Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211006288**

ID профиля: **267020**

Вариант 12

Чистовик. Лист №1.

Задача №2.

$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+3=2\sqrt{4+3x-x^2}$

$\begin{cases} x+1\geq 0 \\ 4-x\geq 0 \\ (x+1)(4-x)\geq 0 \end{cases} \Rightarrow x\in[-1;4]$

$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}=2\sqrt{4+3x-x^2}-3$

$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}=2\sqrt{(x+1)(4-x)}-3$

Пусть $\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}=t$, тогда $t^2=x+1-2\sqrt{(x+1)(4-x)}+4-x=$

$=-2\sqrt{(x+1)(4-x)}+5 \Rightarrow -t^2=2\sqrt{(x+1)(4-x)}-5$

$2\sqrt{(x+1)(4-x)}-5=-t^2+2$

$t=-t^2+2$ $\qquad$ $t^2+t-2=0$

$\cancel{t^2+t+2=0}$ $\qquad$ $D=b^2-4ac=1+8=9$

$t_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-1\pm3}{2} \Rightarrow$

$t_1=-2;\ t_2=1 \Rightarrow$

$\left[\begin{array}{l}\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}=1 \\ \sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}=-2\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=3 \\ \varnothing\end{array}\right.$

Ответ: 3

211006288 (U267020 M1275612)

Чистовик - лист №1

Задача №3.

$2a^2 - 2ax - 6ay + x^2 + 2xy + 5y^2 = 0$ — точка A

$ax^2 + 4a^2x - ay + 4a^3 + 2 = 0$

1) $ay = ax^2 + 4a^2x + 4a^3 + 2 \quad | : a \neq 0$

$y = x^2 + 4ax + 4a^2 + \frac{2}{a}$

$y = (x + 2a)^2 + \frac{2}{a}$

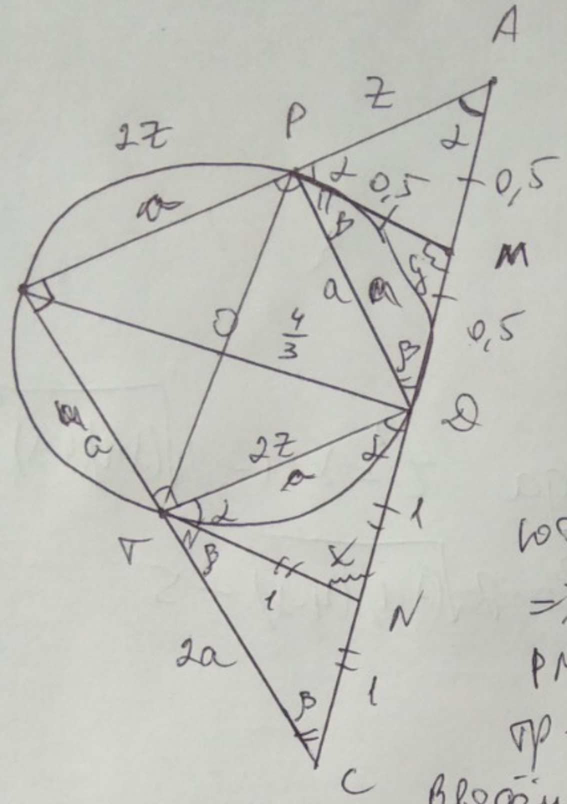
$B(x_0; y_0) = B(-2a; \frac{2}{a})$

2) $x + y = 3 \Leftrightarrow y = -x + 3$

лист №3

Чистовик - лист №2,

Задача №1.



Дано: $\triangle ABC$; Окр$(O; OB)$

BD – диаметр; Окр $\cap AB = P$;

Окр $\cap BC = T$; M – середина AD;

N – середина CD;

$PM \parallel TN$

1) Найти: $\angle ABC$

Решение:

$\angle BTD = \angle BPD = 90°$, т.к. они опираются на диаметр $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle DTC$ и $\triangle DPA$ – прямоуг.

PM и TN – медианы в прямоуг. тр-ке $\Rightarrow TN = DN = CN$ и $PM = AM = MD$

Введём углы α; β; x; y.

Т.к. $PM \parallel TN$, то $x + y = 180°$ (односторонние)

В р/б тр-ках $\triangle DTN$ и $\triangle DPM$: $\begin{cases} 2\beta + y = 180° \\ 2\alpha + x = 180° \end{cases}$

$2(\beta + \alpha) + x + y = 360$

$2(\beta + \alpha) + 180 = 360° \Rightarrow$

$\beta + \alpha = 90° \Rightarrow \angle PDT = 90°$

$BPDT$ – вписанный 4-угольник $\Rightarrow \angle ABC + \angle PDT = 180°$, но т.к. $\angle PDT = 90°$, то $\angle ABC = 90°$

2) $MP = \frac{1}{2}$; $NT = 1$; $BD = \frac{4}{3}$. Найти: S_{ABC}

Решение:

$AC = 2TN + 2MP = 2 + 1 = 3$

~~BPDT - квад~~ $DT \parallel AB$, т.к. $\angle DTC = \angle ABC$ (накрест лежащие)

$\Rightarrow \angle BAC = \angle TDC = \alpha \Rightarrow \angle ACB = \beta \Rightarrow \angle NTC = \beta$ и $\angle APM = \alpha$

Значит $\triangle APD \sim \triangle DTC$ с $k = 2$

Тогда ... $DT = 2z$ ... a; $AP = z$; $PD = a$; $CT = 2a$

черновик.

$\frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{2\sqrt{4-x}} = 0$ $\qquad \sqrt{4-x} + \sqrt{x+1} = 0 \quad \varnothing$

$2\sqrt{4-x} + 2\sqrt{x+1} = 0 \quad \varnothing$

На $[-1;4]$ функция $\nearrow$

$\left(2\sqrt{4+3x-x^2}\right)' = 0$

$\frac{6-4x}{\sqrt{4+3x-x^2}} = \frac{2\sqrt{4-x}+2\sqrt{x+1}}{4\sqrt{4+3x-x^2}} \Big| \cdot 4$

$2 \cdot \frac{1}{\sqrt{4+3x-x^2}} \cdot (3-2x)$

$= \frac{6-4x}{\sqrt{4+3x-x^2}} = 0; \qquad x = 1{,}5$

$6-4x = 8\sqrt{4-x} + 8\sqrt{x+1} \Big| :2$

На $[-1;4]$: $\quad 3-2x = 4\sqrt{4-x} + 4\sqrt{x+1}$

y': -1 $+$ $1{,}5$ $-$ 4

y: $\nearrow$ $\searrow$

$\left(2\sqrt{4+3x-x^2}\right)'$

~~$\sqrt{x+1} - 4 - 1$~~

$\frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{4-x}} \cdot (-1) = \qquad = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{4+3x-x^2}} \cdot (-2x+3)$

$y' = 0.$

$\frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{4-x}} \qquad = \frac{-2x+3}{\sqrt{4+3x-x^2}} = 0$

211006288 (U267020 M1275612)

$-2x+3=0; \quad x = 1{,}5$

$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+3=2\sqrt{(x+1)(4-x)}$

$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+\cancel{x}=2\sqrt{(x+1)(4-x)}-3$

$\cancel{x}+1-2\sqrt{(x+1)(4-x)}+4-\cancel{x}=4(x+1)(4-x)-12\sqrt{(x+1)(4-x)}+9$

$\sqrt{(x+1)(4-x)}=t$

$5-2t=4t^2-12t+9$

$\cancel{4t^2-10t+4=0}$

$\cancel{AB^2}$ $AP^2=1-PD^2$

$AP^2=\frac{16}{9}-BP^2$

$BP^2+PD^2=\frac{16}{9}$

$$\begin{cases} BP^2+PD^2=\frac{16}{9} \\ DT^2+TC^2=4 \end{cases}$$

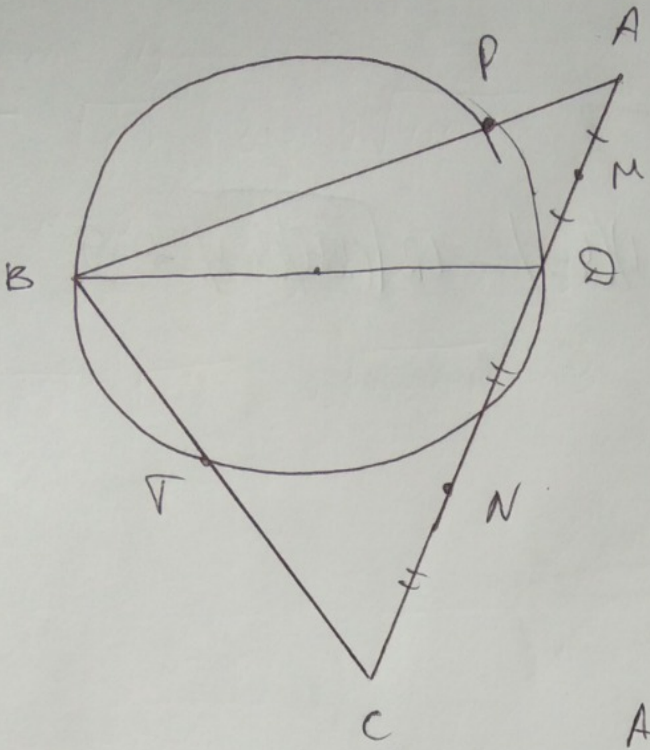
x+

16

16+

211006288 (U267020 M1275612)

Черновик



$$\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}\sqrt{4-x}}-\frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{x+1}\sqrt{4-x}}=2-\frac{3}{\sqrt{(x+1)(4-x)}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{4-x}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}=2-\frac{3}{\sqrt{x+1}\sqrt{4-x}}$$

Дано: BD – диам.

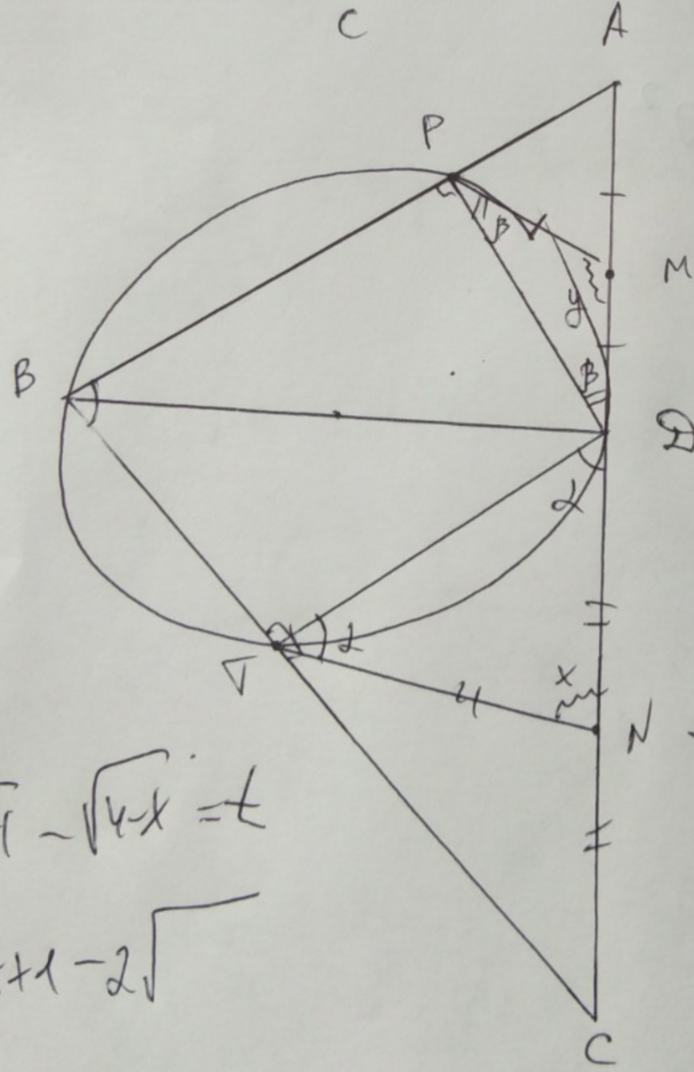
M, N – сер.

$PM \parallel TN$

Найти: $\angle ABC$

$MP=\frac{1}{2}$; $NT=1$; $BD=\frac{4}{3}$

Найти: S_{ABC}.



В пр. тр-ке

TN и PM – медианы

$x+y=180^\circ$

$2\beta+y=180^\circ$

$2\alpha+x=180^\circ$

$2\beta+2\alpha+180=2\cdot180$

$2\beta+2\alpha=180^\circ$

$\alpha+\beta=90^\circ \Rightarrow$

$\angle PDT$ – прямой $\Rightarrow$

$\angle ABC$ – прямой.

$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}=t$

$t^2=x+1-2\sqrt{}$

211006288 (U267020 M1275612)

~~Чистовик. Лист №1.~~ Черновик.

Задача №2.

$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+3=2\sqrt{4+3x-x^2}$

1) ОДЗ: $4+3x-x^2\geq 0$

$(x+1)(4-x)\geq 0$

$-1 \quad 4 \quad x$

$x\in[-1;4]$ Заметим, что это условие удовлетворяет и выполнению нер-ств $x+1\geq 0$ и $4-x\geq 0$

2) $\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}=2\sqrt{4+3x-x^2}-3$

$x+1-2\sqrt{-x^2+3x+4}+4-x=4(4+3x-x^2)-12\sqrt{-x^2+3x+4}+9$

$5-2\sqrt{-x^2+3x+4}=4(-x^2+3x+4)-12\sqrt{-x^2+3x+4}+9$

Пусть $\sqrt{-x^2+3x+4}=t$, тогда:

$5-2t=4t^2-12t+9 \Leftrightarrow 4t^2-10t+4=0 \Leftrightarrow$

$2t^2-5t+2=0$

$D=b^2-4ac=25-16=9$

$t_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{5\pm3}{4} \Rightarrow t_1=2;\ t_2=\frac{1}{2} \Rightarrow$

$\left[\begin{array}{l}-x^2+3x+4=4\\ -x^2+3x+4=\frac{1}{4}\quad |\cdot 4\end{array}\right.$

$-4x^2+12x+16=1 \qquad 18^2$

$-4x^2+12x+15=0$

$D=b^2-4ac=144+240=384$

$\begin{array}{r}\times\ 18\\ 18\\ \hline +\ 144\\ 18\ \\ \hline 324\end{array}$

211006288 (U267020 M1275612)

Черновик.

$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+3=2\sqrt{4+3x-x^2}$ ОДЗ: $x\in[-1;4]$

$\left[\begin{array}{l}(4-x)(x+1)=9\\(4-x)(x+1)=4\end{array}\right.$

1) $4+3x-x^2\geq0$

$-x^2+3x+4=0$

$x^2-3x-4=0$

$\begin{cases}x_1+x_2=3\\x_1\cdot x_2=-4\end{cases}\Rightarrow x_1=-1;\ x_2=4$

-1 4

$\sqrt{(4-x)(x+1)}=t$

$\Rightarrow x=3$

$t^2=5t-6$

$x=$

$t^2-5t+6=0$

$\sqrt{x+1}=u$

$\sqrt{4-x}=v$

$t_1=3;\ t_2=2$

$=\sqrt{-(x+1)(x-4)}=\sqrt{(x+1)(4-x)}$

$D=b^2-4ac$ $=36+64=100$

$u-v+3=2uv$

$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=$ $=\frac{-6\pm10}{-4}$

$D=b^2-4ac=$ ~~24~~

$36+88=144$ 124

$x_1=4;\ x_2=-1$

$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+3=2\sqrt{x+1}\sqrt{4-x}$

$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}=2\sqrt{x+1}\sqrt{4-x}-3$

$x+1-2\sqrt{x+1}\sqrt{4-x}-4+x=4(x+1)(4-x)-12\sqrt{x+1}\sqrt{4-x}+9$

$x+1-2\sqrt{x+1}\sqrt{4-x}-4+x-4(x+1)(4-x)+12\sqrt{x+1}\sqrt{4-x}-9=0$

$-x^2+3x-5=0$

$x+1-2\sqrt{x+1}\sqrt{4-x}-4+x-4(-x^2$

$-2x^2+6x+11=5\sqrt{(x+1)(4-x)}$

$x^2-3x+5=0$

$-x^2+3x+4=9$

$D=b^2-4ac<0$

$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+3=2\sqrt{4+3x-x^2}$

$-4x^2+12x+16=10\sqrt{(x+1)(4-x)}-6$

$-2x^2+6x+8=5\sqrt{(x+1)(4-x)}-6$

$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}=2\sqrt{4+3x-x^2}-3$

$-(x-4)(x+1)$

$x+1-2\sqrt{x+1}\sqrt{4-x}+4-x=4(4+3x-x^2)-12\sqrt{(x+1)(4-x)}+9$

$(4-x)(x+1)$

4   5

$16+12x-4x^2-12\sqrt{(x+1)(4-x)}+9-\cancel{x}-1+2\sqrt{(x+1)(4-x)}-4+\cancel{x}$ $=0$

$16+12x-4x^2-10\sqrt{(x+1)(4-x)}+6=0$

$=5\sqrt{(x+1)(4-x)}-6$

$-4x^2+12x+22=10\sqrt{(x+1)(4-x)}$

Чистовик - Лист №2.

Чистовик. Лист №3.

Из того, что в 4-х угольнике все углы прямые:

$BP = 2z$; $BT = a$

Тогда $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 3z \cdot 3a = \frac{9}{2} az$

Из ΔPDT:

$\left(\frac{4}{3}\right)^2 = a^2 + 4z^2$

$\frac{16}{9} = a^2 + 4z^2$

Также: из ΔDTC: $(2)^2 = (2z)^2 + (2a)^2$

$\begin{cases} \frac{16}{9} = a^2 + 4z^2 \\ 4 = 4z^2 + 4a^2 \end{cases}$

$\frac{16}{9} - \frac{36}{9} = -a^2$; $\frac{-20}{9} = -a^2$; $a^2 = \frac{20}{9} \Rightarrow a = \frac{2\sqrt{5}}{3}$

$\frac{16}{9} = \frac{20}{9}$

$\begin{cases} a^2 + z^2 = 1 & \text{из } \Delta APD \\ a^2 + 4z^2 = \frac{16}{9} & \text{из } \Delta APD. \end{cases} \Rightarrow 3z^2 = \frac{7}{9} \Rightarrow z^2 = \frac{7}{27} \Rightarrow z = \sqrt{\frac{7}{27}}$

$\Rightarrow a^2 + \frac{7}{27} = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{20}{27} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{20}{27}}$.

$S_{ABC} = \frac{9}{2} \cdot \sqrt{\frac{20}{27}} \cdot \sqrt{\frac{7}{27}} = \frac{9}{2} \cdot \frac{\sqrt{140}}{\cancel{27}\,3} = \frac{\sqrt{140}}{6} = \cancel{2\sqrt{}}$

Ответ: $S_{ABC} = \frac{\sqrt{140}}{6}$; $\angle ABC = 90^\circ$

Черновик.

$2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0$ – точка A

$ax^2+4a^2x-ay+4a^3+2=0$ – парабола с вершиной B

$x+y=3 \Leftrightarrow \boxed{y=-x+3}$

$4a^2(x+a)$; $ay=ax^2+4a^2x+4a^3+2 \quad |:a$

$=(x+2a)^2$

$y=x^2+4ax+4a^2+\frac{2}{a}$

$x_0: B=\frac{-b}{2a}=\frac{-4a}{2}=-2a$

$y_0: B=4a^2-8a^2+4a^2+\frac{2}{a} \quad =\frac{2}{a}$

$B\left(-2a;\frac{2}{a}\right)$

$a(\cancel{2a-2x-6y})\cancel{=-x^2}$

$x^2+2xy+5y^2=(x+y)^2+4y^2$

$\cancel{x^2-2ay} \quad \cancel{x^2-2ax+a^2+y^2-6ay}$

$x^2-2ax+a^2+3y^2-6ay+a^2 \quad +y^2$

$(x^2-2ax+a^2)+(4y^2-8ay+a^2)+2ay+2xy=0$

$\cancel{(x-a)^2+(2y-a)^2+2y(x+a)}=0$

$a^2+a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+4y^2+y^2$

$(x+y)^2+(2y-a)^2+a(a-2y-2x)$

$(x+y)^2+(2y-a)^2-2ay-2ax+a^2=0$

$4y^2-4ay+a^2$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006288**

ID профиля: **267020**

Вариант 12

$$\begin{array}{r} 226\,920 \\ +\ 223\,200 \\ \hline 450\,120 \end{array}$$

450 120

226 000 + 223 000 =

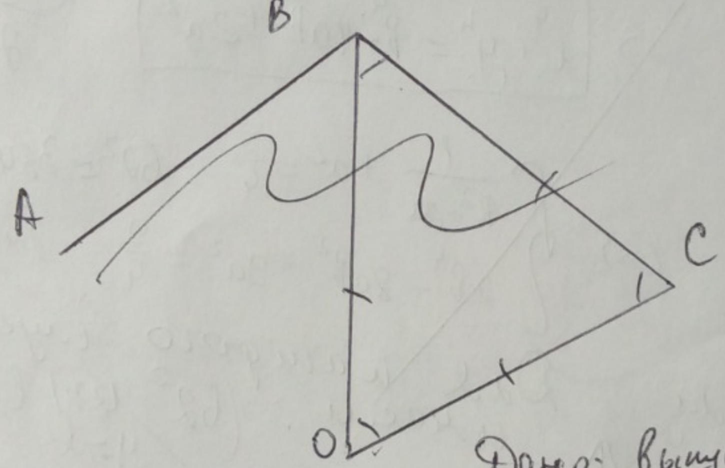
449 000 + 1120

$$\begin{array}{r} 1891 \\ +\ 2 \\ \hline 3782 \end{array}$$

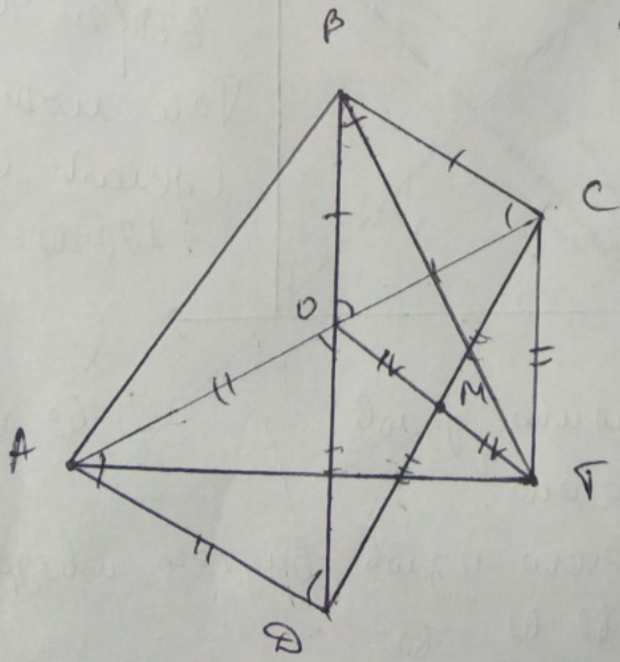
1800 + 1800 = 3600 + 180 = 3780 + 2

$$\begin{array}{r} 450\,120 \\ +\ 3782 \\ \hline 453\,902 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 782 \\ +\ 120 \\ \hline 902 \end{array}$$



Дано: выпук, 4-угол ABCD;
AC ∩ BD = O
△BOC и △AOD – р/с
M – середина CD
T симм O отн M
Доказать: △ABT – р/с.



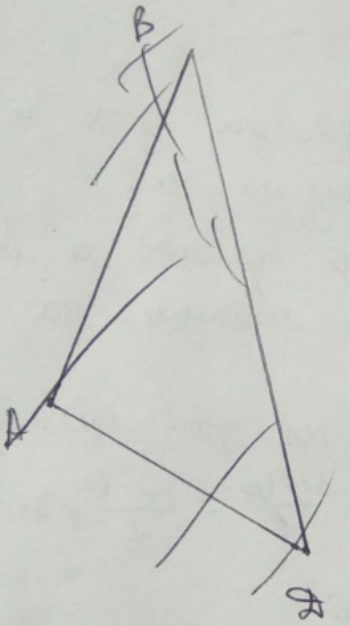
AB = CD из р-ва
△ABO и △COD
BD = AC

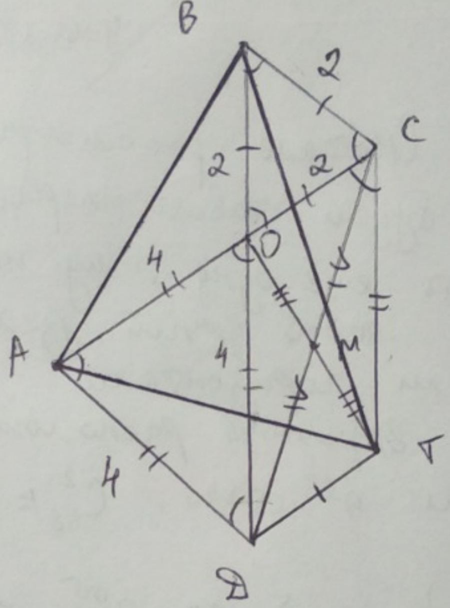
Осталось просуммировать полученные способы:

$n = 2 \cdot 1891 + 226920 + 223200 = 3782 + 450120 = 453902$ способа.

Ответ: 453902 способа

Задача №6.





Дано: ABCD - выпукл. 4-х угольник; $AC \cap BD = O$; $\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ - равносторонние; M - середина CD; T симм. O отн M. ($OM = MT$)

1) Доказать: $\triangle ABT$ – равносторонний.

Док-во:

Рассмотрим $\triangle ABO$ и $\triangle COD$: они равны по 2ум сторонам и углу между ними $\Rightarrow \boxed{AB = CD}$

Рассмотрим $\triangle OMD$ и $\triangle CMT$: $\boxed{OD = CT}$ из р-ва тр-ков

~~$\triangle BOT = \triangle BCT$ по тре~~

$\triangle COM = \triangle DTM$ по 2м сторонам и углу между ними $\Rightarrow$

$DT = CO$, а так же $AC \parallel DT \Rightarrow \angle ADT = 180° - 60° = 120° \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ODT = 60° \Rightarrow \angle OCT = 60° \Rightarrow \angle BCT = 120°$

Рассмотрим $\triangle BCT$ и $\triangle ADT$: они равны по 2м сторонам и углу $\Rightarrow \boxed{AT = BT}$ $\angle AOB = 180° - 60°$ (как смежный) $= 120°$

Рассмотрим $\triangle BCT$ и $\triangle AOB$: они равны по 2м сторонам

Чистовик. Лист №1

Черновик.

Задача №4.

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2}+(xy)^2=\frac{5}{4} \\ 2x^4+2y^4+5(xy)^2=\frac{9}{4} \end{cases}$$

$3600 \cdot 62$: 72, 216, 223200

$3660 \cdot 62$: 732, 2196, 226920

$62 \cdot 62$: 124, 372, 3844

$3844 - 184 = 3660$

$31 \cdot 61$: 31, 186, 1891

Пусть $xy=a$; $x+y=b$

~~61+62~~

$61+62+61+60$

$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$

$b^2=x^2+y^2+2a \Rightarrow \boxed{x^2+y^2=b^2-2a} =$

$= 244$

$61+60+59$ ...

$(x^2+y^2)^2=x^4+2(xy)^2+y^4$

$(b^2-2a)^2=x^4+y^4+2a^2 \Rightarrow \boxed{x^4+y^4=b^4-4ab^2+2a^2}$

$\frac{1+61}{2}\cdot 61$

$=31\cdot 61$.

$60 \cdot 62$: 12, 36, ~~3720~~

$$\begin{cases} \frac{1}{b^2-2a}+a^2=\frac{5}{4} \\ 2b^4-8ab^2+4a^2+5a^2=\frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{b^2-2a}+a^2=\frac{5}{4} \\ 2b^4-8ab^2+9a^2=\frac{9}{4} \end{cases}$$

$62^2=3844-$

$244=3600$

поставим $2^{ой}$ узел на ещё

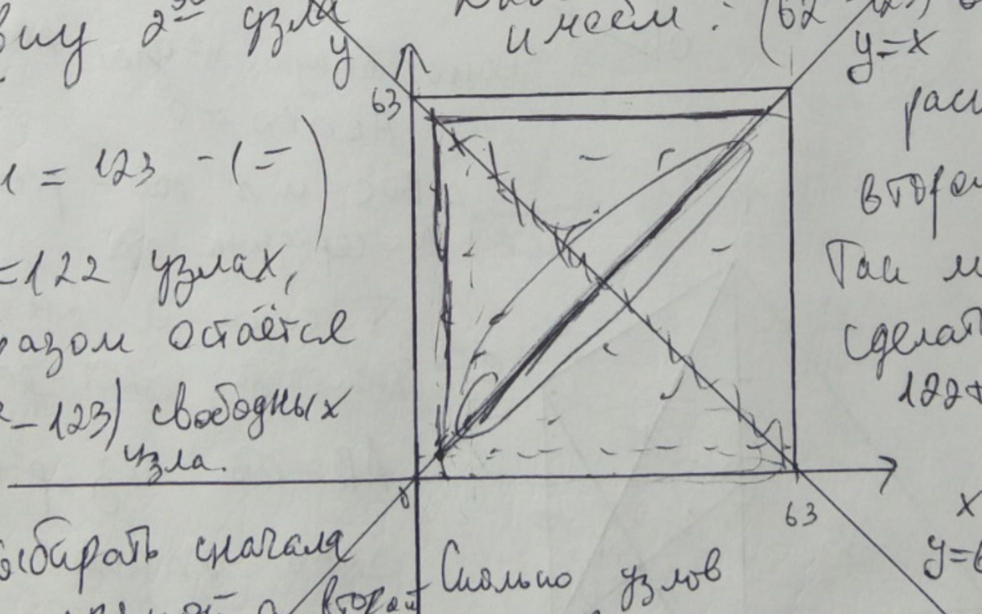
$(62+61=123-1=$

$=122$ узлах,

таким образом остаётся ещё (62^2-123) свободных узла.

Для каждого случая имеем: (62^2-123) возможных расположений второй точки

Так можно сделать ещё $122+62=184$



Будем выбирать сначала узел на прямой, а второй где-нибудь, кроме тех случаев когда они были бы на $1^{ой}$ вертикали или горизонтали.

Сколько узлов всего?

Всего узлов внутри квадрата $62\cdot 62=62^2$

$61+62+61$

И ... занимаем один узел и тем самым запрещаем

Чистовик. Лист №1.

Задача №4.

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \\ 2x^4 + 2y^4 + 5x^2y^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

Пусть $x^2+y^2 = a$; $x^2y^2 = b$

$(x^2+y^2)^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4$

$a^2 = 2b + x^4 + y^4 \Rightarrow x^4 + y^4 = a^2 - 2b$

$$\cancel{\begin{cases} \frac{1}{a} + b = \frac{5}{4} \quad | \cdot 5 \\ 2(a^2-2b) + 5b = \frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{a} + 5b = \frac{25}{4} \\ 2a^2 - 4b + 5b \end{cases}}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{a} + b = \frac{5}{4} \\ 2(a^2-2b) + 5b = \frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} + b = \frac{5}{4} \\ 2a^2 - 4b + 5b = \frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} + b = \frac{5}{4} \\ 2a^2 + b = \frac{9}{4} \end{cases} \Rightarrow$$

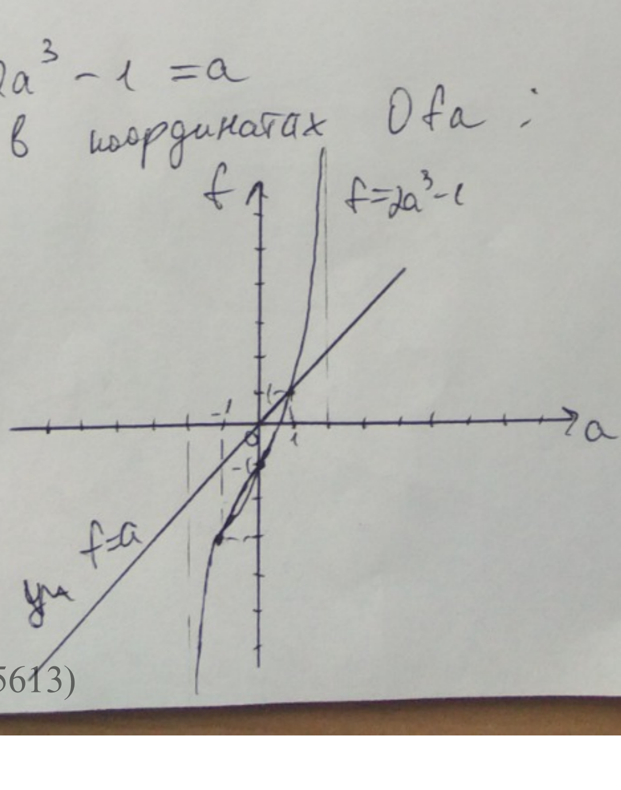
$$\cancel{\Rightarrow 2a^2 - \frac{1}{a} = 1 \quad | \cdot a \ ; \ 2a^3 - 1 = a}$$

$$\cancel{(2a^3-1)' = 6a^2 \ ; \Rightarrow \text{функция } y = 2a^3 -}$$

$\Rightarrow 2a^2 - \frac{1}{a} = 1 \Rightarrow 2a^3 - 1 = a$

построим графики в координатах $0fa$:

$f_1 = 2a^3 - 1$; $f_2 = a$



Из графика видно, что ур-ние имеет одно решение $\boxed{a=1}$

$\Rightarrow \frac{1}{1} + b = \frac{5}{4} \Rightarrow \boxed{b = \frac{1}{4}}$

211006288 (U267020 M1275613)

Чистовик - лист №5.

и углу между ними $\Rightarrow$ $\boxed{AB = BT}$

$AB = BT = AT \Rightarrow \triangle ABT$ - равносторонний.

2) $BC = 2$; $AD = 4$; Найти: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$.

Т-ма косинусов:

$AB^2 = 4^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \cos 120^\circ$

$AB^2 = 16 + 4 + 16 \cos 60^\circ$

$AB^2 = 20 + 16 \cdot \frac{1}{2} = 28 \Rightarrow AB = 2\sqrt{7} \Rightarrow BT = AT = 2\sqrt{7}$.

$\boxed{S_{ABT} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BT \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\sqrt{7} \cdot \cancel{2}\sqrt{7} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} = 7\sqrt{3}}$

$S_{ABCD} = 2S_{ABO} + S_{AOD} + S_{BOC}$

$S_{ABCD} = \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot 4 \cdot 2 \cdot \sin 120^\circ + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} \cdot 2 \cdot \sin 60^\circ =$

$= 8 \sin 60^\circ + 8 \sin 60^\circ + 2 \sin 60^\circ = 18 \sin 60^\circ = 18 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{7\sqrt{3}}{9\sqrt{3}} = \frac{7}{9}$

Ответ: $\frac{7}{9}$

211006288 (U267020 M1275613)

Черновик.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{b^2-2a}+a^2=\dfrac{5}{4} \\ 2b^4-8ab^2+9a^2=\dfrac{9}{4} \quad |:9 \end{cases}$$

$$\cancel{1-\frac{2}{9}(x^2+y^2)^2+\frac{2}{9}(xy)^2}$$

$b^2=t.$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{b^2-2a}+a^2=\dfrac{5}{4} \\ \dfrac{2}{9}b^4-\dfrac{8}{9}ab^2+a^2=\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

$$\frac{1}{t-2a}+a^2=\frac{5}{4}$$

$$2t^2-8at+9a^2=\frac{9}{4} \quad |:9$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{t-2a}+a^2=\dfrac{5}{4} \\ \dfrac{2}{9}t^2-\dfrac{8}{9}at+a^2=\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

$$\frac{1}{b^2-2a}-\frac{2}{9}b^4-\frac{8}{9}ab^2=1$$

$$\cancel{\frac{1}{b^2-2a}-b^2\left(\frac{2}{9}\right.}$$

$$\frac{1}{b^2-2a}-\frac{2}{9}b^2\left(b^2-4a\right)=1$$

$$b^2-4a=x^2+y^2+2xy-4xy=(x-y)^2$$

$$\frac{1}{t-2a}-\frac{2}{9}t^2+\frac{8}{9}at=1$$

$$1-\frac{2}{9}b^2(b^2-4a)(b^2-2a)=b^2-2a$$

$$1-\frac{2}{9}t^2(t-2a)+\frac{8}{9}at(t-2a)=$$
$$=t-2a$$

$$1-\frac{2}{9}(x^2+2xy+y^2)(x^2-2xy+y^2)=(x^2-2xy+y^2)$$

$$1-\frac{2}{9}(x^2+y^2-2xy)(x^2+y^2+2xy)=(x^2-2xy+y^2)$$

$$1-\frac{2}{9}\left((x^2+y^2)^2-(2xy)^2\right)=x^2-2xy+y^2$$

211006288 (U267020 M1275613)

Черновик

21.10

3c

$x^2+y^2=1$

$x^2y^2=\frac{1}{4}$

$y^2=\frac{1}{4x^2}$

$x^2+\frac{1}{4x^2}=1 \quad | \cdot 4x^2$

$4x^4+1=4x^2 \qquad x^2=t,$

$4t^2-4t+1=0$

$(2t-1)^2=0$

$t=\frac{1}{2} \qquad x^2=\frac{1}{2}$

$x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

$\boxed{x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}}$

1) $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$: $\frac{1}{2}+y^2=1$

$y^2=\frac{1}{2} \Rightarrow y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

2) $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$: $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

211006288 (U267020 M1275613)

Черновик

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + \frac{x^2y^2(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \frac{5}{4} \\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \cancel{\frac{1}{x^2+y^2}} \quad \frac{1}{x^2+y^2} + \frac{x^4y^2+x^2y^4}{x^2+y^2} = \frac{5}{4}$$

$$1 + u^2(v^2-2u) = \frac{5}{4}(v^2-2u)$$

$$4(1+x^4y^2+x^2y^4) = 5(x^2+y^2)$$

$$4+4x^4y^2+4x^2y^4 = 5x^2+5y^2$$

$$v^2 = x^2+2xy+y^2$$

$$x^2+y^2 = v^2-2xy = $$

$$= v^2-2u$$

$$xy = u$$

$$x+y = v$$

$$\begin{cases} \frac{1}{v^2-2u} + u^2 = \frac{5}{4} \\ 2v^4-4uv^2+4u^2+5u^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

$$2(x^4+y^4)$$

$$(x^2+y^2)^2 = x^4+2x^2y^2+y^4$$

$$\begin{cases} \frac{1}{v^2-2u} + u^2 = \frac{5}{4} & \Big| \cdot \frac{9}{5} \\ 2v^4-4uv^2+9u^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

$$(v^2-2u)^2 = x^4+2u^2+y^4 \Rightarrow$$

$$x^4+y^4 = (v^2-2u)^2-2u^2 =$$

$$= v^4 - 4uv^2 + 4u^2 - 2u^2 =$$

$$= v^4 - 4uv^2 + 2u^2$$

Черновик

$$2b^4-3ab^2+9a^2=(b^2-3a)^2+b^2(b^2-2a)$$

$$(b^2-3a)^2=b^4-6ab^2+9a^2=(b^2-3a)^2$$

$$+b^4-2ab^2=b^2(b^2-2a)$$

$$1+a^2(b^2-2a)=\frac{5}{4}(b^2-2a)$$

$$\begin{cases}1+a^2(b^2-2a)-\frac{5}{4}(b^2-2a)=0\\(b^2-3a)^2+b^2(b^2-2a)-\frac{9}{4}=0\end{cases}$$

$$\cancel{1+a^2(b^2-2a)}-\frac{5}{4}(b^2-2a)=(b^2-3a)^2\cancel{+b^2(b^2-2a)-\frac{9}{4}}$$

$$\frac{13}{4}+(b^2-2a)(a+b)\cancel{(a-b)}$$

$x^2+y^2=1$

$x^2y^2=\frac{1}{4}$

$$\begin{cases}\frac{5}{x^2+y^2}+5\cancel{x^2}y^2=\frac{25}{4}\\2x^4+2y^4+5\cancel{x^2}y^2=\frac{9}{4}\end{cases}$$

$=$

$$\frac{5}{x^2+y^2}-2x^4-2y^4=4$$

$$\frac{5}{x^2+y^2}-2(x^4+y^4)$$

$$\frac{5}{x^2+y^2}-2\left((x^2+y^2)^2-2x^2y^2\right)=4$$

$$\frac{5}{a}-2(a^2-\frac{9}{2}+4a^2)=4$$

$$\frac{5}{a}-10a^2+9=4$$

$$2a^2+b=\frac{9}{4}$$

$$b=\frac{9}{4}-2a^2$$

$$b=\frac{1}{4}$$

$$\begin{cases}\frac{5}{a}-2(a^2-2b)=4\\\frac{5}{a}+5b=\frac{25}{4}\\5b+2(a^2-2b)=\frac{9}{4}\end{cases}$$

$$5b+2a^2-4b=\frac{9}{4}$$

$x^2+y^2=a$

$x^2y^2=b$

$$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2.$$

$$\frac{5}{a}-10a^2=-5 \quad |\cdot a$$

$$5-10a^3=-5a$$

$$10a^3-5a-5=0 \quad |:5$$

$$2a^3-1-1=0$$

$$2a^3=2$$

$$a^3=1$$

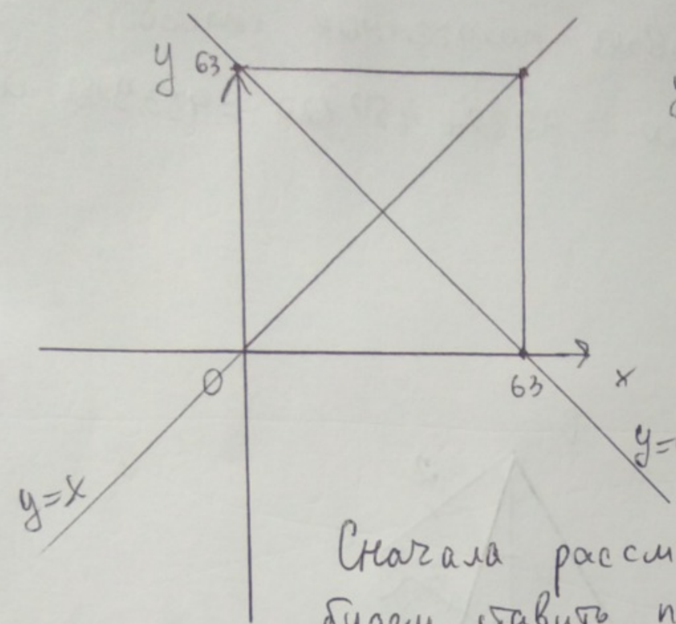
$$a=1$$

$$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$$

$$\begin{cases}\frac{5}{a}-2(a^2-2b)=4\\\frac{1}{a}+b=\frac{5}{4} \quad |\cdot 5\end{cases}$$

Чистовик. Лист №3.

Задача №5.



Всего мы имеем 62^2 узлов внутри границы квадрата.

Нам запрещено ставить две точки на одной горизонтали либо на одной вертикали

Сначала рассмотрим прямую $y=x$ и будем ставить первую точку на ней.

Мы можем выбрать ещё одну точку на этой прямой, а можем поставить в любой другой узел, не лежащий на одной вертикали или горизонтали.

Рассмотрим кол-во вариантов расположения на этой прямой: всего 62 места и 2 точки: $C_{62}^2 = \frac{62!}{60!2!} = \frac{31\cdot 60}{1} = \frac{62\cdot 61}{2} = 31\cdot 61 = \boxed{1891}$

Аналогично, $\boxed{1891}$ способ на 2ой прямой

Выбирая один узел, мы запрещаем 61+62 узла для расположения второй точки + мы уже посчитали варианты для случая, когда вторая точка лежит на этой же прямой ~~y=x или y=63-x~~

Итого, вариантов для расположения 2ой точки: $62^2-184=3660$ и это число умножаем на 62 возможных варианта расположения точки на диагонали. $3660\cdot 62=\boxed{226920}$

Теперь, при рассмотрении начального положения первой точки на прямой $y=63-x$ следует учитывать уже посчитанные варианты при использовании первой. (т.е. нельзя одно и то же расположение точек считать два раза)

Выбираем узел на прямой $y=63-x$. Запрещаем 61+62 узла на одной вертикали или горизонтали + Запрещаем 61 узел на $y=63-x$ + Запрещаем (62-2) узла на прямой $y=x$. Пересечение двух прямых не лежит в узле, и нам повезло не рассматривать этот неудобный случай. Итого свободно узлов: $62^2-244=3600 \mid \cdot 62$ расположения точки. $3600\cdot 62=\boxed{223200}$

Чистовик. Лист №2

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2y^2=\frac{1}{4} \end{cases} ; \quad y^2=\frac{1}{4x^2}$$

$$x^2+\frac{1}{4x^2}=1 \quad | \cdot 4x^2$$

$$4x^4+1-4x^2=0 \Leftrightarrow \cancel{2x^2-2x} \Leftrightarrow (2x^2-1)^2=0$$

$$\Rightarrow 2x^2=1 \Rightarrow x^2=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

1) $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$: $\frac{1}{2}+y^2=1 \Rightarrow y^2=\frac{1}{2} \Rightarrow y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

2) $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$: $\frac{1}{2}+y^2=1 \Rightarrow y^2=\frac{1}{2} \Rightarrow y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

Ответ: 1) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

2) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

3) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

4) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$