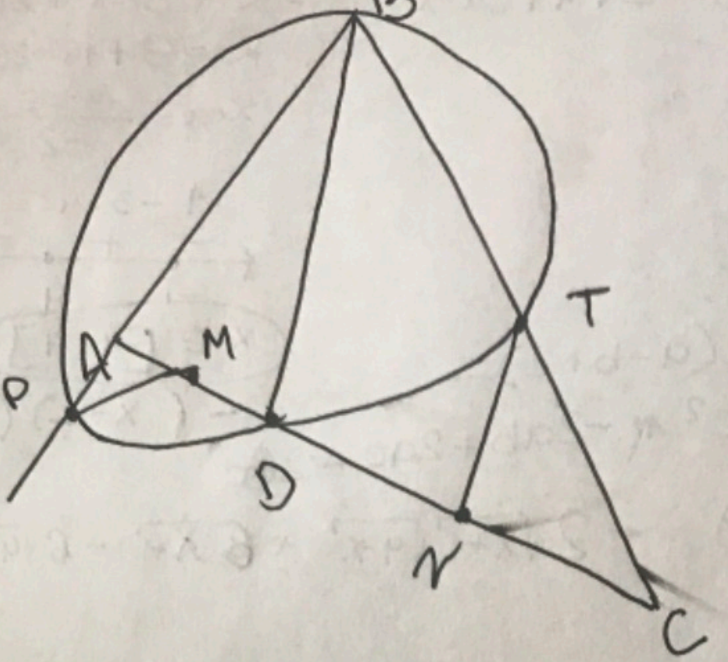
$5+9=14$

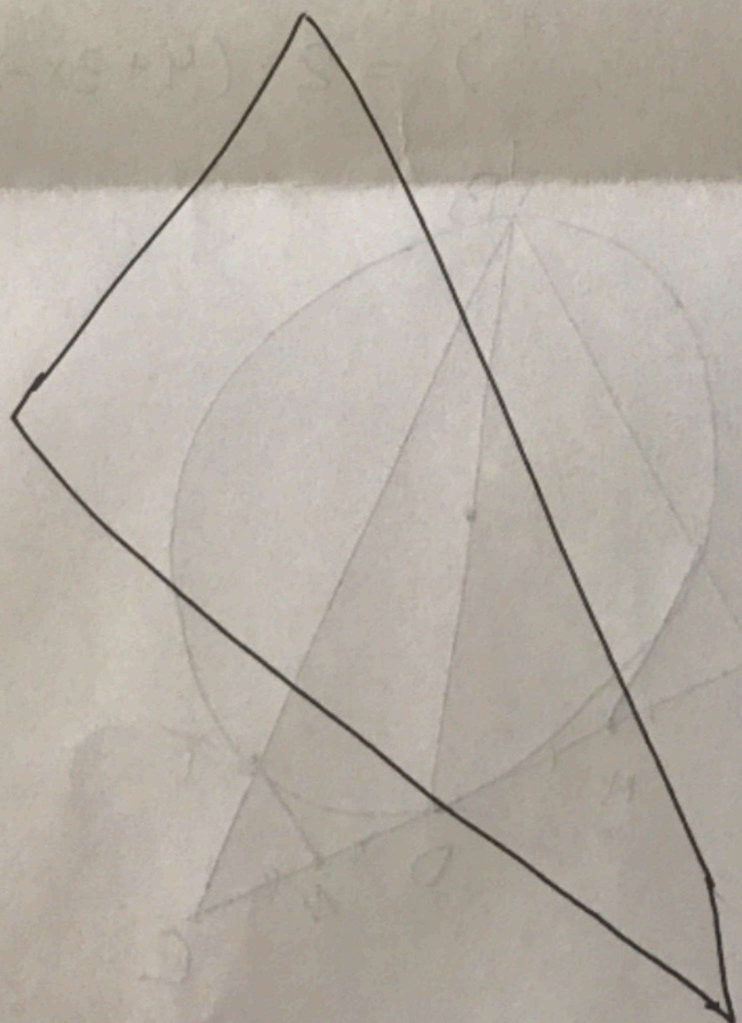
$14 \quad - 2(\sqrt{x+1}\sqrt{4-x} - 3\sqrt{x+1} + 3\sqrt{4-x}) = 4 \cdot (4+3x-x^2)$

$7 \quad - (\qquad\qquad) = 2 \cdot (4+3x-x^2)$

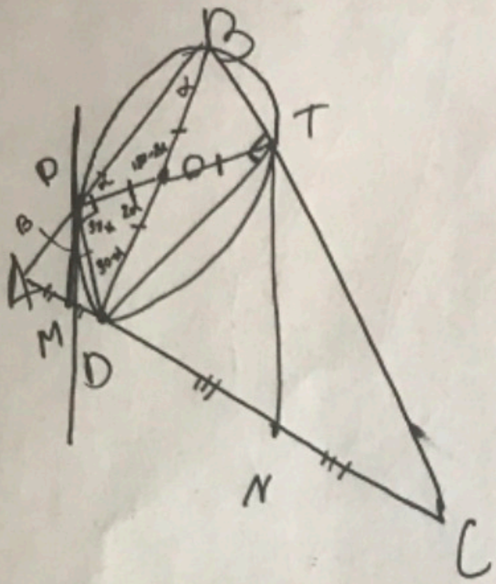


211006332 (U847151 M1277584)


B
T
M
A
P
D
N
C



$$2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0$$



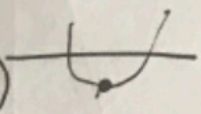
$$ax^2+4a^2x-ay+4a^3+2=0$$

$\cancel{\div 4a^2}$

$$y=x^2+4ax+4a^2+\frac{2}{a}$$

$$x=\frac{-4a}{2}=-2a$$

$$y=4a^2-8a^2+4a^2=\frac{2}{a}.$$

$\left(-2a;\frac{2}{a}\right)$ 

$y=3-x$

$3+2a \quad \frac{2}{a}$

$\left(a>\frac{1}{2}\right)$ $\quad 3+2a>\frac{2}{a}$

$a\in(-2;0)$ $\quad 3a+2a^2>2$

$2a^2$ $\quad a>0$

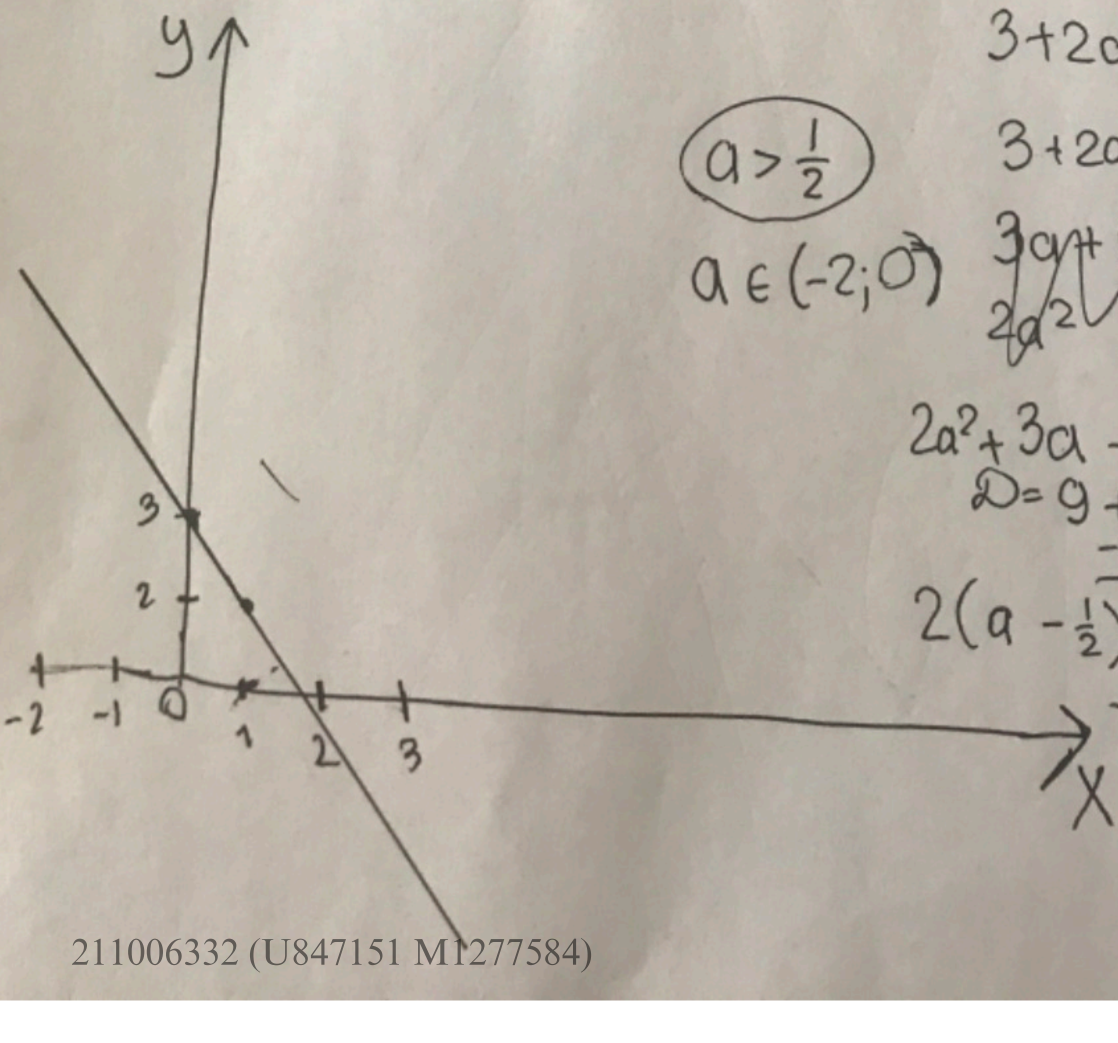
$$2a^2+3a-2>0$$

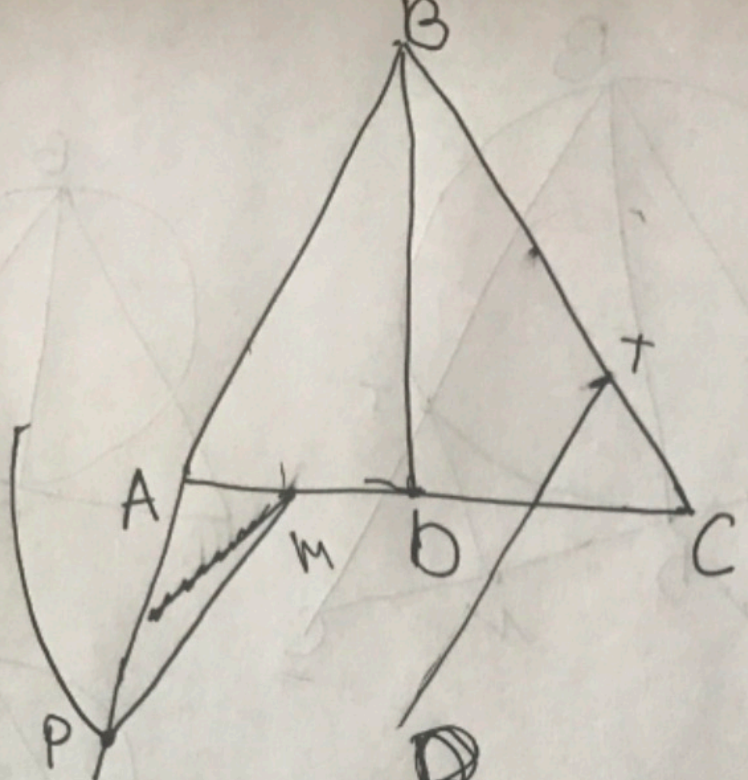
$$D=9+16=25$$

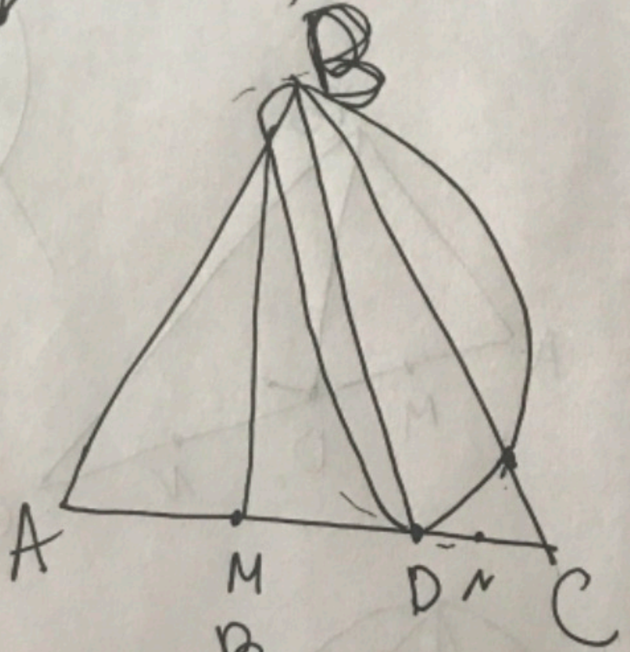
$$\frac{-3\pm5}{4}=\frac{1}{2};-2$$

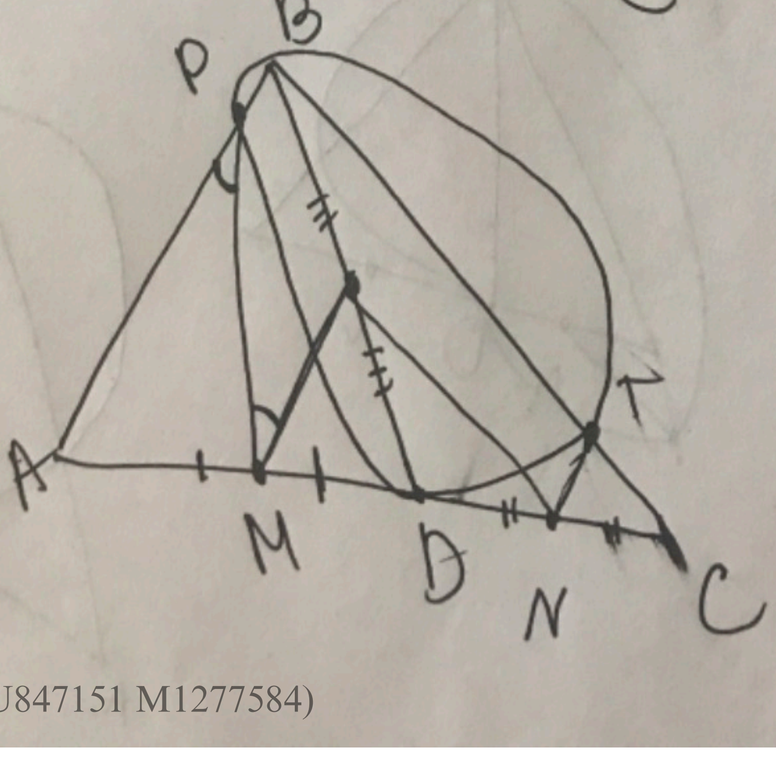
$$2\left(a-\frac{1}{2}\right)(a+2)>0$$

$-2 \quad \frac{1}{2}$

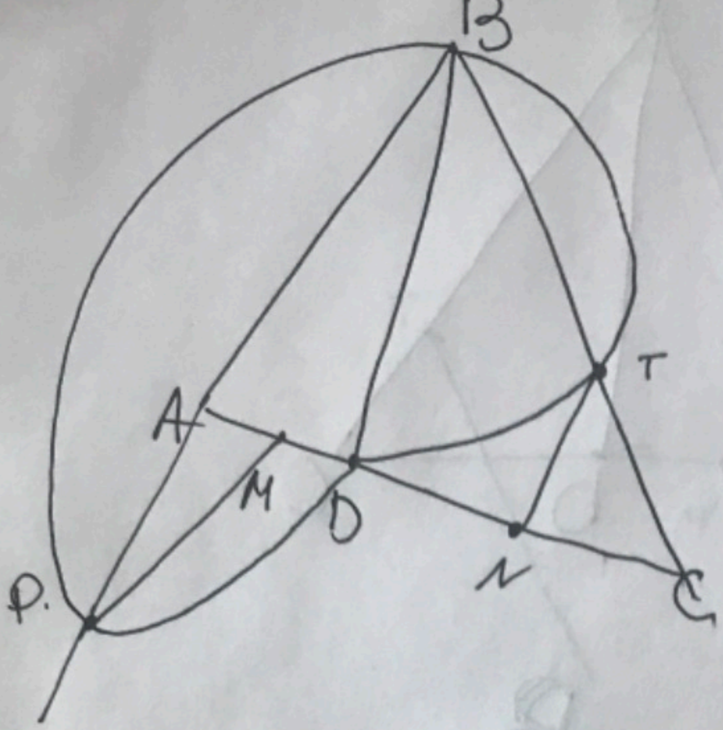


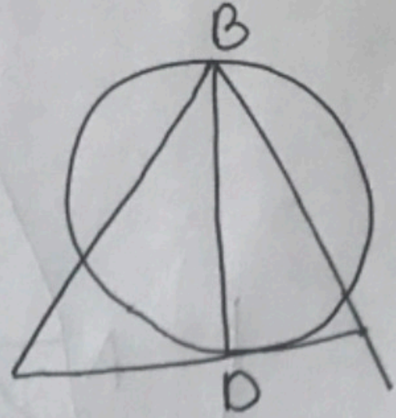


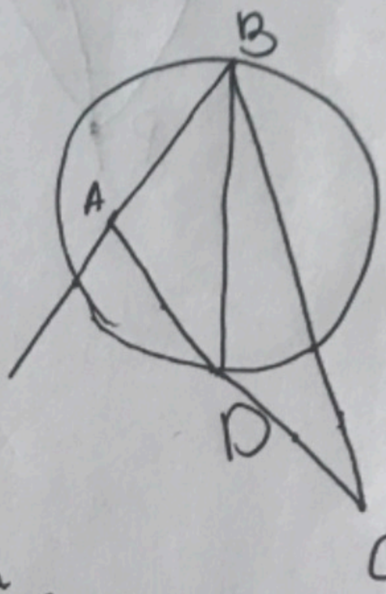


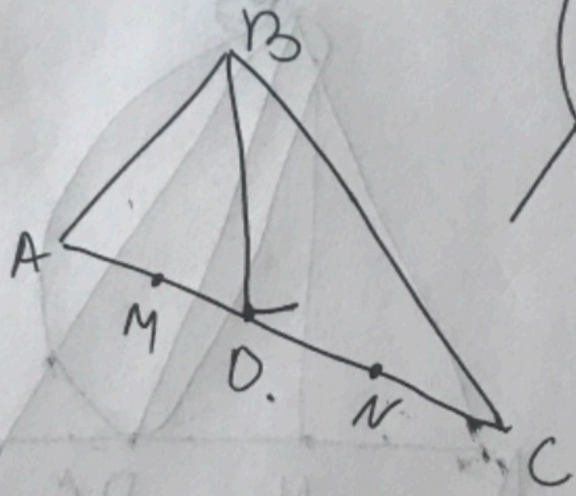


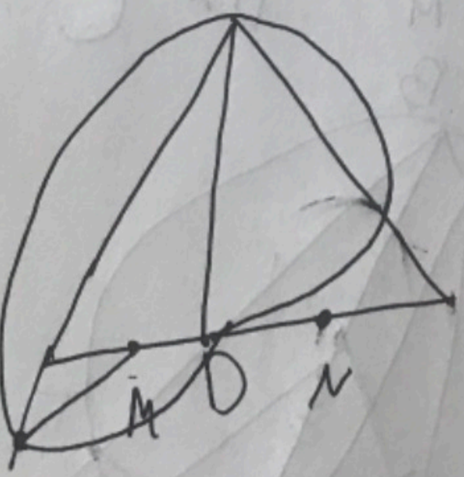
211006332 (U847151 M1277584)

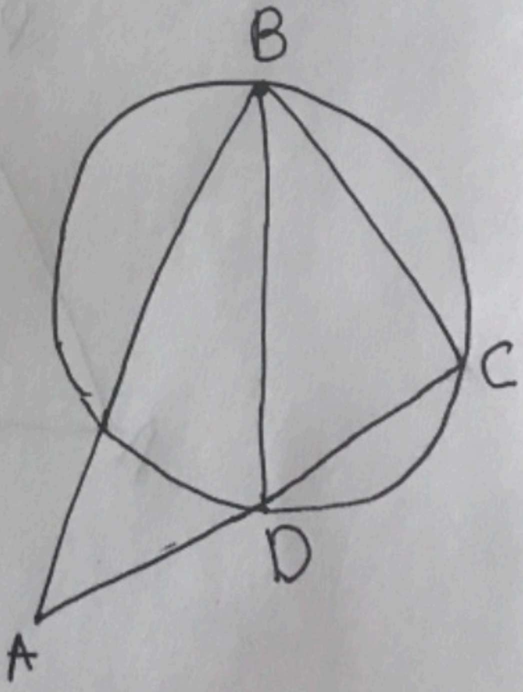

B
T
A
M
D
N
C
P.

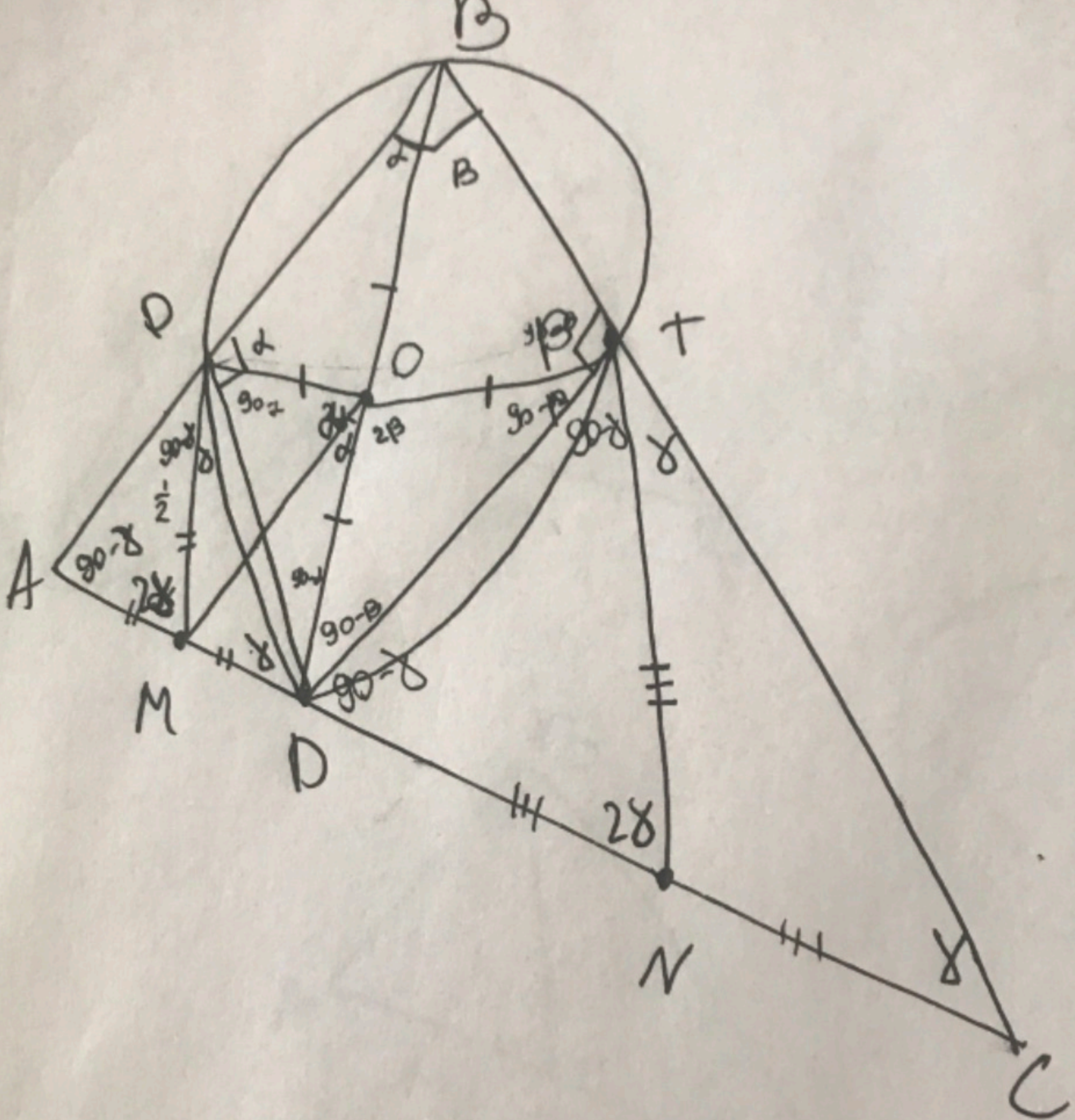

B
D


B
A
D
C


B
A
M
D.
N
C


M
D
N


B
C
D
A



211006332 (U847151 M1277584)

$x+3\sqrt{x+1} = 8+6x-2x^2+(8-2x)\sqrt{x+1}$

$2x^2-5x-8=(5-2x)\sqrt{x+1}$

$x+1+4-x+9-2\sqrt{x+1}\sqrt{4-x}-6\sqrt{4-x}+6\sqrt{x+1}=$

$4(4+3x-x^2)$

$7-\sqrt{4-3x-x^2}-3\sqrt{4-x}+3\sqrt{x+1}=2(4+3x-x^2)$

$7-t\cdot k \quad -3k+3t=2t^2k^2$

$-k\cancel{(t+3)}$

$\cancel{3-\sqrt{3}=2}$

$-96|4$
$8 \quad 24$
16

$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}=2\sqrt{4+3x-x^2}-3$

$-384|4$
$36 \quad 96$
24

$4^2\cdot 6\cdot 4$

$x+1+4-x-2\sqrt{x+1}\sqrt{4-x}=4(4+3x-x^2)+9$

$\sqrt{4+3x-x^2}=2$

$10\sqrt{4+3x-x^2}=4(4+3x-x^2+1)$

$-12\sqrt{4}$

64
$\times 6$
384

$10t=4t^2+4 \quad t>0$

$4t^2-10t+4=0$

$D=100-4\cdot4\cdot4=36$

16
$\times 4$
64

$1-2+3$

$\overset{11}{2}$

$2-\overset{4}{1}+3$

$t_{1;2}=\frac{10\pm6}{8}=2;\ \frac{1}{2}$

18
$\times 18$
144
$+18$
24024
$+144$
384

$1-2+3=2$

$3\cdot 8$

$\frac{3}{4}=\overset{11}{2}$

$\cdot 4$

$4+9-9$

16
$\times 15$
80
$+16$
240

211006332 (U847151 M1277584)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006332**

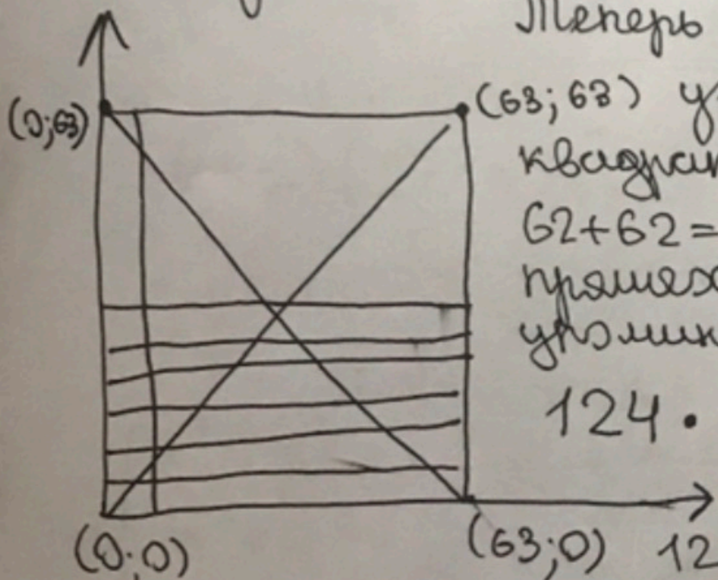
ID профиля: **847151**

Вариант 12

Задача №5 Чистовик.

Поймём, что узлы имеют целочисленные координаты и наши прямые $y=x$ и $y=63-x$ проходят в узле, если взять целое X.

Заметим, что прямые пересекаются не в узле, т.к. $x=63-x$ $x=\frac{63}{2}$ − координата не целая, т.е. на любой прямой $y=K$, где K − целое число от 1 до 62 у нас есть 2 узла, через которые проходят эти прямые



Теперь начнём считать, всего узловых клеток внутри квадрата 62^2, из которых $62+62=124$ лежат на этих прямых (по 2 на прямую $y=k$ из упоминания выше)

$124\cdot(62^2-61-61)$, где 124 − выбрать точку, лежащую на какой-то прямой, $62^2-61-61$ − кол-во точек, которые не будут лежать на прямой, парал. осям координат. Но тут мы посчитали дважды когда обе точки лежат на прямых $y=x$ и $y=63-x$ вычтем этот случай и он равен $\frac{124\cdot121}{2}$

121, тк не наша точка и не 2, которые лежат на парал. осях

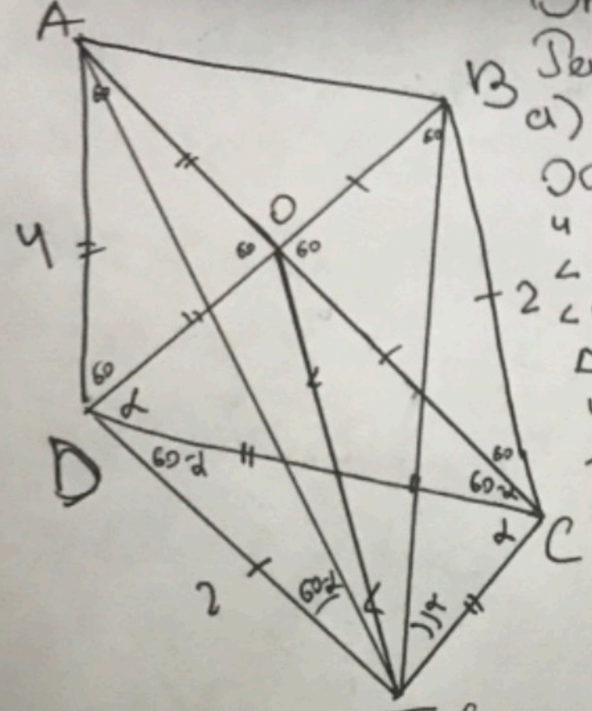
$$S=124(\underbrace{62^2-61-61}_{=3722})-\underbrace{\frac{124\cdot121}{2}}_{=7502}=\cancel{124(62^2-61}$$

1

$461528-7502=454026$ Ответ: 454026

Задача №6 Чистовик.

Ответ: б) $\frac{7}{9}$.



Решение:

а) Пусть $\angle ODC = \alpha$, тогда $\angle OCD = 60 - \alpha$

$OC = DT$, $OD = CT$ – симметрия и $DOCT$ – параллелогр.

$\left.\begin{array}{l}\angle DCT = \alpha = \angle ODC \\ \angle CDT = 60 - \alpha = \angle OCD\end{array}\right\}$ накрест лежащие

$\triangle BCT = \triangle TDA$ по 2 сторонам и углу между ними ($\angle BCT = \angle ADT = 120°$, $DT = BC$, $AD = CT$) $\Rightarrow$

$AT = BT$

Аналогично

$\triangle ADT = \triangle DOC = \triangle TCB \Rightarrow$

$\angle DTA = 60 - \alpha$ и $\angle BTC = \alpha$

Сумма углов 4-угольника $DOCT = 360 \Rightarrow$

$$\underbrace{\angle O}_{120} + \underbrace{\angle ODT}_{60} + \underbrace{\angle OCT}_{60} + \underbrace{DTC}_{60 + \angle ATB} = 360 \Rightarrow \angle ATB = 60° \text{ и}$$

$\triangle ATB$: $\angle ATB = 60°$ и $AT = BT \Rightarrow$

$\triangle ATB$ – равносторонний

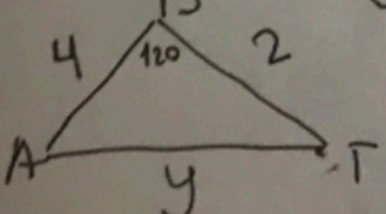
б) $S_{ABCTD} = \underbrace{S_{ATD}}_{x} + \underbrace{S_{BCT}}_{x} + S_{ABT}$

они равны, тк площади равных $\triangle$ равны

$S_{ABCD} = S_{ABCTD} - \underbrace{S_{CTD}}_{x} = S_{ABT} + x$

тк тоже равна тем треугольникам

Пусть $\underbrace{AB}_{=AT=BT} = y \Rightarrow S_{ABT} = \frac{\sqrt{3}y^2}{4}$



$S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 \cdot \sin(120°) = 4 \cdot \sin 60° = 2\sqrt{3}$

по т. косинусов

$y^2 = 16 + 4 - 2 \cdot 4 \cdot 2 \cos(120°) = 20 + 16 \cos 60° = 28$

$$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{\sqrt{3}y^2}{4}}{\frac{\sqrt{3}y^2}{4} + 2\sqrt{3}} = \frac{y^2}{y^2 + 8} = \frac{28}{28+8} = \frac{28}{36} = \frac{7}{9}$$

2

Чистовик.

Задача № 4

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2 = \frac{9}{4} \end{cases} \Big| -$$

ОДЗ: $x^2+y^2 \neq 0$

$$2x^4+2y^4+4x^2y^2 - \frac{1}{x^2+y^2} = 1$$

$$2(x^2+y^2)^2 - \frac{1}{(x^2+y^2)} = 1 \quad x^2+y^2 = t \neq 0$$

$$2t^2 - \frac{1}{t} = 1 \quad | \cdot t$$

$$2t^3 - t - 1 = 0$$

$t=1$ корень по обратной т. Безу в разложении будет скобка $(t-1)$

$$\parallel$$

$$(t-1)(2t^2+2t+1) = 0$$

$D = 4 - 8 < 0$ ветви направлены вверх, т.к. $2 > 0$ (коэф. перед t^2) => корней нет

=> только $t = 1$

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ x^2 \cdot y^2 = \frac{1}{4} \text{ (из 1 равенства)} \end{cases} \quad x^2 = 1-y^2$$

$$y^2 - y^4 = \frac{1}{4} \quad y^2 = k$$

$$k^2 - k + \frac{1}{4} = 0 \quad | \cdot 4$$

$$4k^2 - 4k + 1 = 0$$

$$(2k-1)^2 = 0 \Rightarrow 2k = 1$$

$$2y^2 = 1$$

$$y^2 = \frac{1}{2}$$

$$y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

3

Ответ: $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

211006332 (U847151 M1277585)

$\cos(120°) = \cos 60^2 - \sin^2 60$

$= \frac{1}{4} \quad \frac{3}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$

$$\begin{array}{r} 124 \,|\, 2 \\ -12 \;\; 62 \\ 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 121 \\ \times 62 \\ \hline 242 \\ +726 \\ \hline 7502 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 62 \\ \times 62 \\ \hline 124 \\ +372 \\ \hline 3844 \\ -122 \\ \hline 3722 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 61 \\ +61 \\ \hline 122 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3722 \\ \times 124 \\ \hline 14888 \\ +7444 \\ +3722 \\ \hline 461528 \\ -7502 \\ \hline 454026 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ +2 \end{array}$$

211006332 (U847151 M1277585)

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

$$2x^4+2y^4+4x^2y^2 - \frac{1}{x^2+y^2} = 1$$

$(x^2+y^2)=t$

$$2(x^2+y^2)^2 - \frac{1}{(x^2+y^2)} = 1$$

$$2t^2 - \frac{1}{t} = 1$$

$$2t^3 - 1 = t$$

$$2t^3 - t - 1 = 0 \quad \underline{t=1}$$

$\cancel{(t-1)(2t^2}$

$$\begin{array}{l|l} 2t^3 - t - 1 & t-1 \\ \cline{2-2} -\underline{2t^3 - 2t^2} & 2t^2+2t+1 \\ \quad 2t^2 - t & \\ -\underline{2t^2 - 2t} & \\ \quad\quad t - 1 & \end{array}$$

$$(t-1)(2t^2+2t+1)=0$$

$$D = 4 - 4\cdot 2 < 0$$

$\varnothing$

$$x^2+y^2=1 \qquad x^2 = 1-y^2$$

$$x^2y^2 = \frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$y^2 - y^4 = \frac{1}{4} \qquad y^2 = t$$

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$(2t-1)^2$

$$t^2 - t + \frac{1}{4} = 0$$

$$4t^2 - 4t + 1 = 0$$

$\cancel{D = 16 - 16}$

$$2y^2 = 1$$

$$y^2 = \frac{1}{2}$$

211006332 (U847151 M1277585)

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \dfrac{5}{4} \\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2 = \dfrac{9}{4} \end{cases}$$

$$(\sqrt{2}x^2+\sqrt{2}y^2)^2 + x^2y^2 = \frac{9}{4}$$

$$2.$$

$$2(x^2+y^2)^2 - \frac{1}{x^2+y^2} = 1$$

$$\frac{2(x^2+y^2)^3 - 1 - (x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 0$$

$$(x^2+y^2)\left(2(x^2+y^2)^2 - 1\right) - 1 = 0$$

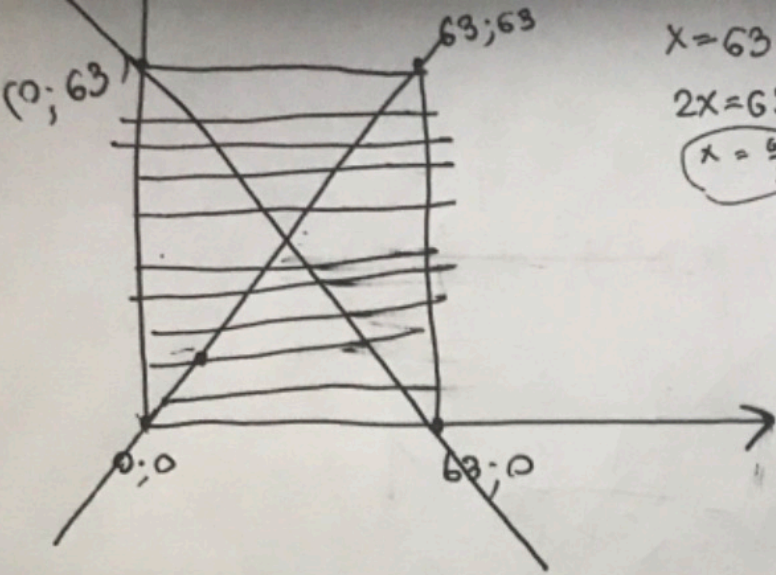
$$\frac{1}{x^2+y^2} + 2(x^2+y^2)^2 + 2x^2y^2 = \frac{14}{4}$$

$$(x^2+y^2)(2x^4+2y^4+4x^2y^2-1) - 1 = 0$$

$$2x^6 + \cancel{2x^2y^4} + 4x^4y^2 - x^2 + 2x^4y^2 + 2y^6 + \underline{4x^2}$$
$$-y^2 - 1 = 0$$

$$2x^6+2y^6+6x^2y^4+6x^4y^2 - x^2 - y^2 - 1 = 0$$

$$6x^2y^2(y^2+x^2) \quad -(x^2+y^2)$$



$x = 63 - x$

$2x = 63$

$x = \frac{63}{2}$

$$\begin{array}{r} 3722 \\ \times\ 124 \\ \hline 14888 \\ +\ 7444 \\ 3722 \\ \hline 461528 \end{array}$$

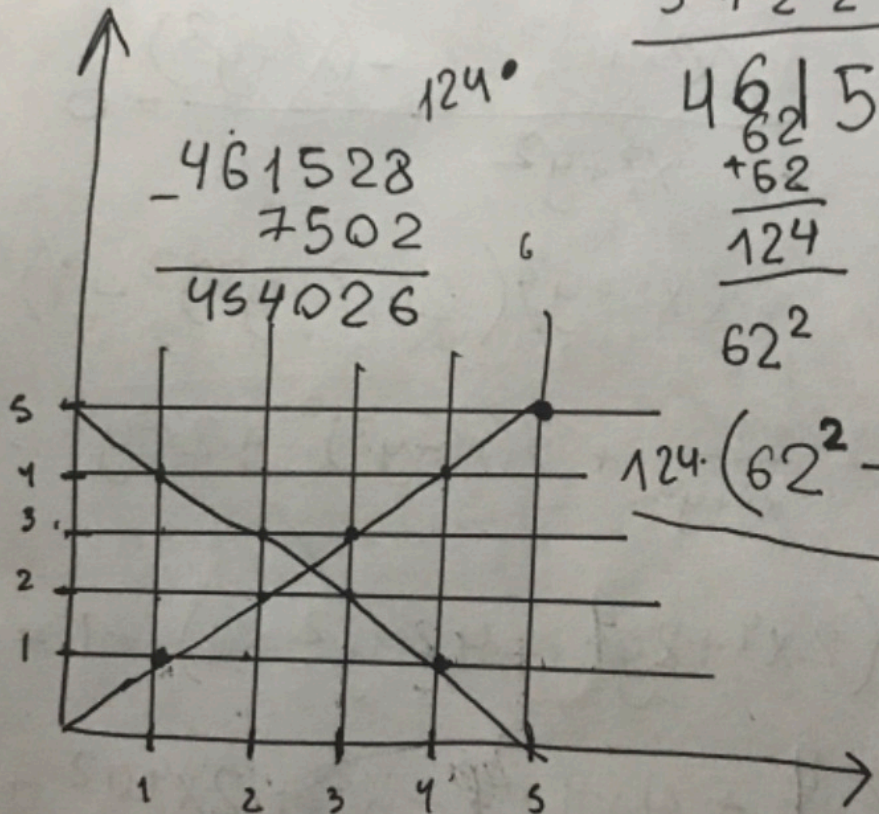
$$\begin{array}{r} 62 \\ +62 \\ \hline 124 \\ 124 \\ \hline \end{array}$$

62^2

461528

124·

$$\begin{array}{r} -\ 461528 \\ 7502 \\ \hline 454026 \end{array}$$



$124 \cdot (62^2 - 61 - 61)$

$$\frac{124 \cdot 121}{2}$$

$$\begin{array}{r} 62 \\ \times 62 \\ \hline 124 \\ +\ 372 \\ \hline 3844 \end{array}$$

$-$ ~~122~~

$$\begin{array}{r} 61 \\ \times\ 2 \\ \hline 122 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 124 & 2 \\ -12 & \overline{62} \cdot 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -\ 3844 \\ 122 \\ \hline 3722 \end{array}$$

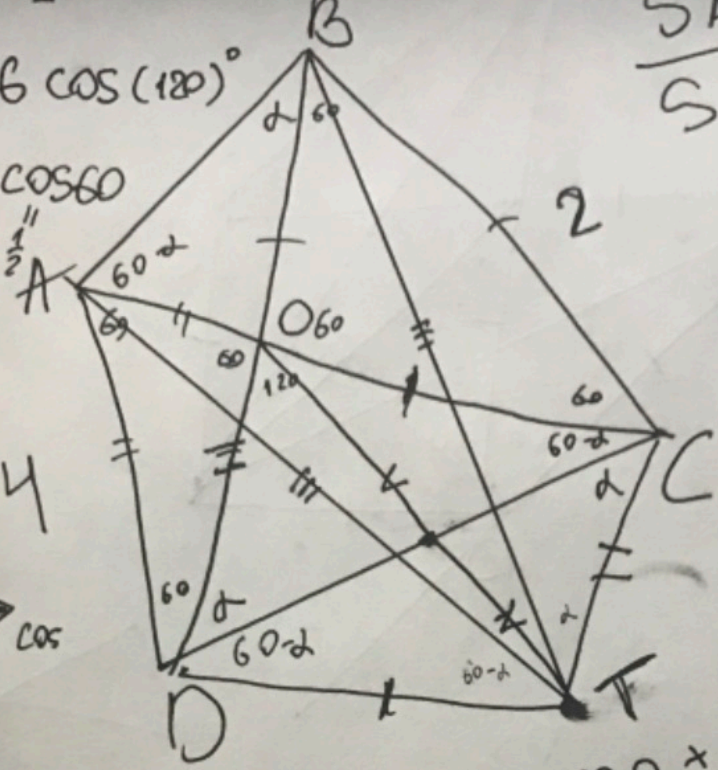
$$\begin{array}{r} 121 \\ \times\ 62 \\ \hline 242 \\ +\ 726 \\ \hline 7502 \end{array}$$

$x^2 = 16 + 4 - 2 \cdot 4 \cdot 2 \cos(120^\circ)$

$x^2 = 20 - 16 \cos(120)^\circ$

$x^2 = 20 + 16 \cos 60$

28

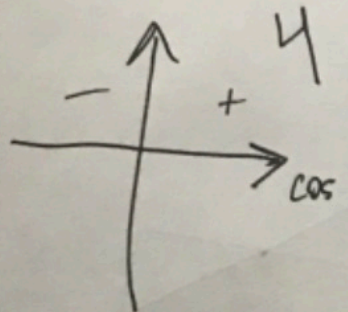


$\frac{S_{ABT}}{S}$

$\frac{\frac{\sqrt{3}x^2}{4}}{\frac{\sqrt{3}x^2}{4} + 2\sqrt{3}}$

$\frac{\sqrt{3}x^2}{\sqrt{3}x^2 + 8\sqrt{3}}$

$\frac{x^2}{x^2+8}$



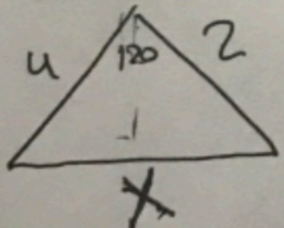
$k + 180 + 60 + 60 = 360$

$k = 60^\circ$

$\cancel{60 - k = \alpha}$

$\cancel{60 = 2\alpha}$

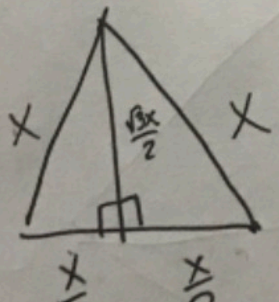
$\cancel{\alpha = 30}$



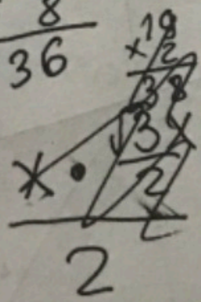
x - сторона

$\frac{28}{36}$

$\frac{14}{18} = \frac{7}{9}$



$\begin{array}{r} 28 \\ +\ 8 \\ \hline 36 \end{array}$



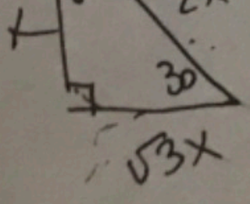
$\begin{array}{r|l} -36 & 2 \\ 2 & 18 \\ \hline 16 & \end{array}$

$\sqrt{3}\left(\frac{x^2}{4} + 2\right)$

$\frac{x}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}x}{2} =$

$\frac{\sqrt{3}x^2}{4}$

$\frac{x^2}{4} + \frac{3x^2}{4}$

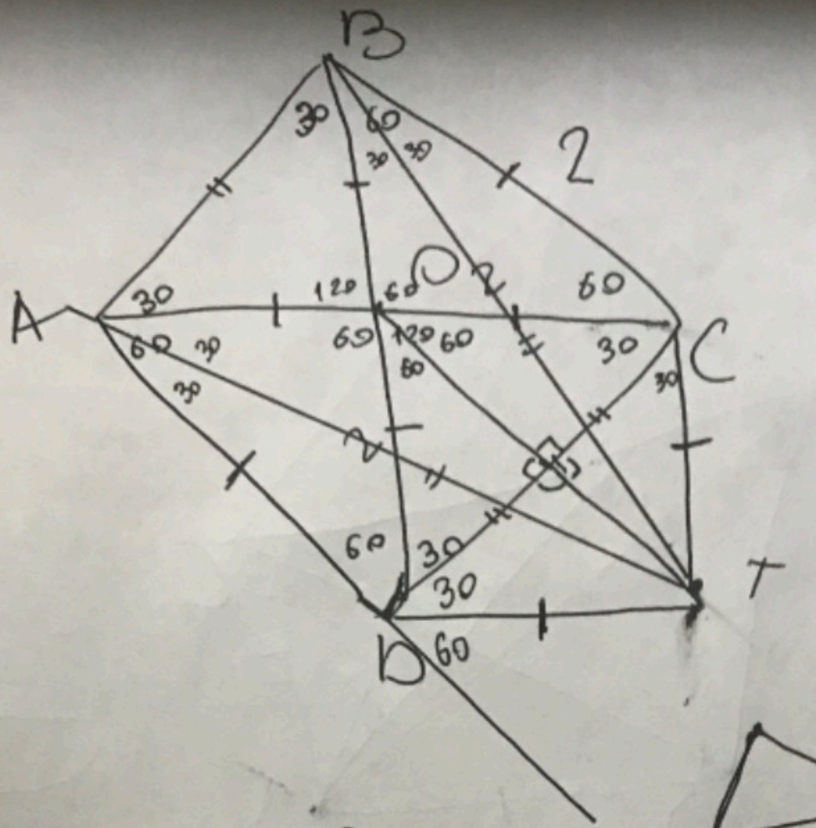


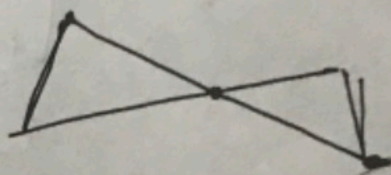
$\frac{1}{2} 4 \cdot 2 \cdot \sin(120)$

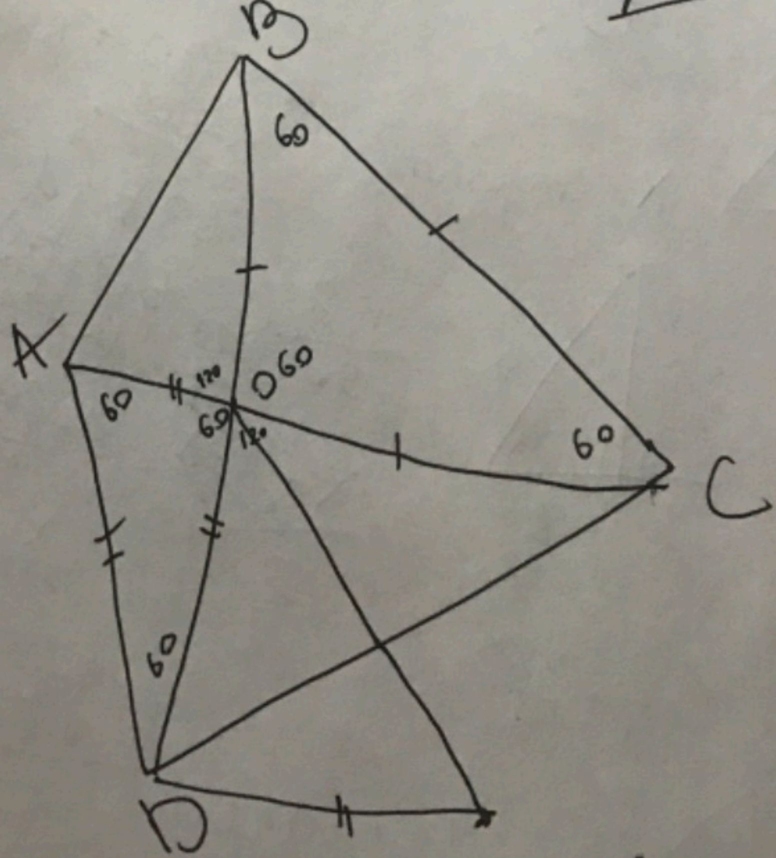
$4 \cdot \sin 60 = 2\sqrt{3}$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$

211006332 (U847151 M1277585)


B
A
C
D
T
O
2
30
60
120




B
A
C
D
O
60
120