Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

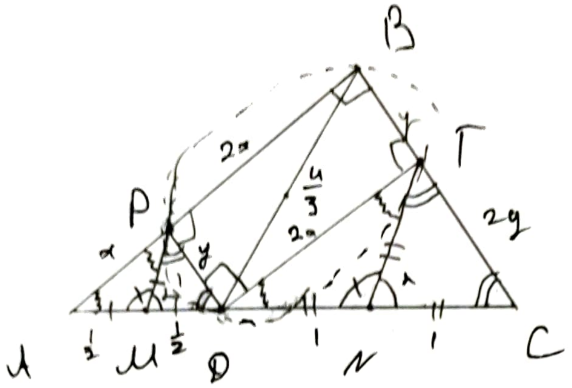
Шифр: **211006293**

ID профиля: **806090**

Вариант 12

Чистовик (1)

1.



$PM \parallel TN$

$\angle ABC$ - ?

$MP = \frac{1}{2}$, $NT = 1$, $BD = \frac{4}{3}$

$S_{\triangle ABC}$ - ?

1) доп. построение PD, DT

BD - диаметр

$\angle BPD$ - опирается на BD

$\angle BTD$ опирается на BD

$\Rightarrow \angle DPB = \angle BTD = 90°$

2) Рассм. $\triangle APD$ ($\angle APD = 90°$)

PM - медиана $\Rightarrow PM = AM = MD$

$\angle PMD = \angle TNC$ - соответственные при $PM \parallel TN$ и секущей AC.

Рассм. $\triangle DTC$ ($\angle DTC = 90°$)

TN - медиана $\Rightarrow TN = DN = NC$

Пусть $\angle PMD = \angle TNC = \alpha$, тогда в $\triangle MPD$ ($MP = MD$)

$\angle MPD = \angle PDM = \frac{180 - \alpha}{2}$

в $\triangle TNC$ ($TN = NC$) $\angle NTC = \angle TCN = \frac{180 - \alpha}{2}$

$\Rightarrow \angle MPD = \angle PDM = \angle NTC = \angle TCN$

в $\triangle APM$ и $\triangle DTN$ аналогично

$\angle PAM = \angle APM = \angle TDN = \angle DTN$

3) Заметим, что $\angle APM + \angle DPM = \angle DTN + \angle CTN = 90°$

~~Но при ос~~ $\Rightarrow \angle PAM + \angle TCN = 90°$, тогда $\angle ABC = 180° - 90° = 90°$

Чистовик 2

4) $\triangle APM \sim \triangle DTN$ (по 2 углам) $\Rightarrow \frac{AP}{DT} = \frac{AM}{DN} = \frac{1}{2}$

Пусть $DT = 2x$, тогда $AP = x$

5) $\triangle CTN \sim \triangle DMP$ (по 2 углам) $\Rightarrow \frac{PD}{CT} = \frac{MD}{CN} = \frac{1}{2}$

Пусть $PD = y$, тогда $CT = 2y$

6) $\measuredangle PBTD$: $\angle DPB = \angle BTD = \angle PBT = 90^\circ$

$PBTD$ - вписанный $\Rightarrow \angle PDT = 180^\circ - \angle PBT = 90^\circ$

$\Rightarrow$ $PBTD$ - ~~квадрат~~ прямоугольник.

$\Rightarrow$ $DT = PB = 2x$, $PD = BT = 2y$

7) из $\triangle APD$: $x^2 + y^2 = 1$ (по т. Пифагора) (1)

из $\triangle DBT$: $4x^2 + y^2 = \frac{16}{9}$ (по т. Пифагора) (2)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 4x^2 + y^2 = \frac{16}{9} \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 1 + 3x^2 = \frac{16}{9} \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x = \frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{3}} \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{3}} \\ x = \frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{3}} \end{cases}$$

(Понятно, что отриц. значения не удовл. условию)

$AB = 3x = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$, $BC = 3y = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$

$S_{\triangle ABC} = AB \cdot BC \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{7} \cdot 2 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{35}}{3}$

Ответ: $\angle ABC = 90^\circ$, $S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{35}}{3}$

Чистовик 3

2. $\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$

$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \\ x^2-3x-4 \leq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 4 \\ (x-4)(x+1) \leq 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ ~~x~~ ОДЗ: $\begin{matrix} x \geq -1 \\ x \leq 4 \end{matrix}$

$\sqrt{x+1} + 3 = 2\sqrt{(4-x)(x+1)} + \sqrt{4-x}$

Слева монотонно возрастающая функция.

Справа сумма двух монотонно убывающий функций => монотонно убывающая функция.

=> графики данных функций пересекаются не более, чем в 1 точке => $x = 3$ – корень, при том единственный

Проверка: $\sqrt{4} - \sqrt{1} + 3 = 2\sqrt{4+9-9}$

$4 = 4$

Ответ: 3.

Чистовик (4)

3. $ax^2+4a^2x-ay+4a^3+2=0$

$a\neq 0$ (иначе ↑ не парабола)

$$y = x^2+4ax+4a^2+\frac{2}{a}$$

B: $x_0 = \frac{-4a}{2} = -2a$

$y_0 = 4a^2-8a^2+4a^2+\frac{2}{a} = \frac{2}{a}$ $\Rightarrow B\left(-2a;\frac{2}{a}\right)$

$$2a^2-2a(x+3y)+x^2+2xy+5y^2=0$$

Решу квадратное относительно a

$D_1 = (x+3y)^2 - 2(x^2+2xy+5y^2) = x^2+6xy+9y^2-2x^2-4xy-$

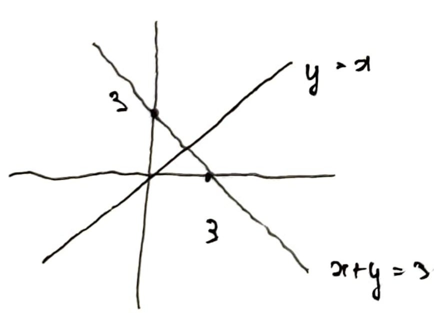
$-10y^2 = -x^2+2xy-y^2 = -(x-y)^2$

Чтобы a существовало нужно $D_1\geq 0$, но $-(x-y)^2\leq 0$ значит

a существуют только при $x-y=0$, т.е. $x=y$

$$a = \frac{x+3y}{2} = \frac{4y}{2} = 2y \quad (2x)$$

из $x=y \Rightarrow$ точка A расположена на прямой $y=x$



$3-x=x$

$2x=3$

$x=\frac{3}{2}$ — пересечени $y=x$ и $x+y=3$

$a=\frac{2\cdot 3}{2}=3$ — значение a при котором A лежит в точке пересечения $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ при $a<3$ A — слева от $x+y=3$

B: $x_0=-2\cdot 3=-6$, $y_0=\frac{2}{3}$ $\Rightarrow$ B при ~~$a<3$~~ $a=3$ лежит ~~...~~ ~~на~~ левее $x+y=3$

Черновик.

$2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0$

$x^2-2ax+a^2=(x-a)^2$

$(x-a)^2+a^2-6ay+2xy+5y^2$

$a^2-6ay+9y^2-4y^2+2xy$

$(x-a)^2+(a-3y)^2-4y^2+2xy=0$

$2\cdot 4y^2-2\cdot 2y\cdot y-$
$-6\cdot 2y\cdot y+y^2+$
$+2y^2+5y^2$

$8y^2-4y^2-$
$-12y^2+8y^2=0$

$\cancel{(x-a)^2+(a-5y)(a-y)}$

$x+y<3$

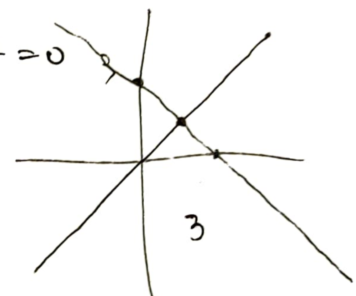
$\cancel{(x-a)^2+(3y}$

$(x-a)^2+a^2-2ay+y^2-4ay+2xy+4y^2=0$

$\cancel{(x-a)^2+(a-y)^2}=$

$x+y=3$

$y=\frac{\cancel{2x}}{3-x}$



3

$2a^2-2a(x+3y)+x^2+2xy+5y^2$

$a=\frac{2\cdot 3}{2}=3$

$D_1=(x+3y)^2-2(x^2+2xy+5y^2)=$

$\cancel{x+3}$ $3-x=x$

$2x$

$=x^2+6xy+9y^2-2x^2-4xy-10y^2=$

$3-x=x$

$2x=3$

$x=\frac{3}{2}$

$-x^2+2xy-y^2=-(x+y)^2\geq 0$

$\frac{-4-3x+x^2}{-2(3-x)}<0$ $\quad y=3-x$ $\quad -1\quad 3\quad 4$

$x+y=0$

$\frac{(x-4)(x+1)}{3-x}\geq 0$

$\frac{x^2-3x-4}{3-x}>0$

$\frac{2}{a}>3-x$

$a=\frac{x+3y}{2}=\frac{2y}{2}=y$

$\frac{2}{a}=3-x$

$\cancel{(x-4)(x}$

3 $\quad 4$

$D=9+16=25$ $\quad -2a$ $\quad -1$

$\frac{2}{a}>3-x$

$2>(3-x)a$

$-2a>x$

$x<0$ $\quad x=y$

$a>\frac{x+3y}{2}=\frac{4y}{2}=2y$

$a<\frac{x}{-2}$

$a>\frac{2}{3-x}$

$a=10$

$\frac{2}{3-x}<\frac{x}{-2}$

$2y\cdot y^2+4\cdot 4y^2\cdot y-2y^2+4\cdot 8y^3+2=0$

$a<\frac{x}{-2}$

$\frac{2}{3-x}-\frac{x}{-2}<0$

$2y^3+16y^3-2y^2+32y^3+2=0$

$\frac{1}{5}$ $a>\frac{2}{3-x}$

$a\in[\frac{2}{3-x};\frac{x}{-2}]$

Черновик.

$2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0$ т. А

$ax^2+4a^2x-ay+4a^3+2=0$ – парабола с верш. В

a - ? А и В по одну от $x+y=3$ (не лежат)

В: $x_0=\dfrac{-4a^2}{2a}=-2a$

$a\neq 0$

$y_0=$ $\cancel{a\cdot 4a^2+4a^2(-2a)+4a^3}$ $-a$

$y=3-x$

$ay=ax^2+4a^2x+4a^3+2$

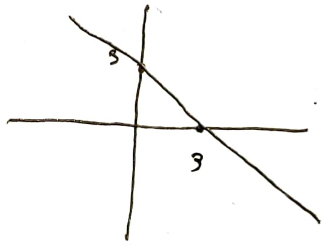
$y=x^2+4ax+4a^2+\dfrac{2}{a}$

$B\left(-2a;\ \dfrac{2}{a}\right)$

В: $x_0=\dfrac{-4a}{2}=-2a$

$y_0=4a^2-\cancel{8a^2}+\cancel{4a^2}+\dfrac{2}{a}$

$y_0=\dfrac{2}{a}$



$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+3=2\sqrt{4+3x-x^2}$

$\cancel{\sqrt{x+1}+3=2\sqrt{4+3x-x^2}}+\sqrt{4-x}$

$\sqrt{(4-x)(x+1)}+\sqrt{(4-x)(x+1)}$

$0+0=0$

$2\cdot 2+2=6$

$\cancel{\sqrt{x+1}\left(1-\sqrt{4-x}\right)}-\sqrt{4-x}\left(1+\sqrt{x+1}\right)+3=0$

$x+1+9+2\sqrt{x+1}=4(4+3x-x^2)+4\sqrt{(4-x)^2(x+1)}+4-x$

$x+10+2\sqrt{x+1}=16+12x-4x^2+4(4-x)\sqrt{x+1}+4-x$

$4x^2-10x-10-14\sqrt{x+1}+$ $+(16-4x)(\sqrt{x+1})$

$+4x\sqrt{x+1}=0$ $\quad 16\sqrt{x+1}-4x\sqrt{x+1}$

Черновик

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$

$x = 3$

$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \\ 4+3x-x^2 \geq 0 \end{cases}$ $x \geq -1$ $x \leq 4$

$4+6-9$

$x+1 = a$, $a \geq 0$

$4-x = b$, $b \geq 0$, $ab \geq 0$

$x^2 - 3x - 4 \leq 0$

$ab = (x+1)(4-x) = 4x - x^2 + 4 - x =$

$\cancel{-ab = -(x+1)(x-4}$

$= 4 + 3x - x^2$

$(x-4)(x+1) \leq 0$

$x = 3$

$x \in [-1; 4]$

$2 - 1 + 3$

$4 = 2 \cdot \sqrt{4}$ (+)

$\sqrt{a} - \sqrt{b} + 3 = 2\sqrt{ab}$

~~$\sqrt{x+1} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2} + \sqrt{4-x}$~~

$\sqrt{a} + 3 = 2\sqrt{ab} + \sqrt{b}$

$a + 6\sqrt{a} + 9 = 4ab + b + 4\sqrt{ab^2}$

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 9 = 2\sqrt{(4-x)(x+1)}$

$4\sqrt{a}b$

$a + 9 - 4ab - b = 4\sqrt{a}b - 6\sqrt{a}$

$\sqrt{4-x}(2\sqrt{x+1} + 1) = \sqrt{x+1} + 3$

$\sqrt{x+1} + 9 = \sqrt{4-x}(2\sqrt{x+1} + 1)$

$\sqrt{x+1} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2} + \sqrt{4-x}$

$x + 1 + 9 + 6\sqrt{x+1} = (4-x)(4(x+1) + 4\sqrt{x+1} + 1)$

$x + 1 + 9 + 6\sqrt{x+1} = 4(4+3x-x^2) + 4 - x + 4\sqrt{(4-x)^2(x+1)}$

$x + 10 + 6\sqrt{x+1} = (4-x)(4x + 5 + 4\sqrt{x+1})$

$\cancel{x+10} + 6\sqrt{x+1} = 16 + 12x - 4x^2 + 4 - x + 4\sqrt{x+1}(4-x)$

$4x^2 - 10x - 10 = \sqrt{x+1}(4(4-x) - 6)$

$-x(10-4x) - 10 = \sqrt{x+1}(16 - 4x - 6)$

$\sqrt{x+1}(10 - 4x)$

~~$-10 = (10-4x)(\sqrt{x+1} + x)$~~

Черновик.

$3y^2=$

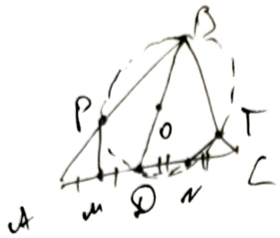
$1+3y^2=\frac{16}{9}$

$x^2+4y^2=\frac{16}{9}$

$x^2+y^2=1$

$x^2=1-y^2$

1.



$PM \parallel TN$

$\angle ABC - ?$

$MP=\frac{1}{2}$, $NT=1$, $BD=\frac{4}{3}$, $S_{\triangle ABC}-?$

$1-\frac{7}{27}=\frac{20}{27}$

$3y^2=\frac{7}{9}$ $\quad y^2=\frac{7}{9\cdot 3}=$

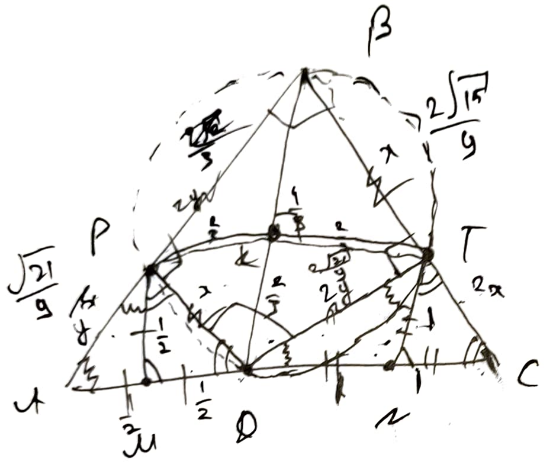
$y=\frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}=$

$1+3y^2=\frac{16}{9}$

$\angle ABC=90^\circ$

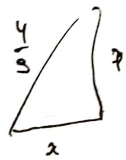
$x^2+4y^2=\frac{16}{9}$ $\quad y=\frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}=$

$x^2+y^2=1$ $\quad =\frac{\sqrt{21}}{9}$



$AC=3$

$y^2=\frac{21}{81}$



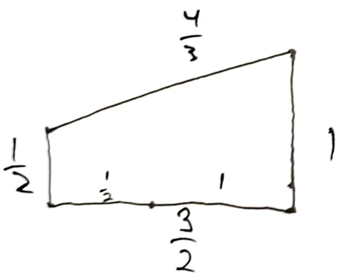
$\frac{abc}{4R}$

$\frac{16}{9}=2x^2$

$x^2=1-\frac{21}{81}$ $\quad x^2=\frac{16}{18}=\frac{8}{9}$

$\frac{8}{9}+\frac{8}{9}=\frac{16}{9}$ $\quad =\frac{60}{81}$

$\boxed{x=\frac{\sqrt{8}}{3}=\frac{2\sqrt{2}}{3}}$



$CT=\sqrt{4-\frac{8}{9}}=\sqrt{3\frac{1}{9}}=\sqrt{\frac{28}{9}}=\frac{2\sqrt{7}}{3}$ $\quad x=\frac{2\sqrt{15}}{9}$

$BC=CT+BT=\frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{7}}{3}=\frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{7})}{3}$

$AP=\sqrt{1-\frac{8}{9}}=\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{1}{3}$

$\frac{8\sqrt{15}}{9}\cdot\frac{3\sqrt{21}}{9}\cdot\frac{1}{2}$ $\quad BA=\frac{2\sqrt{2}+1}{3}$

$S(\triangle ABC)=\frac{1}{2}BC\cdot AB=\frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{7})\cdot(2\sqrt{2}+1)}{9}\cdot\frac{1}{2}=$

$\frac{\sqrt{5\cdot 3\cdot 7\cdot 3}}{9}=\frac{3\sqrt{35}}{9}$ 3 $=\frac{2\cdot 2+\sqrt{2}+2\sqrt{14}+\sqrt{7}}{9}=$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006293**

ID профиля: **806090**

Вариант 12

Чистовик ①

4. $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \dfrac{5}{4} \\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2 = \dfrac{9}{4} \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \dfrac{5}{4} \\ 2(x^4+2x^2y^2+y^4)+x^2y^2 = \dfrac{9}{4} \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \dfrac{5}{4} \\ 2(x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = \dfrac{9}{4} \end{cases}$$

Пусть $x^2+y^2 = a,\ a \neq 0,\ x^2y^2 = b$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a} + b = \dfrac{5}{4} \quad (1) \\ 2a^2 + b = \dfrac{9}{4} \quad (2) \end{cases}$$

$(2)-(1)$: $2a^2 - \dfrac{1}{a} = 1 \quad | \cdot a$

$2a^3 - a - 1 = 0$

$(2a^2+2a+1)(a-1) = 0$

$\left[\begin{array}{l} 2a^2+2a+1=0 \\ a-1=0 \end{array}\right.$ для $2a^2+2a+1=0$:

$D_1 = 1-2 = -1 < 0$
старший коэф. $= 2 > 0$ $\Big| \Rightarrow 2a^2+2a+1 > 0$ при $\forall a$

$\Downarrow$

$a = 1$

$b = \dfrac{5}{4} - 1 = \dfrac{1}{4}$

$\begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ x^2y^2 = \dfrac{1}{4} \end{cases}$ $\begin{cases} xy = \pm\dfrac{1}{2} \\ (x+y)^2 - 2xy = 1 \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} xy = -\frac{1}{2} \\ (x+y)^2 = 0 \end{cases} \ ① \\ \begin{cases} xy = \frac{1}{2} \\ (x+y)^2 = 2 \end{cases} \ ② \end{array}\right.$

Рассмотрим ①:

$(x+y)^2 = 0 \Rightarrow x+y = 0 \Rightarrow x = -y$

$-y^2 = -\dfrac{1}{2}$; $y^2 = \dfrac{1}{2}$; $y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $x = \mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Чистовик 2

Рассмотрим 2

$(x+y)^2 = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x + y = \pm\sqrt{2}$

сл.1: $x + y = \sqrt{2}$

$x = \sqrt{2} - y$

$(\sqrt{2} - y)\, y = \frac{1}{2}$

$-y^2 + \sqrt{2}y = \frac{1}{2}$

$y^2 - \sqrt{2}y + \frac{1}{2} = 0$

$\left(y - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 0$

$y = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad x = \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

сл. 2: $x + y = -\sqrt{2}$

$x = -\sqrt{2} - y$

$(-\sqrt{2} - y)\, y = \frac{1}{2}$

$-\sqrt{2}y - y^2 = \frac{1}{2}$

$y^2 + \sqrt{2}y + \frac{1}{2} = 0$

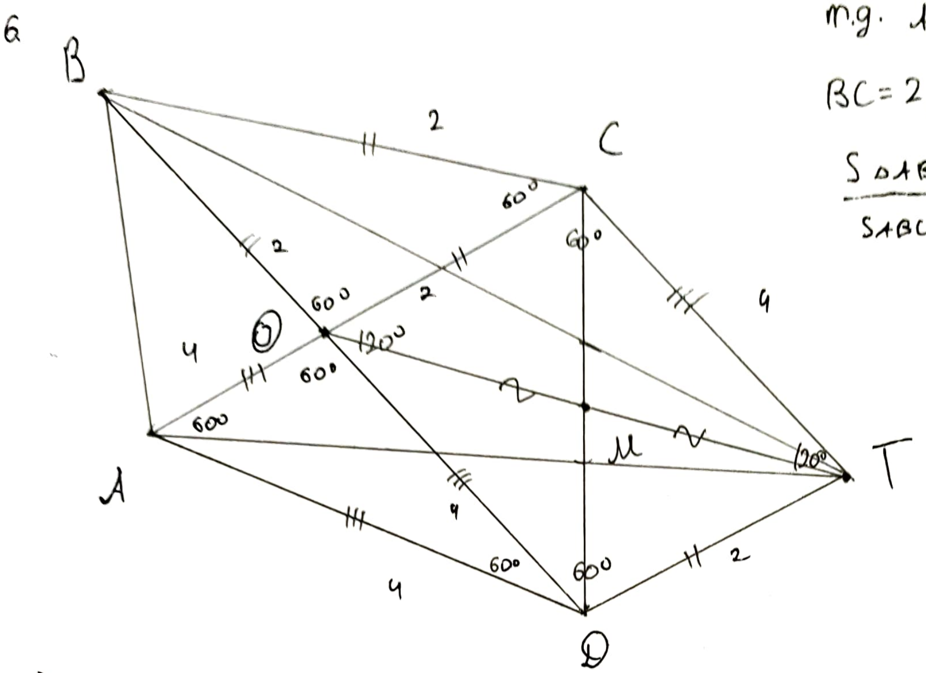
$\left(y + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 0$

$y = -\frac{1}{\sqrt{2}}; \quad x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

Ответ: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Чистовик ③

6



т.д. $AB = BT = AT$

$BC = 2$, $AD = 4$, M – серед. CD

$\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}}$ – ?

1) Рассм. $OCTD$: $OM = MT$ (симметрия), $CM = MD$ (условие) $\Rightarrow$ $OCTD$ – пар-м $\Rightarrow$ $CT = OD$, $OC = DT$

2) Рассм. $\triangle BCT$ и $\triangle ADT$:

$\angle COD = 180^0 - 60^0 = 120^0$ (смежен с $\angle BOC$)

$\angle OCT = \angle TDC = 60^0$ (одностор. в пар-ме)

$BC = DT$ (по доказ.)

$CT = AD$ (по доказ.)

$\angle ADT = \angle BCT$ ($\angle ADO + \angle TDO =$
$= \angle BCO + \angle OCT = 120^0$) $\Rightarrow$ $\triangle BCT = \triangle ADT \Rightarrow$ ~~$BT = BD$~~
$AT = BT$ (как соотв.)

3) $\angle BOA = 180^0 - 60^0 = 120^0$ (смежен с $\angle BOC$)

Рассм. $\triangle BOA$ и $\triangle COD$

$BO =$ ~~OD~~ OC
$AO = OD$
$\angle BOA = \angle COD$ (верт.) $\Rightarrow$ $\triangle BOA = \triangle COD$ (по 2 стор. и углу меж ними)
$\Rightarrow$ $AB = CD$ (как соотв.)

4) Рассм. $\triangle BCT$ и $\triangle CTD$:

$BC = DT$ (по доказ.)
CT – общая
$\angle BCT = \angle CTD = 120^0$ $\Rightarrow$ $\triangle BCT = \triangle CTD$ (по 2ст. и углу)
$\Rightarrow$ $BT = CD$ (как соотв.)

5) $BT = CD$
$AT = BT$
$AB = CD$ $\Rightarrow$ $AT = BT = AB$ $\Rightarrow$ $\triangle ABT$ – правильный
чтд

Чистовик (4)

6) ∡ $\triangle BCT$:

по т. косинусов: $BT^2 = BC^2 + CT^2 - 2\cos\angle BCT \cdot BC \cdot CT$

$$BT^2 = 4 + 16 - 2\cdot\cos 120^\circ\cdot 2\cdot 4 =$$

$$= 20 + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 8 = 28$$

$$BT = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

$$S_{\triangle ABT} = \frac{1}{2} BT\cdot AT\cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2}(2\sqrt{7})^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\cdot 7\cdot\sqrt{3}}{4} = 7\sqrt{3}$$

7) ∡ $ABCD$:

$BD = CA = 6$, $\angle BOC = 60^\circ$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} BD\cdot CA\cdot \sin\angle BOC = \frac{1}{2}\cdot 36\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$$

$$\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{7\sqrt{3}}{9\sqrt{3}} = \frac{7}{9}$$

Ответ: $\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{7}{9}$

Чистовик 5

5. посчитаем общее кол-во узелков.

возможные расположения: $1 \leq x \leq 62$

$1 \leq y \leq 62$

Значит 62 способами выбираем x, 62 способами y

$62 \cdot 62 = 3844$ узелков всего

Очевидно, что каждая из прямых $y = x$, $y = 63 - x$ пересечёт по 62 узелка внутри квадрата.

$63 - x = x$

$2x = 63$

$x = 31,5$ – абсцисса пересечения $y = x$, $y = 63 - x$ – нецелое

$\Rightarrow$ точка пересечения прямых не является узелком.

Итак, 2 способами можно выбрать прямую, на которой точно будет располагаться узел, 62 способами можно выбрать узел на этой прямой, $3844 - 1 - 61 \cdot 2 = 3721$ точки можно выбрать в пару к ранее выбраной

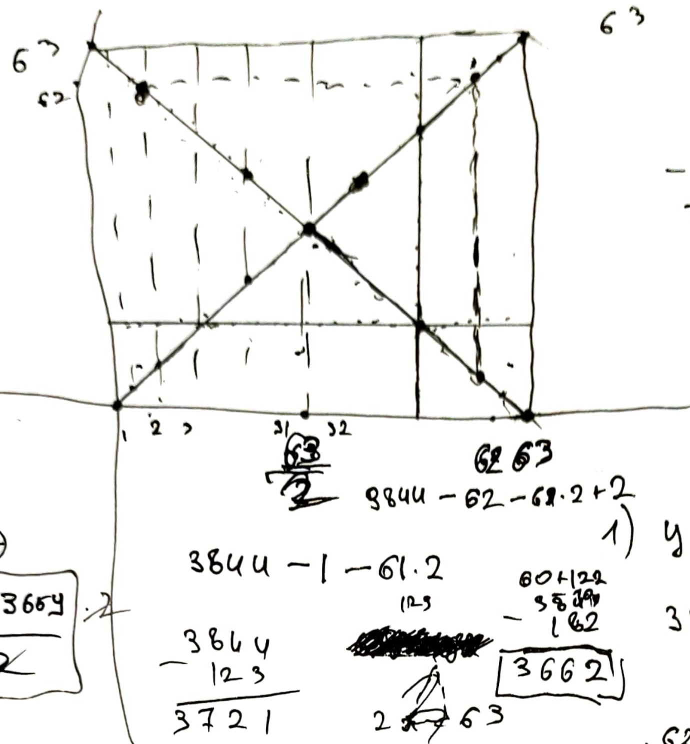
$\underbrace{1 + 61 \cdot 2}_{\text{запретные точки уже использует место}}$

$$\frac{2 \cdot 62 \cdot 3721}{2} = 230.702$$ способа выбрать 2 узла согласно условию

делю на 2 т.к. порядок выбора узлов не важен.

Ответ: 230.702.

Черновик



$\frac{62 \cdot 3662}{2}$

$\frac{2 \cdot 62 \cdot 3721}{2}$

$3844 - 61 \cdot 2 - 1$ 3721

$3844 - 123 = 3721$ 123

$3721 \cdot 62$ 4

$+ 7442$
22326
230702

+84

62 ·

3844 − 62

$\frac{62 \cdot 3843}{2}$

$\boxed{62 \cdot 3721}$

$\frac{}{2}$

$\boxed{\frac{62 \cdot 3664}{\cancel{2}}}$ ·2

4

$\frac{63}{2}$

3844 − 62 − 62 · 2 + 2

1) $y = x$, нет $y = 63 - x$

3844 − 1 − 61 · 2

123

$3844 - 123 = 3721$

60 + 122

$\boxed{3662}$

2 ... 63

3844 − 62 − 1 − 122

$3844 - 185 = 3659$

$\boxed{3659}$

$\frac{62 \cdot 3662 \cdot 2}{2}$

$x = \frac{63}{2}$

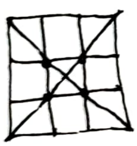
$62 \cdot 62 = 3844$ — всего узлов

$1 \leq x \leq 62$

$1 \leq y \leq 62$

$\frac{62 \cdot 3843}{2} - \frac{62 \cdot 2 \cdot 61}{2}$

$3844 - 129 = 3721$



~~$y = 63$~~ $y = x$

~~123~~

при выборе точки

идёт запрет на 122 других

1 ... 62 − 62 узла

3844

$3721 \cdot 62$ 4

7442
22326
230702

$y = 63 - x$

$3844 - 123 = 3721$

62 ; 1 − 62 узла.

$\frac{62 \cdot 3721}{2}$

$\frac{2 \cdot 62 \cdot 3721}{\cancel{2}}$

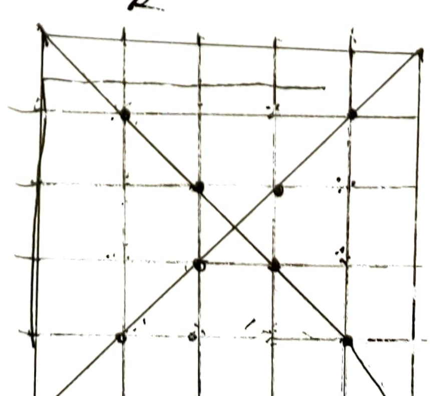
всего 4

16 всего

~~2 · 0 · 2~~

16 − 4 − 1 − 6 = 5

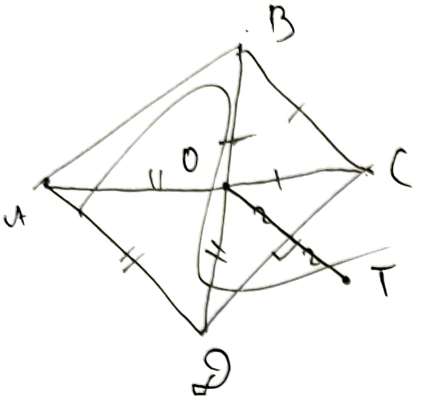
$\frac{4 \cdot 5}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} = 20$ способов

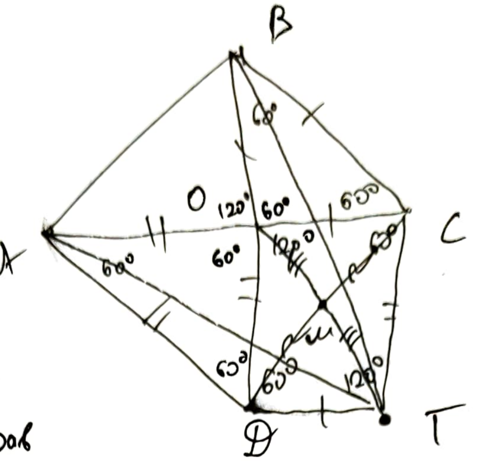


~~64~~

~~6 + 6 + 6 + 6.~~

Черновик



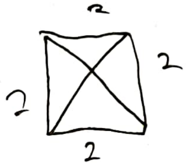


т. д. $\triangle ABT$ – прав

$(AB = BT = AT)$

$BC = 2$, $AD = 4$

$\frac{S(\triangle ABT)}{S_{ABCD}}$ – ?



4

$S_{\triangle ABT} = 14\sqrt{3}$

$S_{ABCD} =$

$BT^2 = 4 + 16 - 2\cos 120° \cdot 2 \cdot 4 =$

$= 20 + 16\cos 60° =$

$= 20 + 8 = 28$

$\underline{BT = 2\sqrt{7}}$

$\sqrt{4+4}$

$2\sqrt{2}$

$\frac{1}{2} \cdot (2\sqrt{2})^2 =$

$= \frac{4 \cdot 2}{2}$

$P = \frac{2\sqrt{7} \cdot 3}{2} = 3\sqrt{7}$

~~$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$~~

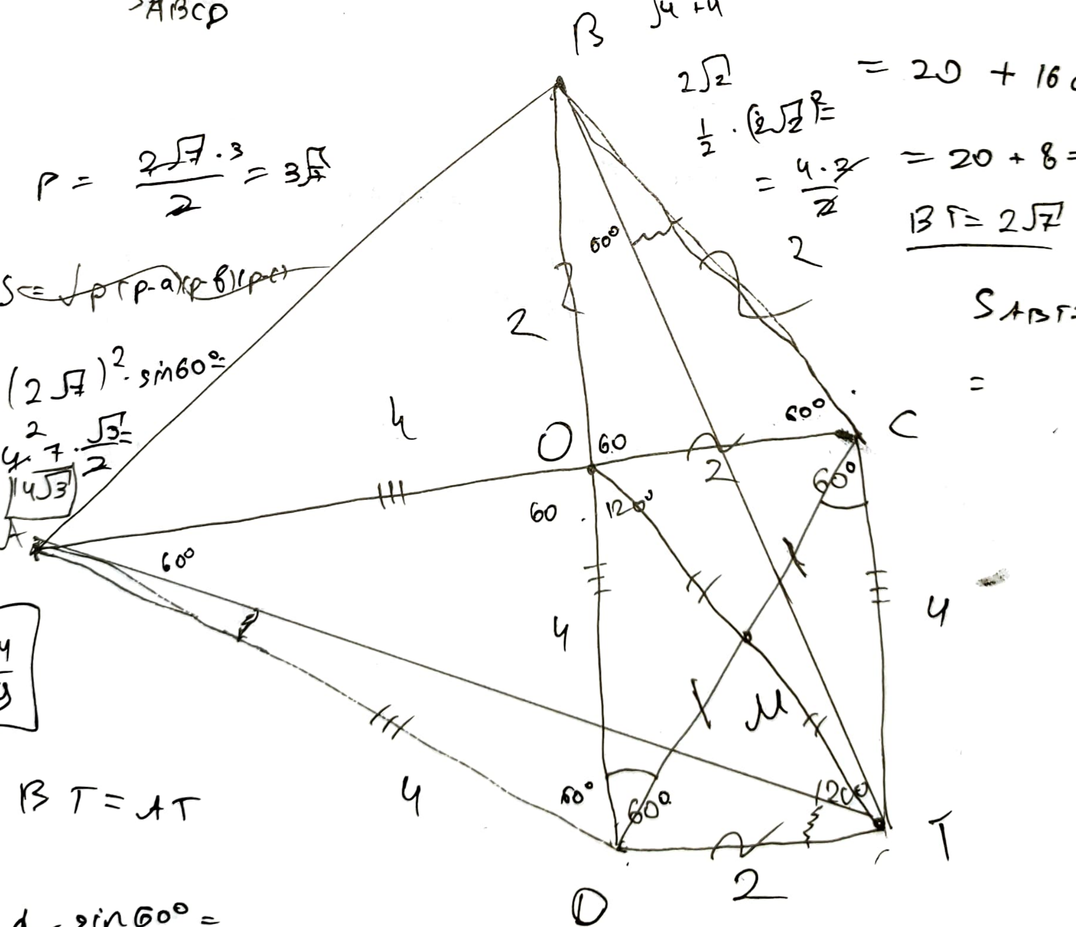
$S = (2\sqrt{7})^2 \cdot \sin 60° =$

$= 4 \cdot 7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$

$= \boxed{14\sqrt{3}}$

$S_{ABT} =$

$=$



$\boxed{\frac{14}{9}}$

$BT = AT$

$\frac{1}{2} d_1 d_2 \cdot \sin 60° =$

$= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$

$= 9\sqrt{3}$

$\triangle BCT = \triangle CTD$

(2 стороны + угол) $\to$

$CD = BT = AB$

Черновик

1. $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \dfrac{5}{4} \\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2 = \dfrac{9}{4} \end{cases}$

$a = x^2+y^2, \ a \neq 0$

$b = x^2y^2$

$2(x^4+2x^2y^2+y^4) + x^2y^2 = \frac{9}{4}$

$D = 2-2=0$

$2(x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = \frac{9}{4}$

$\left(y - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$

$\begin{cases} \dfrac{1}{a} + b = \dfrac{5}{4} \quad | \cdot a \\ 2a^2 + b = \dfrac{9}{4} \end{cases}$

$\begin{cases} ab + 1 = \dfrac{5}{4}a \\ 2a^2+b = \dfrac{9}{4} \end{cases}$

$\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2}$

$a\left(b - \frac{5}{4}\right) = -1$

$b = \frac{5}{4} - \frac{1}{a} = \frac{5a-4}{4a}$

$a = -\dfrac{1}{\frac{4b-5}{4}} = -\dfrac{4}{4b-5}$

$2a^2 + \frac{5a-4}{4a} = \frac{9}{4} \quad | \cdot 4a$

$2a^2 - \frac{1}{a} = 1$

$8a^3 + 5a - 4 = 9a$

$\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} =$

$8a^3 - 4a - 4 = 0$

$D_1 = 1 - 2 = \frac{2-1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$2a^3 - a - 1 = 0 \qquad a = 1$

$(2a^2+2a+1)(a-1) = 0$

$2a^3 a - 1 \,|\,$

$\left[a = 0 \right.$

$\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2}$

$$\begin{array}{r|l} -2a^3 + 0a^2 - a - 1 & a-1 \\ \hline 2a^3 - 2a^2 & 2a^2+2a+1 \\ \hline -2a^2 - a & \\ 2a^2 - 2a & \\ \hline -a - 1 & \\ a - 1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$2a^3 - \cancel{2a^3} + 2a^2 - 2a + a +$

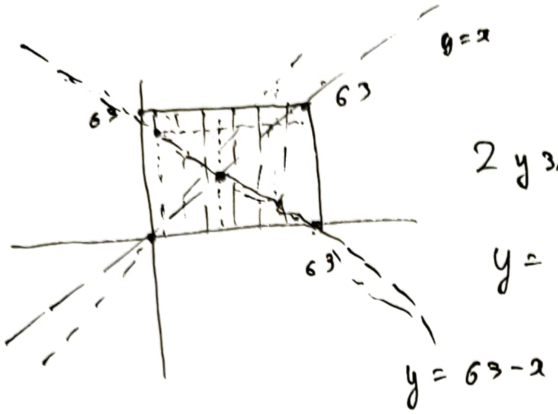
$2a^3 - a - 1$

$xy = \pm\frac{1}{2}$

$x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 1$

Черновик

2.



2 узла сетки.

$y = x$, $y = 63 - x$

для одного из узлов: $\left[\begin{array}{l} x = y \\ x = 63 - y \end{array}\right.$ | $x \le 62$; $x \ge 1$; $y \le 62$; $y \ge 1$

В $\begin{cases} 1 \le x \le 62 & - 62 \text{ точки} \\ 1 \le y \le 62 & - 62 \text{ точки.} \end{cases}$

случаи: 1) узел на $y=63-x$, другой не на $y=x$, $y=63-x$

2) узел на $y = x$

3) оба на $y = 63 - x$

4) оба на $y = x$

5) один на $63 - x$, другой на $y = x$

1) 62 | без 61 точки без 61 точки — без 122 точек

$62 \cdot 62$ – всего точек

$62^2 - 61 \cdot 3 = 62^2 - 183$

61

$\cancel{62 \cdot 62 = 124 + 152 = 1644}$,

$62 \cdot 62$: 124, 372, 3844

$3844 - 183 = \boxed{3661}$

~~361~~