Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211006265**

ID профиля: **195426**

Вариант 12

№3

~~Най~~ Выразим координаты точки B через a.

Уравнение параболы:

$y = x^2 + 4ax + 4a^2 + \frac{2}{a}$

$x_B = \frac{-4a}{2} = -2a$

$y_B = 4a^2 - 8a^2 + 4a^2 + \frac{2}{a}$

$y_B = \frac{2}{a}$

Найдём такие значения a при которых B ~~лежит~~ ниже прямой $x + y = 3$

$-2a + \frac{2}{a} < 3$ (точка лежит ниже прямой)

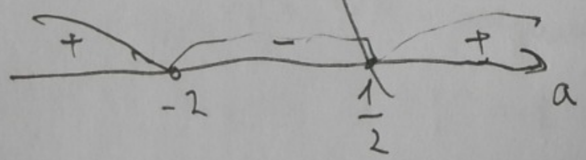
$-2a^2 + 2 - 3a < 0$

$2a^2 + 3a - 2 > 0$

$D = 9 + 16 = 25$

$a_1 = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}$

$a_2 = \frac{-3-5}{4} = -2$



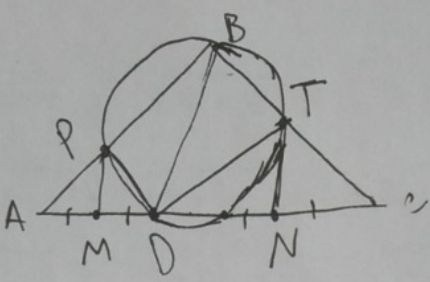
~~B выше прямой при $a \in (-\infty;$~~

~~B находится выше прямой при~~

B находится выше прямой при $a \in (-\infty; -2) \cup (0; \frac{1}{2})$

B находится ниже прямой при $a \in (-2; 0) \cup (\frac{1}{2}; +\infty)$

№1



а) BD – диаметр, значит $\angle BPD = \angle BTD = 90°$, т.к они опираются на диаметр, значит ΔAPD прямоугольный и ΔDTC тоже прямоугольный.
Пусть $\angle PAD = \alpha$, тогда $\angle APM = \alpha$, т.к $AM = PM$. $\angle PMA = 180 - 2\alpha$.
Т.к. $PM \parallel TN$ $\angle AMP = \angle DNT = 180 - 2\alpha$, ΔDNT – равнобедренный, значит $\angle TDN = \angle DTN = \alpha$.
В треугольнике PMD $\angle MPD = \angle PDM = 90 - \alpha$.
Найдём $\angle PDT$
$\angle PDT = 180 - \angle TDN - \angle PDM = 180 - 90 + \alpha - \alpha$
$\angle PDT = 90°$, значит $\angle PBT = 180 - \angle PDT = 90°$.
Ответ: $\angle ABC = 90°$

б)
Продлим MN и PT до пересечения в точке F.
В треугольнике NFT $PM \parallel TN$ и $PM = \frac{1}{2} TN$, значит PM – средняя линия. BTDP – прямоугольник, значит его диагонали равны. $BD = PT$.
$S_{PMD} = S_{APM}$, т.к PM – медиана. $S_{TNC} = S_{TNP}$, т.к TN – медиана.
$S_{PDT} = S_{PTB}$, т.к $\Delta PDT = \Delta PTB$ по двум катетам.
Значит $S_{MPTN} = \frac{1}{2} S_{ABC}$
$S_{PMTN} = \frac{3}{4} S_{FTN}$, т.к PM – средняя линия.
$S_{FTN} = \sqrt{p(p-FT)(p-NT)(p-FN)}$ $\quad p = \frac{FT + TN + FN}{2}$
Подставив числовые значения получим
$S_{FTN} = \frac{2\sqrt{35}}{9}$
$S_{PMTN} = \frac{\sqrt{35}}{6}$
$S_{ABC} = \frac{\sqrt{35}}{3}$
Ответ: $S_{ABC} = \frac{\sqrt{35}}{3}$

№2 Черновик

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$

ОДЗ
$x \geqslant -1$
$x \leq 4$

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 - 2\sqrt{4-x} \cdot \sqrt{x+1} = 0$

$(\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x})^2 + \sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} - 2 = 0.$

$(\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x})(\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 1) - 2 = 0.$

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} = t.$

$t(t+1) - 2 = 0.$

$t^2 + t - 2 = 0$

$(t-1)(t+2) = 0.$

$t = 1.$

$t = -2.$

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} = 1$

$\sqrt{x+1} = 1 + \sqrt{4-x}$

$x+1 = 1 + 4 - x + 2\sqrt{4-x}$

$2x - 4 = 2 \cdot \sqrt{4-x}$

$x - 2 = \sqrt{4-x}$

$x^2 - 4x + 4 = 4 - x.$

$x^2 - 3x = 0$

$x = 0$
$x = 3$

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} = -2$

$\sqrt{x+1} = -2 + \sqrt{4-x}$

$x+1 = 4 - x - 4\sqrt{4-x} + 4$

$2x - 7 = -4\sqrt{4-x}$

$7 - 2x = 4\sqrt{4-x}$

$49 - 28x + 4x^2 = 16 \cdot (4-x)$

$4x^2 - 12x - 15 = 0$

$D = 144 + 240 = 384$

$\sqrt{x+1} + 2 = \sqrt{4-x}$

$x + 1 + 4\sqrt{x+1} + 4 = 4 - x$

$4\sqrt{x+1} = -1 - 2x \quad x \in [-1; -\frac{1}{2}]$

$16x + 16 = 4x^2 + 4x + 1$

$4x^2 - 12x - 15 = 0.$

$D = 144 + 240 = 384 \vdots 3 \cdot 128$

$\sqrt{D} = 8\sqrt{6}$

$x_1 = \frac{12 + 8\sqrt{6}}{8} = \frac{3}{2} + \sqrt{6}$ не подходит

$x_2 = \frac{12 - 8\sqrt{6}}{8} = \frac{3}{2} - \sqrt{6}$

$x_2 \in [-1; -\frac{1}{2}]$, значит является корнем

Ответ: $x = 0; 3; \frac{3}{2} - \sqrt{6}.$

Чистовик Вариант 12 Математика 10 класс

№2

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+3=2\sqrt{4+3x-x^2}$$

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+3-2\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{4-x}=0.$$

$$\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}\right)^2+\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}-2=0$$

$t=\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}$

$t^2+t-2=0.$

$t=1$

$t=-2$

$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}=1.$

$\sqrt{x+1}=1+\sqrt{4-x}$

$x+1=1+2\sqrt{4-x}+4-x$

$2x-4=2\sqrt{4-x}$

$x-2=\sqrt{4-x}$

$x^2-4x+4=4-x$

$x^2-3x=0.$

$x=0$

$x=3$

ОДЗ

$x\geq -1$

$x\leq 4$

$\frac{-2x+1}{4}\geq 0$

$-\frac{x}{2}\geq\frac{1}{4}$

$x\leq -\frac{1}{2}$

$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}=-2$

$\sqrt{x+1}+2=\sqrt{4-x}$

$x+1+4\sqrt{x+1}+4=4-x$

$2x+1=-4\sqrt{x+1}$

$4x^2+4x+1=16x+16$

$4x^2-12x-15=0.$

$D=144+240=384$

$x_1=\frac{12+8\sqrt{6}}{8}=\frac{3}{2}+\sqrt{6}$ не подходит, т.к

$x_1>-\frac{1}{2}.$

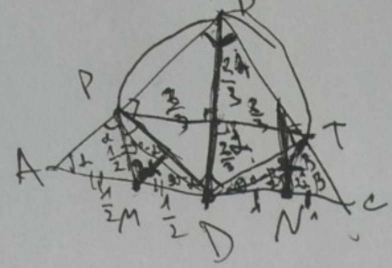
$x_2=\frac{12-8\sqrt{6}}{8}=\frac{3}{2}-\sqrt{6}$ подходит

Ответ: $x=0;\ 3;\ \frac{3}{2}-\sqrt{6}$

211006265 (U195426 M1276108)

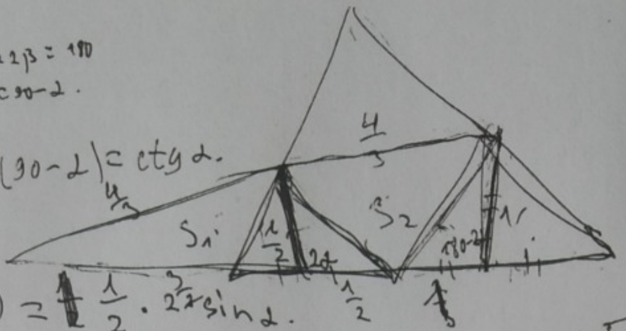
Черновик

№1.



$2\alpha+2\beta=180$
$\beta=90-\alpha$.

$tg(90-\alpha)=ctg\,\alpha$.



$PC^2=TC\cdot BC$
$AD^2=AP\cdot AB$

$PD=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sin\alpha$.

$DT=DT=1\cdot 2\cdot\sin(90-\alpha)$

$PD=\sin\alpha$

$DT=2\cos\alpha$.

$p=3\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$

$S_1=\sqrt{\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{7}{6}}=\frac{\sqrt{35}}{18}$

$S_2=3\cdot S_1=\frac{\sqrt{35}}{6}$

$S_{ABC}=2S_2=\frac{\sqrt{35}}{3}$

№3

Парабола имеет вид

$y=x^2+4ax+4a^2+\frac{2}{a}$

$x_B=\frac{-4a}{2}=-2a$

$y_B=4a^2-8a^2+4a^2+\frac{2}{a}=\frac{2}{a}$

B лежит ниже прямой $x+y=3$ при $a\in(-2;0)\cup(0;+\infty)$

B лежит выше прямой $x+y=3$ при $a\in(-\infty;-2)$

$2a(a-x-3y)+x^2+2xy+5y^2=0$.

$(x+y)^2+4y^2+2a^2-2ax-6ay=0$.

$(x+y)^2+2a(a-x)+2y(2y-3a)=0$.

$2-2x-6y+x^2+2xy+5y^2=0$.

$x=3-y$.

$2a^2-6a+2ay-6ay+y^2-6y+9$

$\cancel{2a^2-x(2a-x)}$

$2a^2-x(a-x)-5y(a-y)-ax-ay+2xy$

$\cancel{2x+5y}$

$(bx+cy+da)(ex+fy+ga)=5y^2+2xy+x^2-6ay-2ax+2a^2$

$c=\frac{5}{f}$

$b=\frac{1}{e}$

$dg=2$ $\quad bg+de=-2$

$be=1$ $\quad cg+df=-6$

$cf=5$

$bf+ce=2$

$\frac{f}{e}+ce=2$

$\frac{f}{e}+\frac{5e}{f}=2$

$f^2+5e^2=2ef$

$5e^2-2ef+f^2=0$.

$D=4-20\cdot$

21006265 (U195426 M1276108)

Черновик

$-(x-y)^2+2a^2+2ax-6ay+2x^2 \cancel{\ldots} + 6y^2$

$2a^2+2(x-a)+6(y-a)-(x-y)^2=0.$

$(2x+2y \quad)(\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}y$

$\frac{1}{2}-x-3y+x^2+2xy+5y^2$

$b=\frac{1}{e}$

$c=\frac{5}{f}$

$d=\frac{2}{g}$

$\frac{f}{e}+\frac{5e}{f}=2 \qquad f^2+5e^2=2ef$

$\frac{g}{e}+\frac{2e}{g}=-2 \qquad g^2+2eg+2e^2=0$

$\frac{5g}{f}+\frac{2f}{g}=-6 \qquad 5g^2+2f^2+6gf=0$

211006265 (U195426 M1276108)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006265**

ID профиля: **195426**

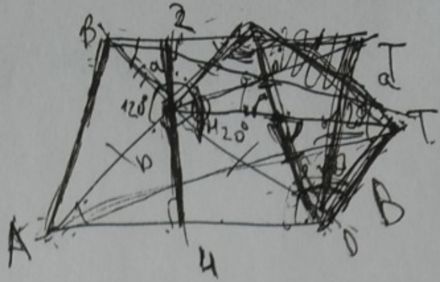
Вариант 12

Черновик.

$x^2 = x_1$ $\quad x_1 \geq 0$

$y^2 = y_1$ $\quad y_1 \geq 0.$

№6.



$\frac{1}{x_1+y_1} + x_1y_1 = \frac{5}{4}.$

$2x_1^2 + 2y_1^2 + 5x_1y_1 = \frac{9}{4}.$

$\frac{25}{4} - \frac{5}{x^2+y^2}$

$(2x^2+y^2)(x^2+2y^2) = \frac{9}{4}.$

$c^2 = a^2+b^2 - ab \cdot \cos 120°$

$AB^2 = a^2+b^2+\frac{ab}{2}$

$AT^2 = a^2+b^2+\frac{ab^2}{2}$

$AB = \sqrt{a^2+b^2+\frac{ab}{2}}$

$AB = \sqrt{4+16+4.}$

$AB = \sqrt{24.} = 2\sqrt{6}$

$S_{ABT} = 2\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$

$\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

$9\sqrt{3}$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{4}{3}.$

$$\begin{array}{r} \times\ 62 \\ 7321 \\ \hline 62 \\ 124 \\ 186 \\ 434 \\ \hline 453902 \end{array}$$

1 строка в 60 из которых 59 узлов и одинаково.

$62\cdot 2 \quad 62\cdot 2 - 1 \quad 62^2 - 61\cdot 4$

$4(31^2-61)$

$4(961-61)$

$4\cdot 900 = 3600$

$62\cdot 4 - 4$

$61\cdot 4.$

№5

~~Рассмотрим случай, когда только один узел лежит на диагонали квадрата, тогда выбрать его у нас $2\cdot 61 - 1$ способов $= 121$ спосо~~ ~~оставшихся узлов всего $61^2 - 2\cdot 61 + 1 = 59\cdot 61+1$, тогда Количество~~

~~Выбрать узел на сетке всего $2\cdot 62$ способов.~~

Выбрать узел на диагонали $2\cdot 62$ способов. если второй узел не лежит на диагонали выбрать его можно $60\cdot 60$ способами итого ~~$59\cdot 60+$~~ $124\cdot 3600$ способов. Теперь подсчитаем число комбинаций, в которых оба узла лежат на диагоналях их кол-во

$\frac{2\cdot 62\cdot(2\cdot 62-3)}{2} = 62\cdot 2\cdot 62 - 62\cdot 3 = 62\cdot 121$ вместе

$124\cdot 3600 + 62\cdot 121.$

$62\cdot 7321.$ Всего 453902.

211006265 (U195426 M1276109)

Чистовик

Вариант 12 Математика 10 класс

Часть 2

№2

Рассмотрим случай, когда только один узел лежит на диагонали. Выбрать узел на диагонали $2 \cdot 62$. Выбрать второй узел всего $60 \cdot 60$ способов, тогда всего способов выбрать 2 узла так, чтобы один лежал на диагонали, а второй - нет $62 \cdot 7200$ способов.

Рассмотрим случай, когда оба узла лежат на диагоналях. Выбрать первый узел $2 \cdot 62$ варианта, а второй $(2 \cdot 62 - 3)$ варианта. Т.к. для нас не имеет значения, в каком порядке расположены узлы всего вариантов выбора двух узлов на диагонали $62 \cdot 121$.

Сложив количество способов в двух случаях получим $62 \cdot 7321$ или 453302

Ответ: 453902 способа.

211006265 (U195426 M1276109)

Чистовик

Вариант 12

Математика 10 класс

Часть 2

№1.

Обозначим x^2+y^2 за z, тогда. $z \geqslant 0$

$$\begin{cases} \frac{1}{z} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \\ 2\cdot z^2 + x^2y^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

$2z^2 - \frac{1}{z} = 1.$

$2z^3 - z - 1 = 0$

$(z-1)(2z^2+2z+1) = 0.$

$2z^2+2z+1=0$ не имеет действительных корней, значит

$z = 1.$

$x^2+y^2 = 1.$

$$\begin{cases} \frac{1}{1} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \\ x^2+y^2 = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2y^2 = \frac{1}{4} \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

Решив систему получим

$x^2 = \frac{1}{2}$

$y^2 = \frac{1}{2}.$

Тогда корнями уравнения будут такие пары: $(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}})$; $(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}})$; $(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}})$ и $(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}})$

Ответ: $(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}})$; $(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}})$; $(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}})$; $(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Черновик

№5

Заменим x^2 на z $z>0$, а y^2 на $t>0$, тогда

$$\frac{1}{z+t}+zt=\frac{5}{4}.$$

$$2z^2+2t^2+5zt=\frac{9}{4}.$$

$$z^2t+zt^2-\frac{5}{4}z-\frac{5}{4}t+1=0.$$

$$(2z+t)(z+2t)=\frac{9}{4}.$$

$$z^2t+zt^2-\frac{5}{4}z-\frac{5}{4}t+1=2z^2+2t^2+5zt-\frac{9}{4}$$

$$z^2t-2z^2+zt^2-2t^2-\frac{5}{4}z-\frac{5}{4}t-5zt+\frac{13}{4}=0.$$

$$t(z^2+z(t^2-5t-\frac{5}{4})$$

$$(2z+t)(z+2t)$$

$$2z^2+5zt+2t^2-\frac{9}{4}=0.$$

$$D=25t^2-16t^2+18=9t^2+18.$$

$$z=\frac{-5t-3\sqrt{t^2+2}}{2}$$ не подходит, т.к. $z\geq 0$.

$$z=\frac{-5t+3\sqrt{t^2+2}}{2}$$

$$\frac{1}{-1,5t+1,5\sqrt{t^2+2}}+$$

$$x^2+y^2=t$$

$$\frac{1}{t}+x^2y^2=\frac{5}{4}.$$

$$2t^2+x^2y^2=\frac{9}{4}$$

$$2t^2-\frac{1}{t}=1.$$

$$2t^3-t-1=0.$$

$$t=1.$$

$$(t-1)(2t^2+2t+1)=0.$$

корней нет

$$D=4-8=-4.$$

$$x^2+y^2=1.$$

$$1+x^2y^2=\frac{5}{4}.$$

$$x^2y^2=\frac{1}{4}.$$

$$x^2+y^2=1$$

$$x^2=1-y^2$$

$$y^2-y^4=\frac{1}{4}.$$

$$t^2-t+\frac{1}{4}=0.$$

$$y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}.\quad x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

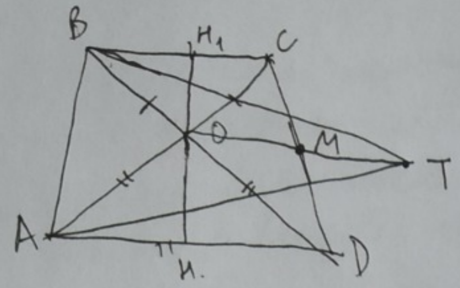
$$t=\frac{1}{2}\quad y^2=\frac{1}{2}.$$

$$y^2=t$$

Чистовик Вариант 12 Математика 10 класс

Часть 2

№3



а)

$\angle OCB = \angle OAD$, значит $BC \parallel AD$ и $ABCD$ - трапеция.

$OM = MT$, $CM = MD$ и $\angle OMC = \angle TMD$, значит $CO = TD$ и $\angle OCM = \angle TDM$.

Следовательно $OC \parallel TD$. Аналогично доказываем, что $OD = CT$ и $OD \parallel CT$.

$CO \parallel DT$, значит $\angle COD + \angle ODT = 180°$ $\angle ODT = 60°$, и $\angle ADT = 60°$.

Рассмотрим $\triangle ABO$ и $\triangle ATD$.

$BO = OC = DT$, $AO = AD$ и $\angle AOB = \angle ADT = 120°$, значит $AB = AT$.

При повороте на $60°$ вокруг точки A AO перейдёт в AD, значит AB перейдёт в AT и $\angle BAT = 60°$, значит $\triangle BAT$ равносторонний.

б)

Проведём высоты OH_1 и OH из точки O к сторонам BC и AD соответственно. Тогда HH_1 - высота трапеции.

$OH_1 = OC \cdot \sin 60° = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

$OH = OA \cdot \sin 60° = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.

$HH_1 = 3\sqrt{3}$

$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot HH_1 = 9\sqrt{3}$.

$AB = \sqrt{OB^2 + AO^2 - AO \cdot OB \cdot \cos 120°}$

$AB = \sqrt{4 + 16 - 8 \cdot (-\frac{1}{2})}$

$AB = \sqrt{24} = 2\sqrt{6} = AT$

$S_{ABT} = AB \cdot AT \cdot \sin 60°$

$S_{ABT} = 24 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{12\sqrt{3}}{9\sqrt{3}} = \frac{4}{3}$

Ответ: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{4}{3}$