Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211006240**

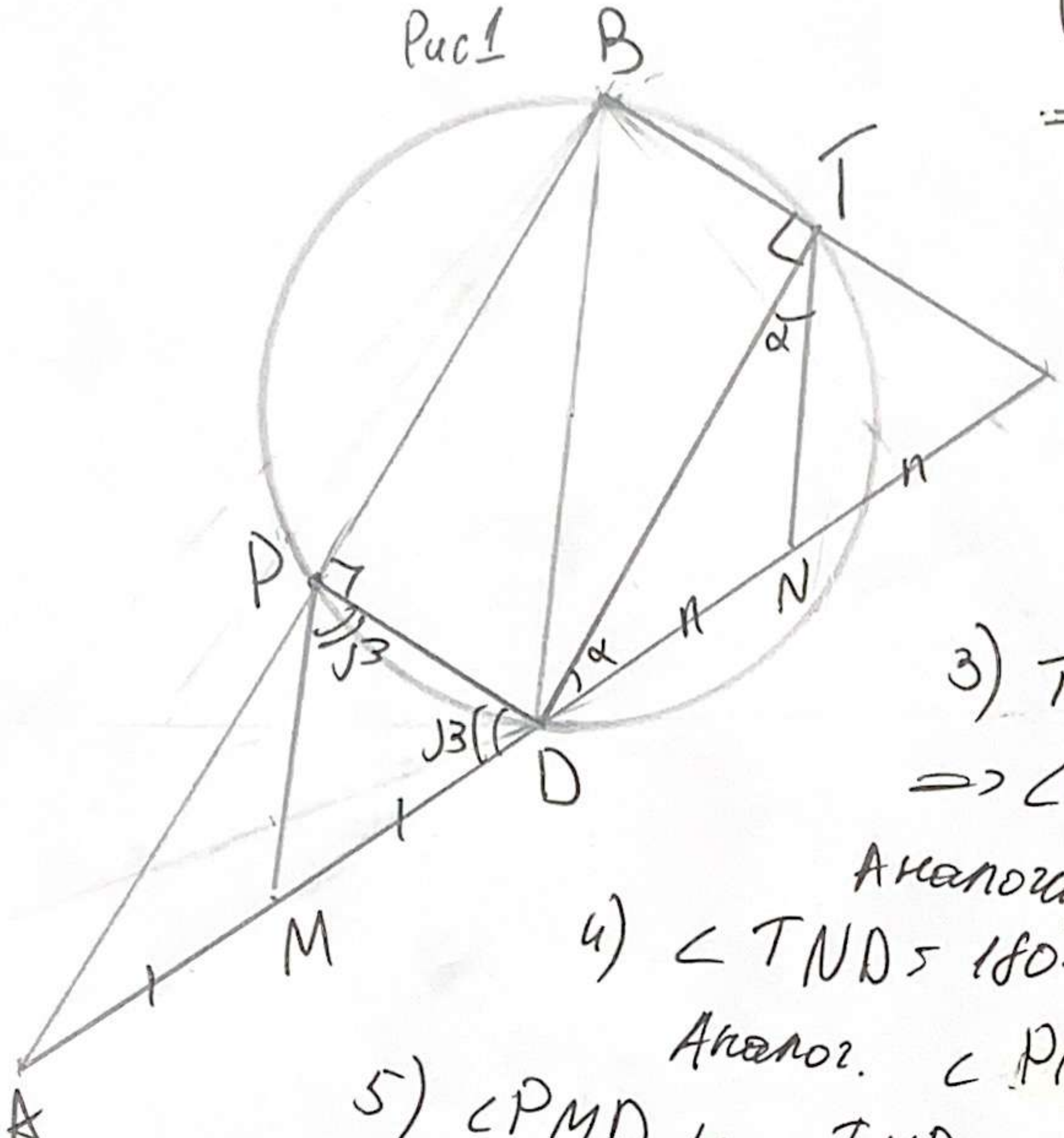
ID профиля: **849611**

Вариант 12

Чистовик

№1

Рис 1



1) $\angle BPD = \angle BTN = 90°$ (опираются на диаметр BD) => $\Rightarrow \triangle APD$ и $\triangle DTC$ прямоугольные

2) TN – медиана в прямоугольном треугольнике DTC => $TN = DN = NC$

Аналогично $PM = AM = MD$

3) $TN = ND \Rightarrow \triangle TND$ равнобедренный $\Rightarrow \angle DTN = \angle TDN = \alpha$ (углы при основании)

Аналогично $\angle MPD = \angle MDP = \beta$

4) $\angle TND = 180° - 2\alpha$ (сумма углов 180°).

Аналог. $\angle PMD = 180° - 2\beta$

5) $\angle PMD$ и $\angle TND$ – внутренние односторонние при параллельных PM и TN и секущей MN $\Rightarrow \angle PMD + \angle TND = 180°$

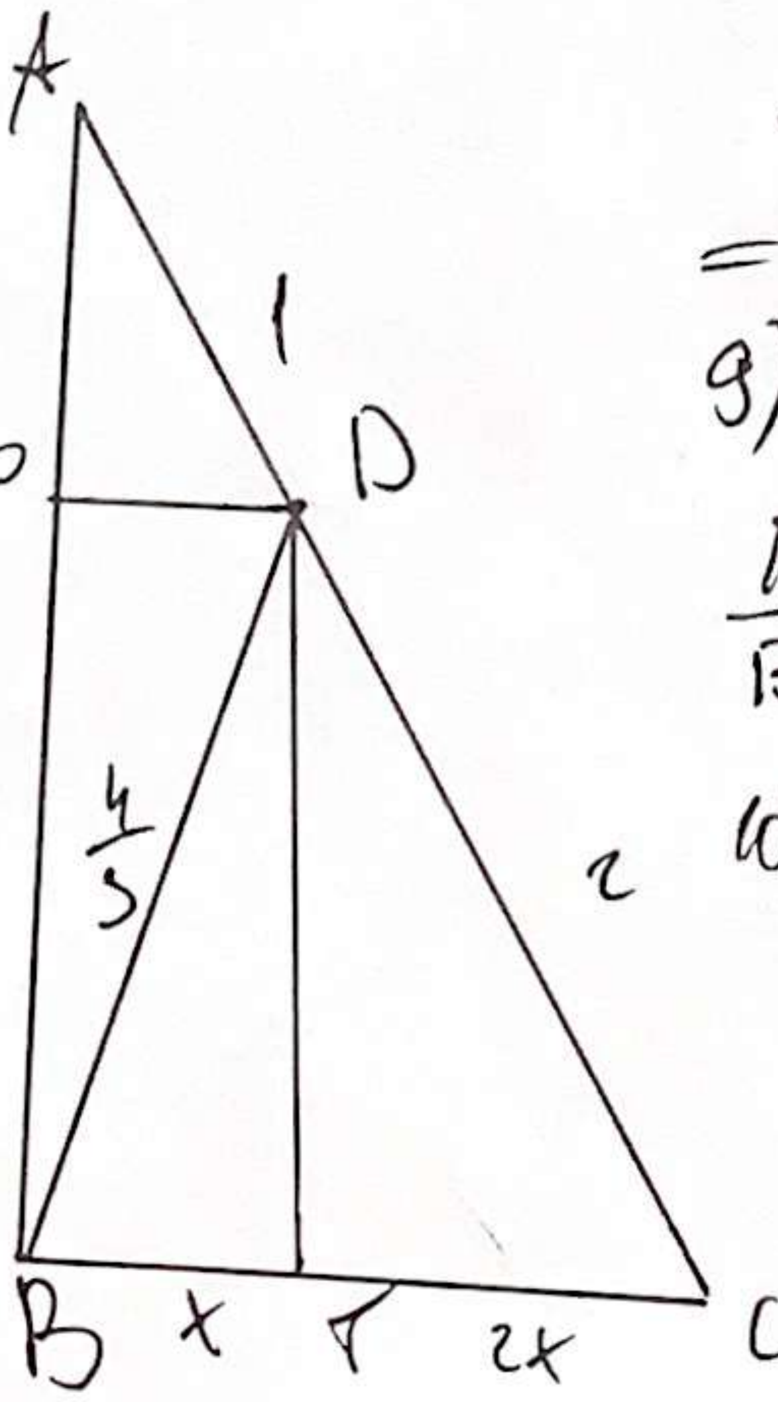
$180° - 2\alpha + 180° - 2\beta = 180$

$\alpha + \beta = 90°$

6) $\angle PDT = 180 - \alpha - \beta = 90° \Rightarrow \underline{\angle ABC = 90°}$ (PBTD вписан в окружность => сумма противоположных углов 180°)

7) $PM = \frac{1}{2} \Rightarrow AD = 1$ (см действие 2) ; $TN = 1 \Rightarrow DC = 2$.

Рис 2



8) Р-м Рис 2. $S_{PDTB} = \frac{1}{2} d^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{9} = \frac{8}{9} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{BDT} = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{9} = \frac{4}{9}$

9) По теор о пропорциональных отрезках:

$\frac{BT}{BC} = \frac{1}{3}$ $\left(\frac{AC}{AD} = \frac{3}{1}\right) \Rightarrow S_{BDC} = 3 \cdot S_{BDT} = \frac{4}{3}$

10) Аналогично $S_{ABC} = \frac{3}{2} \cdot S_{BDC} = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = \underline{2}$

1

Ответ: $\angle ABC = 90°$ $S_{ABC} = 2$

Чистовик

№2

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$

1) О,Д,З: 

$4+3x-x^2 = (4-x)(x+1)$

2) Пусть $t = \sqrt{x+1}$; $k = \sqrt{4-x}$; $t \geq 0$; $k \geq 0$

$t - k + 3 = 2tk$

3) Заметим, что $t^2+k^2 = (\sqrt{x+1})^2 + (\sqrt{4-x})^2 = 5$

4) Решим систему:

$$\begin{cases} t-k+3 = 2tk \\ 5 = t^2+k^2 \end{cases} - *$$

$* \quad t^2+k^2-2tk = 2-(t-k)$

$(t-k)^2 + (t-k) - 2 = 0$

По теореме Виета: $\left[\begin{array}{l} t-k=1 \quad (1) \\ t-k=-2 \quad (2) \end{array}\right.$

(1) $\begin{cases} t-k=1 \\ t^2+k^2=5 \end{cases}$ $\begin{cases} t=k+1 \\ 2k^2+2k-4=0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k=1 \\ k=-2, \varnothing \ (k \geq 0) \end{array}\right.$

$\sqrt{4-x} = 1 \Rightarrow \underline{x=3}$

(2) $\begin{cases} t-k=-2; \ k=t+2 \\ t^2+k^2=5; \ 2t^2+4+4t=5; \ 2t^2+4t-1=0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{-2+\sqrt{6}}{2} \\ t=\frac{-2-\sqrt{6}}{2}, \varnothing \ (t \geq 0) \end{array}\right.$

$\frac{D}{4} = 4+2 = 6$

$\sqrt{x+1} = \frac{-2+\sqrt{6}}{2}$; $x+1 = \frac{10-4\sqrt{6}}{4} \Rightarrow \underline{x = \frac{3}{2} - \sqrt{6}}$

5) Проверкой убеждаемся, что полученные ~~корни~~ значения принадлежат О,Д,З

Ответ: $3; \ \frac{3}{2} - \sqrt{6}$

2

№3 Чистовик

1) $x^2+2x(y-a)+5y^2+2a^2-6ay=0$

$\frac{D}{4}=(y-a)^2-5y^2-2a^2+6ay=0$ (т.к. это уравнение задаёт по условию точку)

$y^2+a^2-2ay-5y^2-2a^2+6ay=0$

$-4y^2-a^2+4ay=0$

$-(2y-a)^2=0$

$y=\frac{a}{2}$

2) $5y^2+2y(x-3a)+x^2+2a^2-2ax=0$

$\frac{D}{4}=x^2+9a^2-6ax-5x^2-10a^2+10ax=0$ (Аналогично пункту 1)

$-4x^2-a^2+4ax=0$

$-(2x-a)^2=0$

$x=\frac{a}{2}$ $\Rightarrow$ $A\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right)$, а значит A лежит на прямой $y=x$

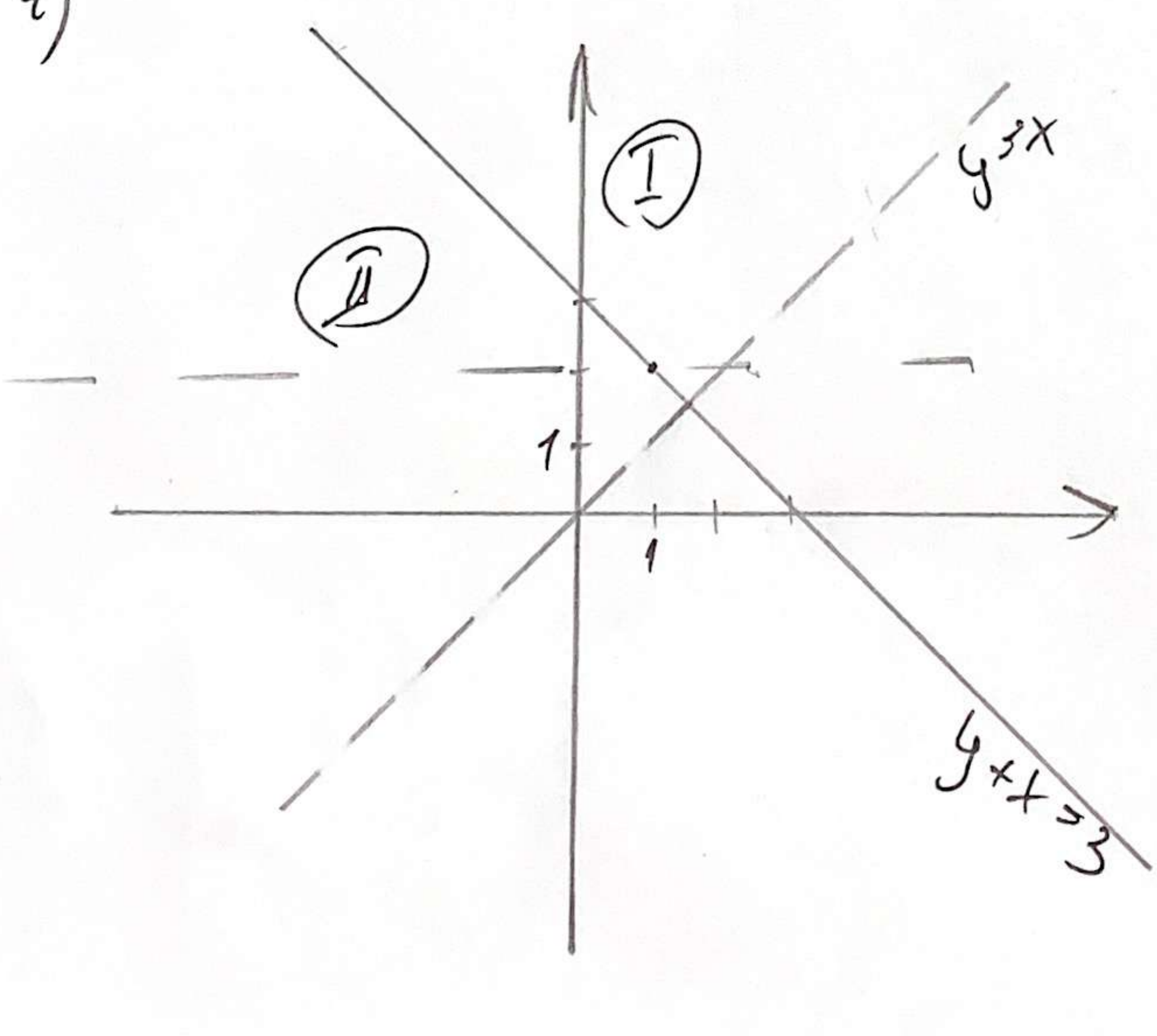
3) $ay=ax^2+4a^2x+4a^3+2$ — парабола $\Rightarrow a\neq0$

$y=x^2+4ax+4a^2+2$

$x_в=\frac{-4a}{2}=-2a \Rightarrow y_в=4a^2-8a^2+4a^2+2=2 \Rightarrow$

$\Rightarrow B(-2a;2)$, а значит B лежит на прямой $y=2$

4)



Р-м возможные случаи

4.1) Если B в I полуплоскости, то

$-2a<1 \Rightarrow a>-\frac{1}{2}$

Условие на A в I полуплоскости:

$\begin{cases}\frac{a}{2}<x\\ \frac{a}{2}<3-x\end{cases}\Bigg|+$ $a<3 \Rightarrow$

$\Rightarrow a\in\left(-\frac{1}{2};3\right)$

3

4.2) Если В во II полуплоскости, то $-2a > 1$; $a < -\frac{1}{2}$

A ; $a > 3$

Ответ: $a \in \left(-\frac{1}{2}; 3\right) \setminus \{0\}$

Чистовик

4

$2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0$

$(x+y)^2+2a^2-2ax-2ay+4y^2=0$

$(x+y)^2-2a(x+y)+4y^2+2a^2$

$(x+y)(x+y-2a)+2a^2+4y^2=0$

$(x-a)^2+5y^2+2xy-6ay+a^2=0$

$(x-a)^2+(3y-a)^2-4y^2+2xy=0$

$(x-a)^2+(3y-a)^2\cancel{4a^2}=4y^2-2xy$

$x^2+2x(y-a)+5y^2+2a^2-6ay=0$

$\frac{D}{4}=(y-a)^2-5y^2-2a^2+6ay=0$

$y^2+a^2-2ay-5y^2-2a^2+6ay=0$

$-4y^2-a^2+4ay=0$

$-(2y-a)^2=0$

$2y-a=0$

$y=\frac{a}{2}$

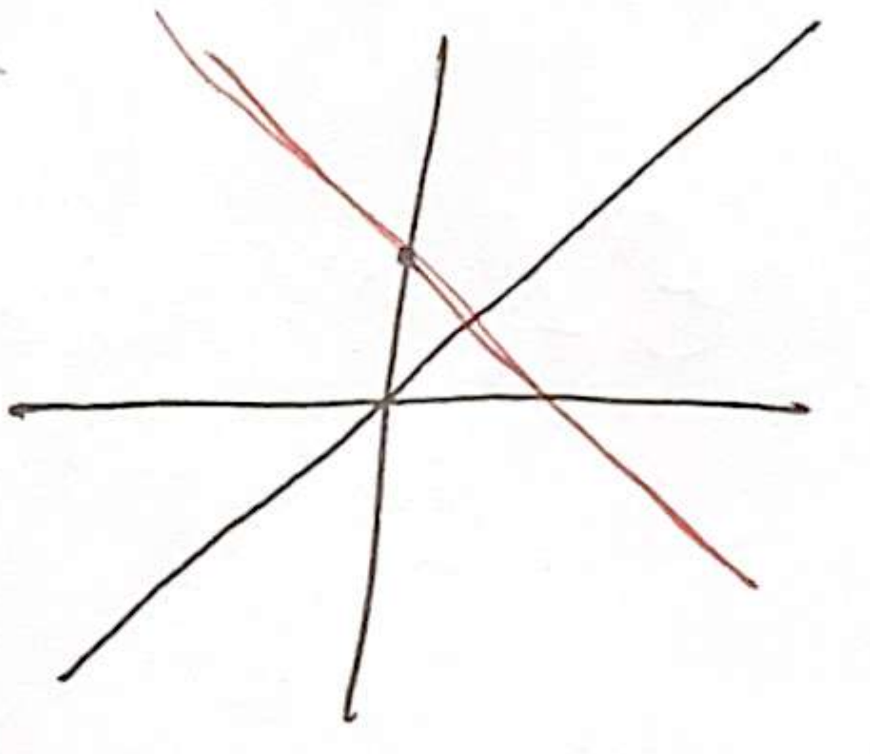
$A\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right)$

$5y^2+2y(x-3a)+x^2+2a^2-2ax=0$

$\frac{D}{4}=0=x^2+9a^2-6ax-5x^2-10a^2+10ax=$

$=-4x^2-a^2+4ax \Rightarrow -(2x-a)^2=0$

$x=\frac{a}{2} \Rightarrow$



б)

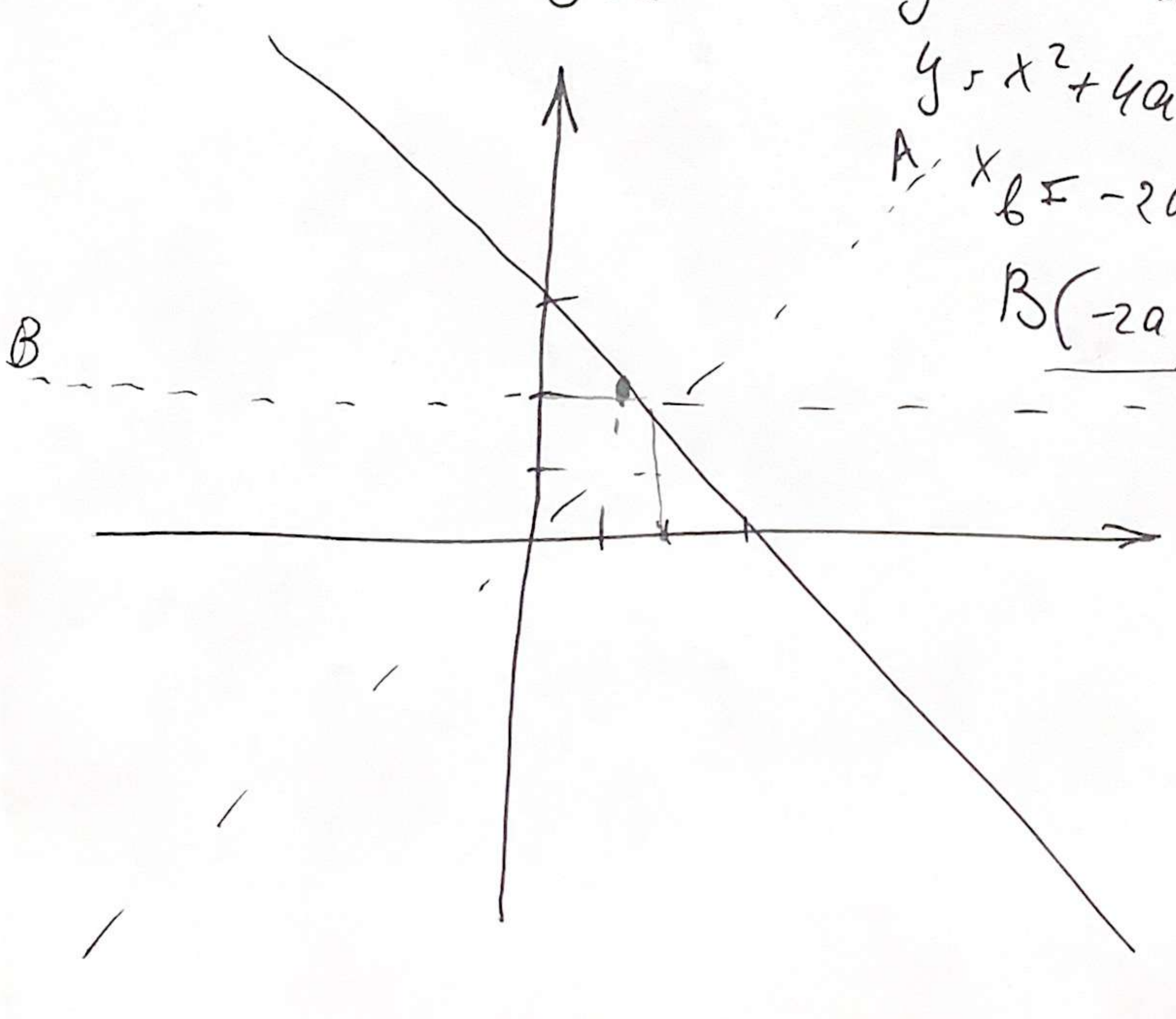
~~$x_б=8a \Rightarrow y_б$~~

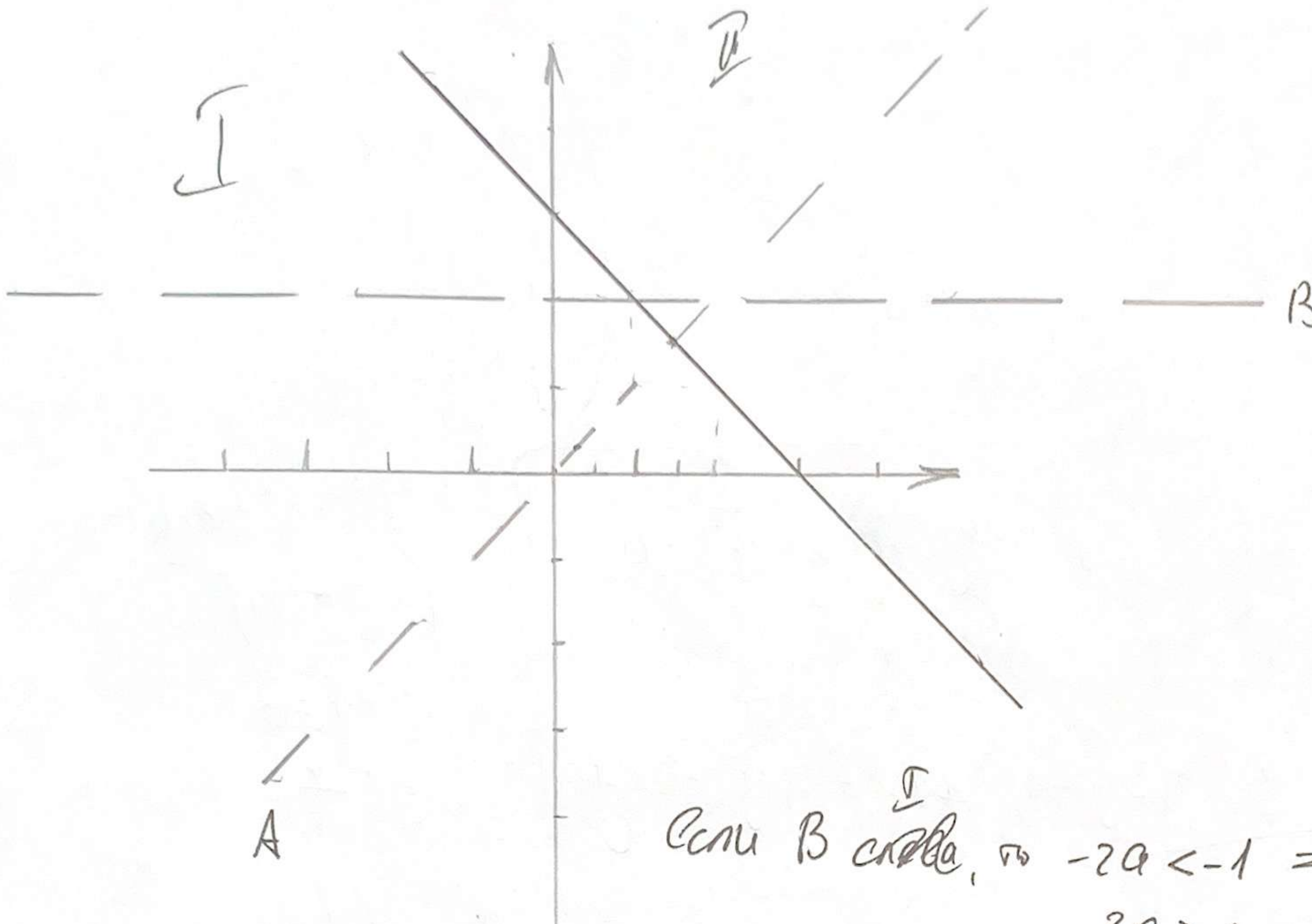
$ay=ax^2+4a^2x+4a^3+2$

$y=x^2+4ax+4a^2+2$

A: $x_б=-2a \Rightarrow y_б=4a^2-8a^2+4a^2+2=2$

$B(-2a;2)$





Если B слева, то $-2a < -1 \Rightarrow$

$2a > 1$

$a > \frac{1}{2}$

A I, то $\frac{a}{2} < x$

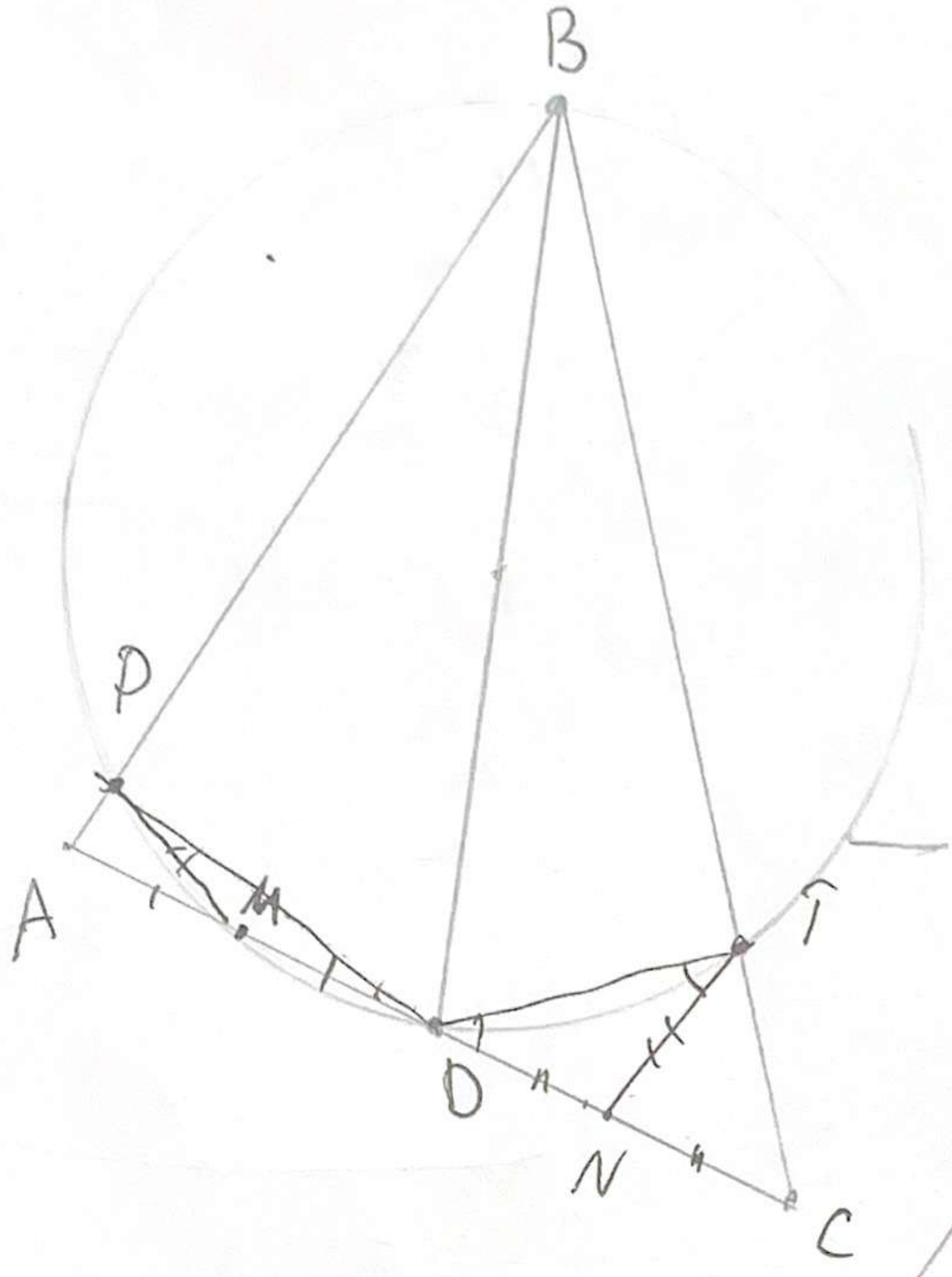
$\frac{a}{2} < \frac{3}{-} - x$ | +

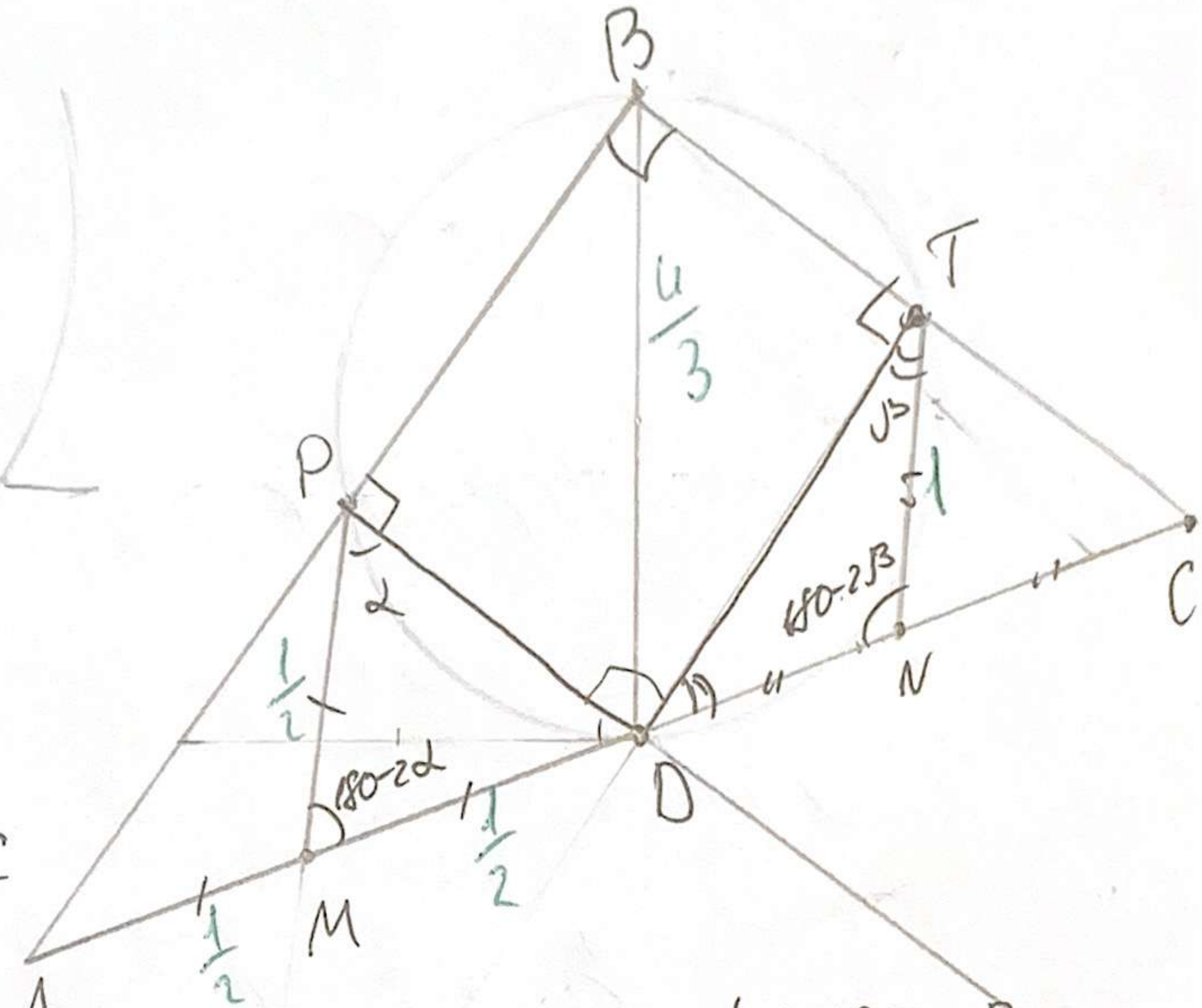
$a < 3 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}; 3\right)$

B II: $-2a > -1$

$a < \frac{1}{2}$ $a > 3$ $\varnothing$

Черновик



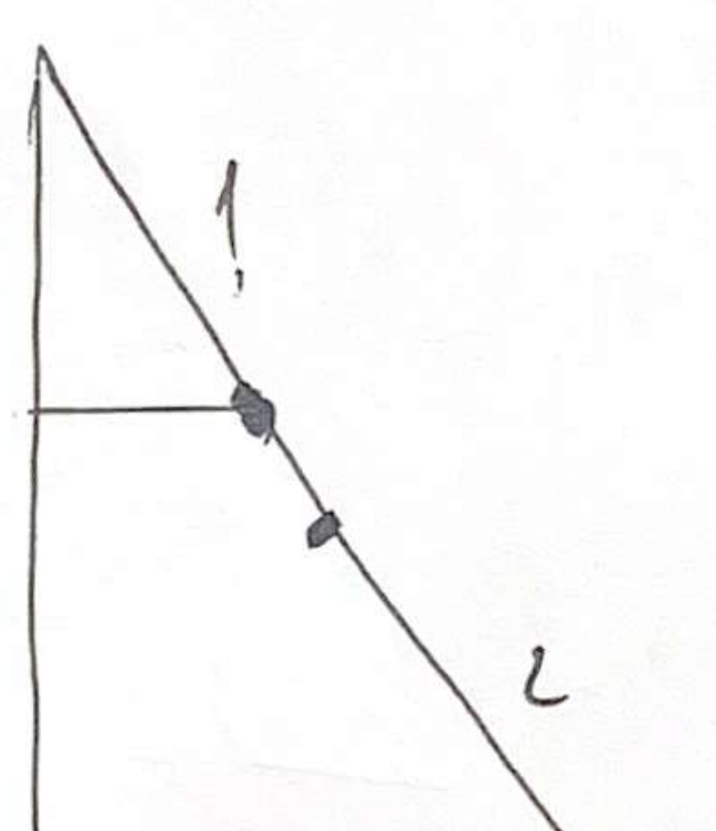


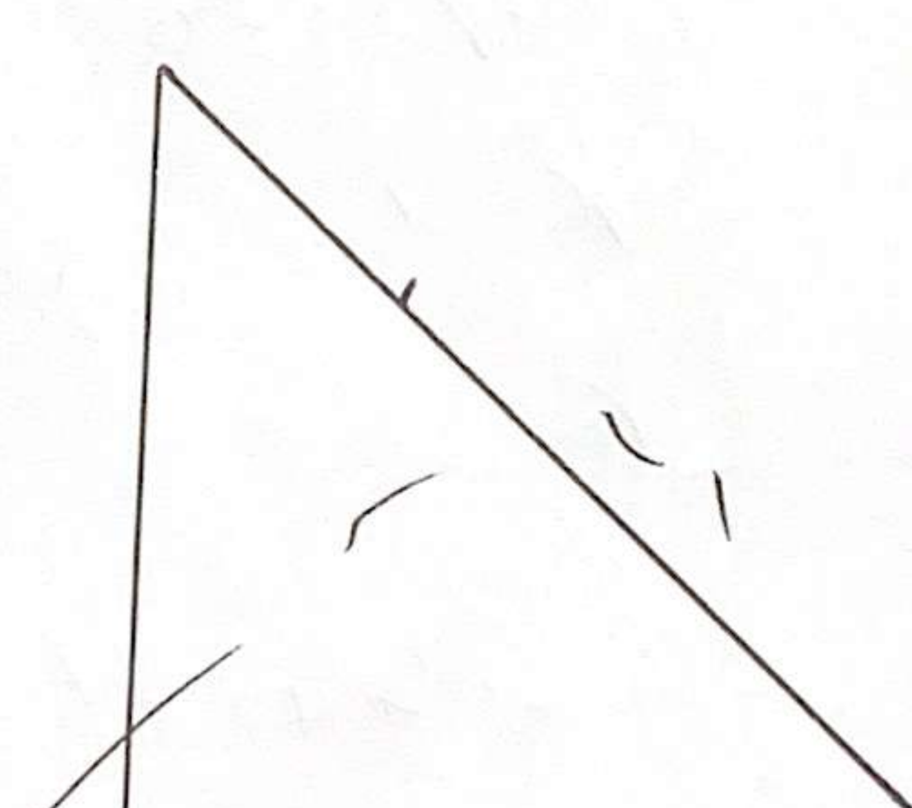
$$\cancel{180}-2\alpha+\cancel{180}-2\beta=\cancel{180}$$

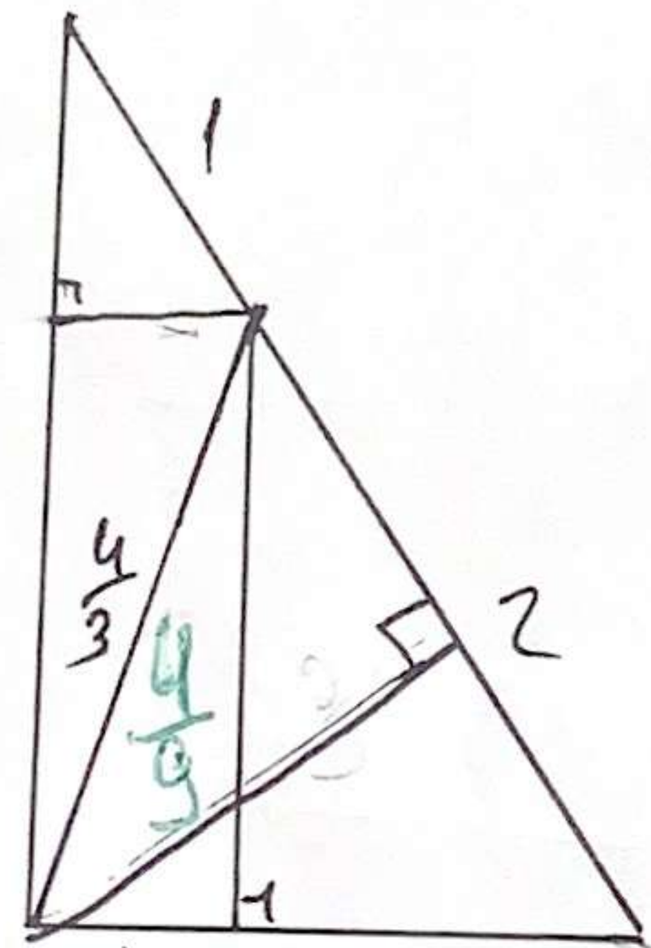
$$2\alpha+2\beta=180$$

$$\alpha+\beta=90$$

$$81-64$$







$$S=\frac{1}{2}d^2=\frac{16}{2\cdot 9}=\frac{8}{9}$$

$$\frac{4}{9}\cdot 3 \,\Big|\, \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}=2$$

$$ab=4$$

$$a^2+b^2=9$$

$$a=\frac{4}{b}$$

$$\frac{16}{b^2}+b^2=9$$

$$b^2=k$$

$$16+k^2=9k$$

$$k^2-9k+16=0$$

$$k=$$

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$

2 $\quad$ 1 $\quad$ 4+9-9

$+2{,}5$
$2{,}5$

$-1{,}5$
$2{,}5$
$-1{,}0$

$-(x^2-3x-4) \qquad -(x-4)(x+1)$

$\sqrt{x+1} = t$
$\sqrt{4-x} = k$, $t \ge 0$, $k \ge 0$

$t^2+k^2 = x+1+4-x = 5$

$$\begin{cases} t-k+3 = 2tk \\ t^2+k^2 = 5 \end{cases}$$

$1{,}5-\sqrt{6} \vee -1$

$t^2+k^2-2tk = -t+k-3+5$

$(t-k)^2 = 2-(t-k)$

$t-k = q$

$q^2 = 2-q \qquad q^2+q-2=0 \qquad \left[\begin{array}{ll} q=+1 & \text{I} \\ q=-2 & \text{II} \end{array}\right.$

I
$$\begin{cases} t-k=1 \\ t^2+k^2=5 \end{cases}$$

$2k^2+1+2k=5$
$2k^2+2k-4=0$
$k^2+k-2=0$

$\left[\begin{array}{l} k=1 \\ k=-2 \ \varnothing \end{array}\right. \qquad \sqrt{4-x}=1 \Rightarrow \underline{x=3}$

II
$$\begin{cases} t-k=-2 \\ t^2+k^2=5 \end{cases}$$

$t^2+t^2+4+4t=5$
$2t^2+4t-1=0$

$\sqrt{\frac{D}{4}} = \sqrt{4+2} = \sqrt{6} \qquad t = \frac{-2\pm\sqrt{6}}{2} \qquad \frac{-2+\sqrt{6}}{2}$

$\sqrt{x+1} = \frac{-2+\sqrt{6}}{2}$

$\underline{x = 1{,}5-\sqrt{6}}$

$x+1 = \frac{6+4-4\sqrt{6}}{4} \Rightarrow \frac{5}{2}-\sqrt{6}-1 = x$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006240**

ID профиля: **849611**

Вариант 12

№4 Чистовик

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2 = \frac{9}{4} \quad (1) \end{cases}$$

(1) $2(x^4+y^4)+5x^2y^2 = \frac{9}{4}$

$2(x^2+y^2)^2 - 4x^2y^2 + 5x^2y^2 = \frac{9}{4}$

$2(x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = \frac{9}{4}$

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \\ 2(x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

Пусть $x^2+y^2 = k$, $k>0$

$(xy)^2 = g$, $g \geq 0$

$$\begin{cases} \frac{1}{k} + g = \frac{5}{4} \\ 2k^2 + g = \frac{9}{4} \end{cases} - \quad 2k^2 - \frac{1}{k} = 1 \quad |\cdot k$$

$2k^3 - k - 1 = 0$ Проверкой убеждаемся, что $k=1$ — корень.

	2	0	-1	-1
1	2	2	1	0

$2k^2+2k+1=0$; $\frac{D}{4} = 1-2<0 \Rightarrow$ Данная система имеет лишь одно решение: $k=1 \Rightarrow g = \frac{1}{4}$

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ x^2y^2 = \frac{1}{4} \end{cases}; \quad y^2 = \frac{1}{4x^2} \quad \begin{cases} y^2 = \frac{1}{4x^2} \\ x^2 + \frac{1}{4x^2} = 1 \quad (2) \end{cases}$$

($x \neq 0$ и $y \neq 0$, т.к. $g \neq 0$)

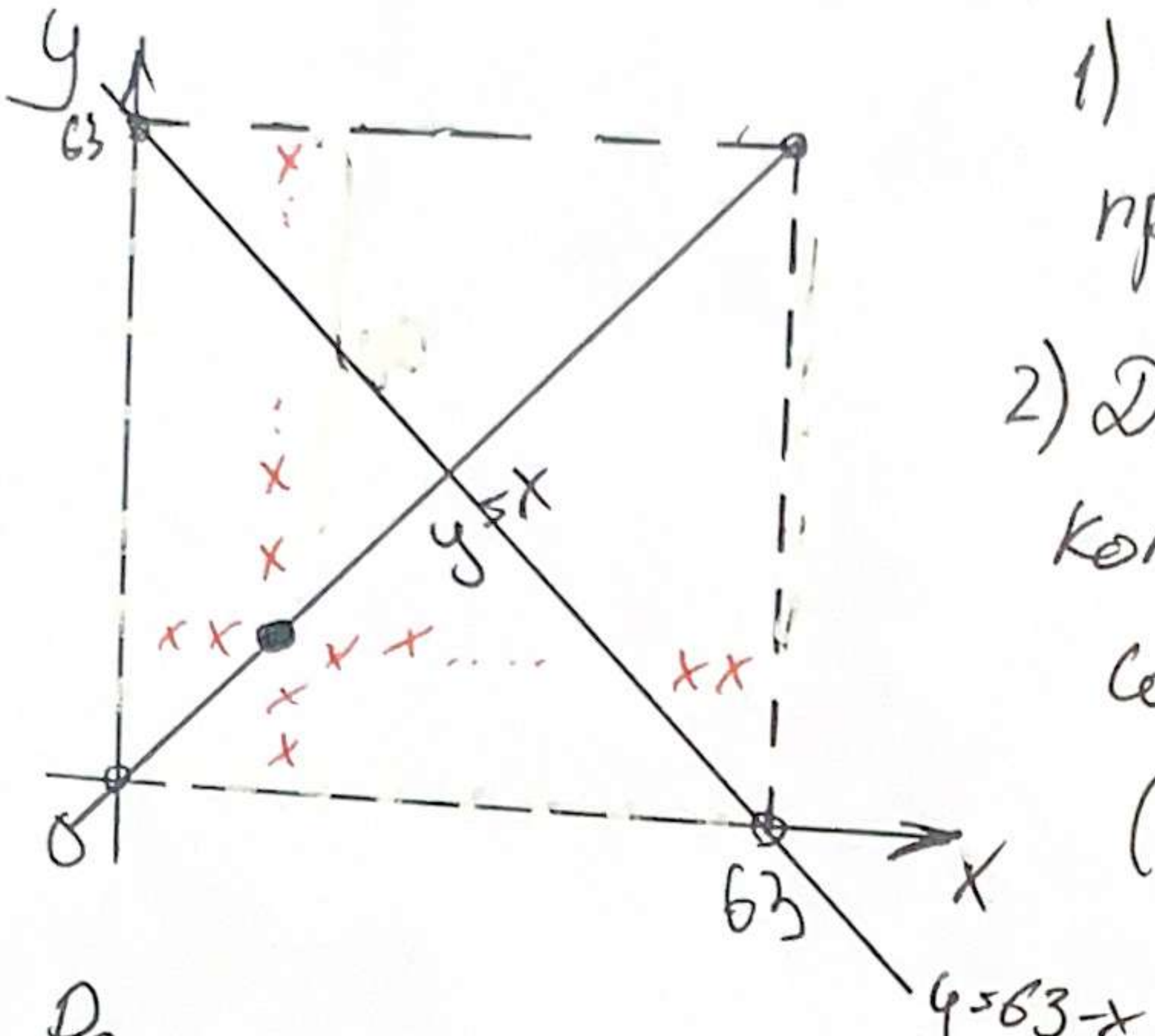
(2) $x^2 + \frac{1}{4x^2} = 1$ $\quad t = x^2 \Rightarrow t + \frac{1}{4t} = 1 \quad |\cdot 4t$

$4t^2 - 4t + 1 = 0$; $(2t-1)^2 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$

$y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

Ответ: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}; \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

№5 Чистовик



1) Р-м узлы, которые пересекает прямая $y=x$ (таких узлов будет 62)

2) Для такого произвольного узла кол-во узлов, с которым его можно соеденить равно $61\cdot61-1$ ($61\cdot61$ — общее кол-во узлов внутри квадрата), (-1 возникает из-за того, что сам с собой узел соедиктить нельзя)

3) Рассмотрим условие непараллельности осям. Тогда общее кол-во отрезков для данного узла $= 61\cdot61-60-60-1$ (кол-во запрещённых узлов — 60 по горизонтали и 60 по вертикали)

4) Т.к. на $y=x$ кол-во узлов 62, то пар узлов будет соответственно $62\cdot(61^2-121)$

5) Аналогичные рассуждения применимы и для прямой $y=63-x$. Кол-во узлов на ней также 62, => кол-во прямых $62\cdot(61^2-121)$ (это работает, т.к. $y=x$ и $y=63-x$ пересекаются не в узле.)

6) Уберем повторы. (Мы 2 раза посчитали случаи, когда 1 узел лежит на $y=x$, другой на $y=63-x$)

Кол-во повторов: $62\cdot(62-2)=62\cdot60$

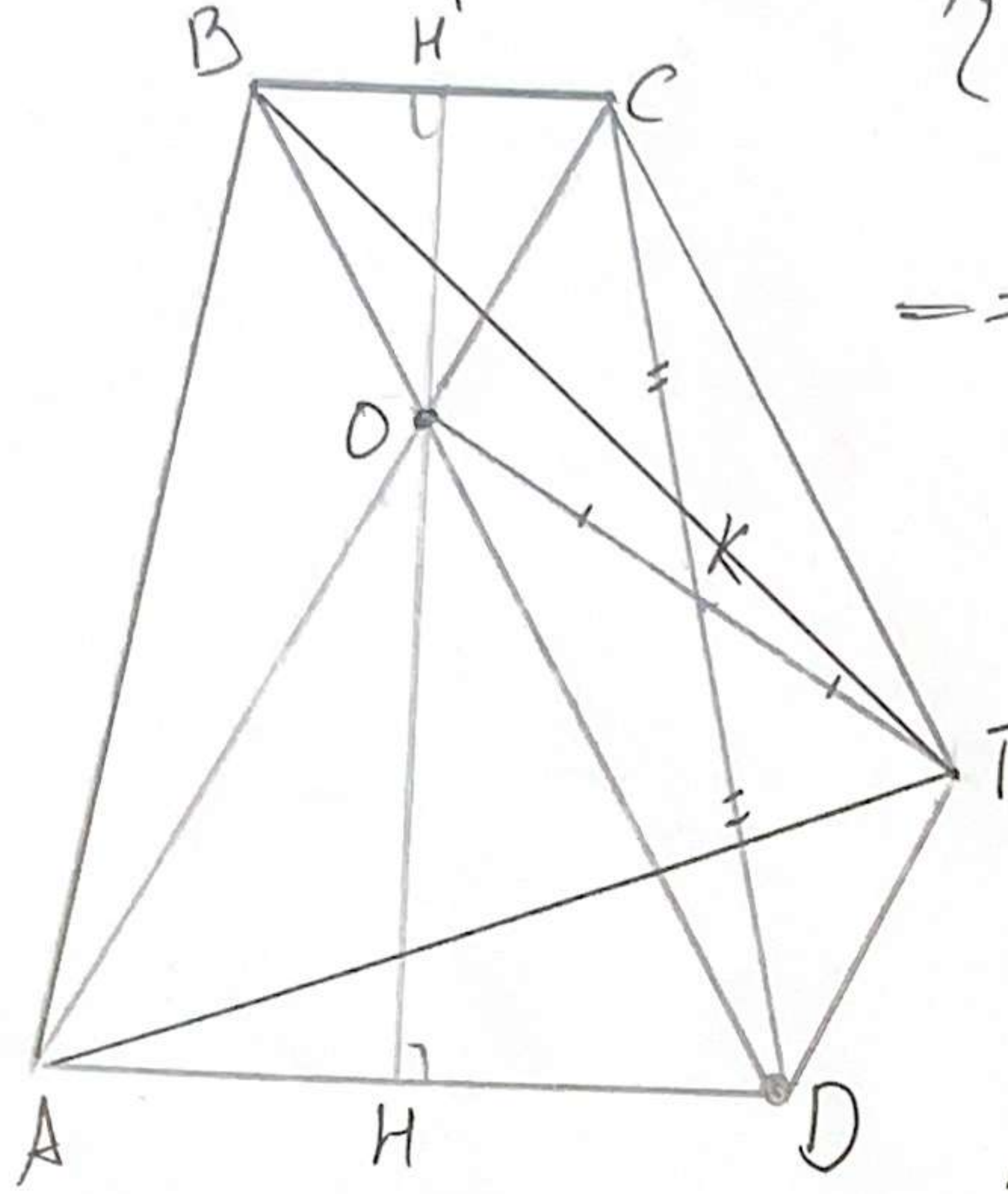
7) Тогда общее кол-во пар узлов условие непараллельности $N=2\cdot62(61^2-121)-62\cdot60=$

$=62\cdot(2(61-11)(61+11)-60)=62\cdot(100\cdot72-60)=7140\cdot62=442680$

Ответ: 442680 способов

②

№6 Чистовик



1) $\begin{cases} CK = KD \text{ (по условию)} \\ OK = KT \text{ (симметрия)} \end{cases} \Rightarrow OCTD$ – параллелограмм $\Rightarrow$ (диагонали делятся пополам)

$\Rightarrow OC = DT$; $OC \parallel DT$

$OD = CT$; $OD \parallel CT$

2) $\angle BOA = \angle COD = 180° - 60° = 120°$ (смежные)

$\angle OCT = 180° - 120° = 60°$ (соседние в параллелограмме)

$\angle BCT = \angle BCO + \angle OCT = 60° + 60° = 120° = \angle BOA$.

Аналогично $\angle ADT = 120°$

3) $\triangle TDA = \triangle BCT = \triangle BOA$ (по I признаку) $\Rightarrow$

$\Rightarrow AB = BT = AT \Rightarrow \triangle ABT$ – правильный чтд.

4) $ABCD$ – трапеция (внутренние накрест лежащие углы $\angle OAD$ и $\angle BCO$ равны) $\Rightarrow$

$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{BC+AD}{2} \cdot H'H = \frac{BC+AD}{2}(OH' + OH) = \frac{BC+AD}{2}\left(BC\frac{\sqrt{3}}{2} + AD\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$ высота в правильном треугольнике.

$= \frac{2+4}{2}\left(\frac{2\sqrt{3}}{2} + \frac{4\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3 \cdot 6}{2}\sqrt{3} = \frac{18\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$

5) Теорема косинусов для $\triangle BOA$:

$BA^2 = BO^2 + OA^2 - 2\cos 120° = 4 + 16 + 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 28$

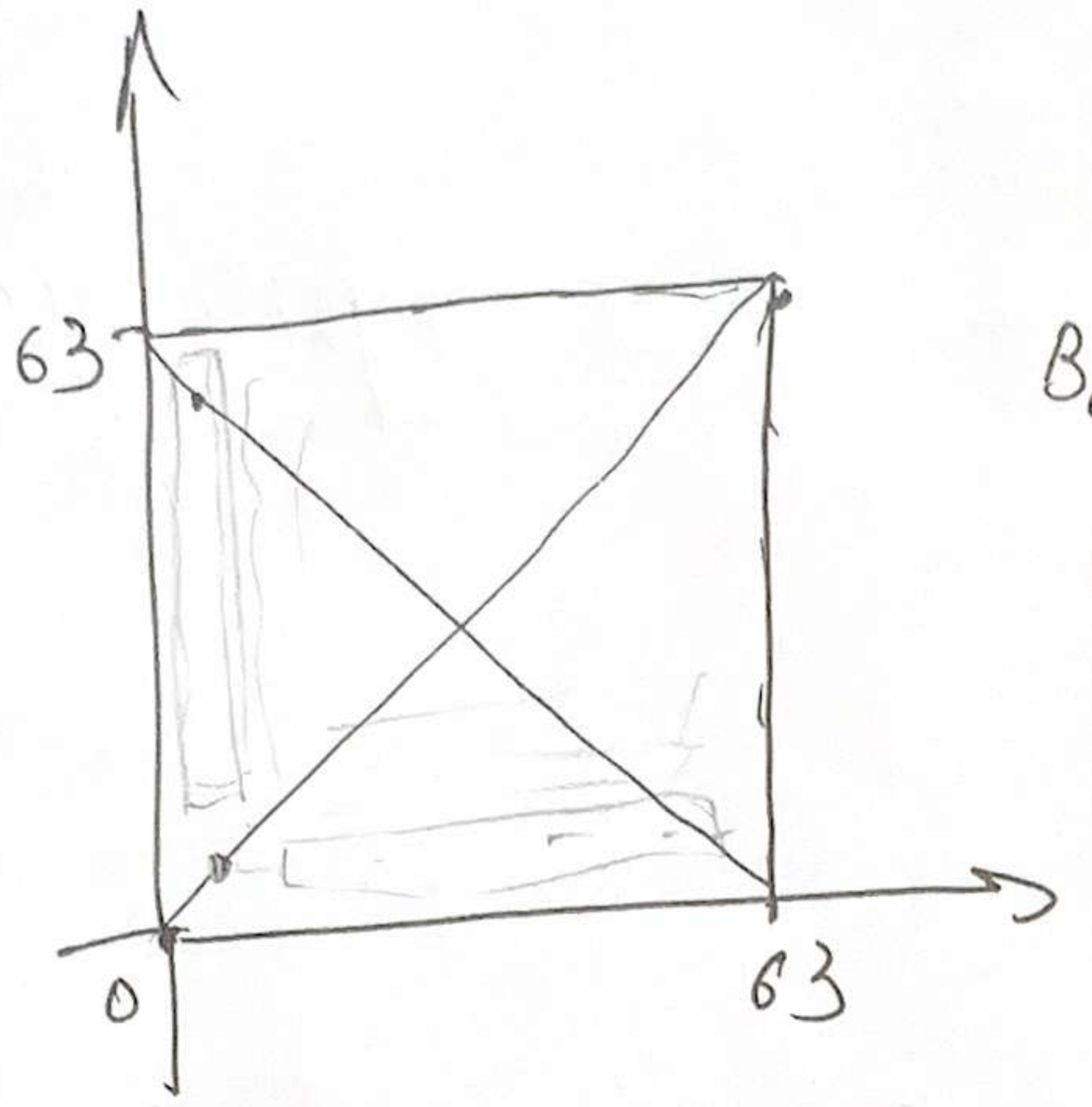
5) $S_{ABT} = \frac{1}{2} BA \cdot AT \cdot \sin 60° = \frac{1}{2} BA^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{28}{4} \cdot \sqrt{3} = 7\sqrt{3}$

6) $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{7\sqrt{3}}{9\sqrt{3}} = \frac{7}{9}$

Ответ: $\frac{7}{9}$

3

Черновик



Всего узлов
$61 \cdot 61$

$61+60$

$62 \cdot (61 \cdot 61 - 1 - 60) =$

$\cancel{2 \cdot 62 \cdot 61 \cdot 60 - 62^2}$

$62 \cdot 61$

$$\begin{array}{r} 60 \\ \times\ 61 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 61 \\ \times\ 60 \\ \hline 3660 \\ -\ 31 \\ \hline 3629 \\ \times\ 124 \\ \hline 14516 \\ +\ 7258 \\ 3629 \\ \hline \boxed{23386} \end{array}$$

$2 \cdot 62 \cdot 61 \cdot 60 - 62^2 =$

$= 62(2 \cdot 61 \cdot 60 - 62) =$

$= 124 \cdot (3660 - 31)$

$62 \cdot (61 \cdot 61 - 1 - 120)$

$62 \cdot (61 \cdot 61 - 121)$

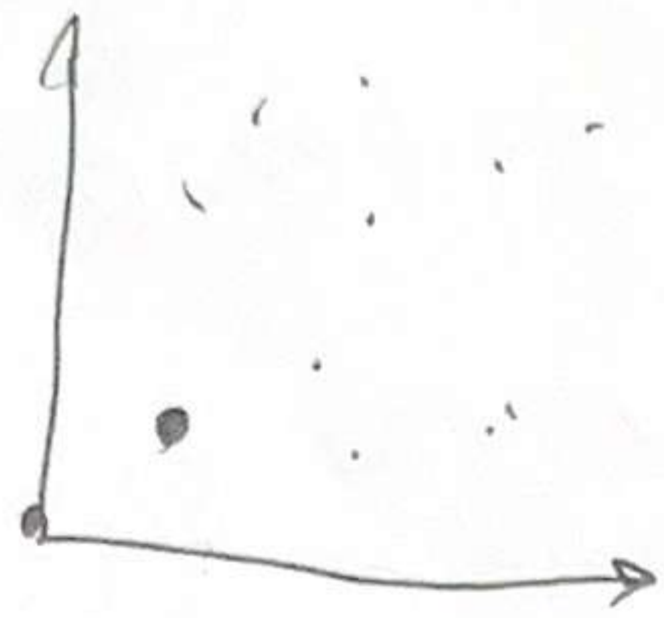
$61(61 \cdot 61 - 121) \quad - 62 \cdot 61$

$62(61^2 - 121) + 61(61^2 - 121) - 62 \cdot 61 =$

$= (62+61)(61^2 - 121) - 62 \cdot 61) =$

$123 \cdot (61-11)(61+11) - 62 \cdot 61$

$= 123 \cdot 50 \cdot 72 - 62 \cdot 61$



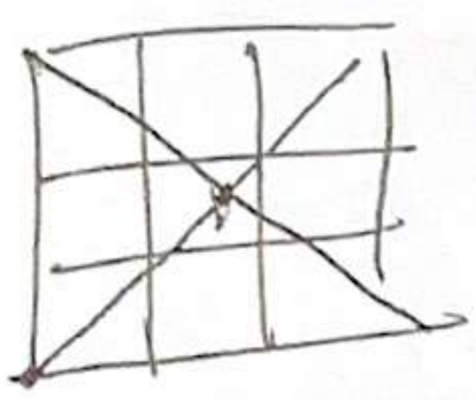
$62 \cdot (61 \cdot 61 - 121)$

$6\cancel{1} \cdot (61 \cdot 61 - 121)$

$6\cancel{1} \cdot 59$

$$\begin{array}{r} 61 \\ \times 59 \\ \hline 549 \\ 305 \\ \hline 3599 \end{array}$$

$$\underline{62(61^2-121)+61(61^2-121)-61\cdot 59}$$



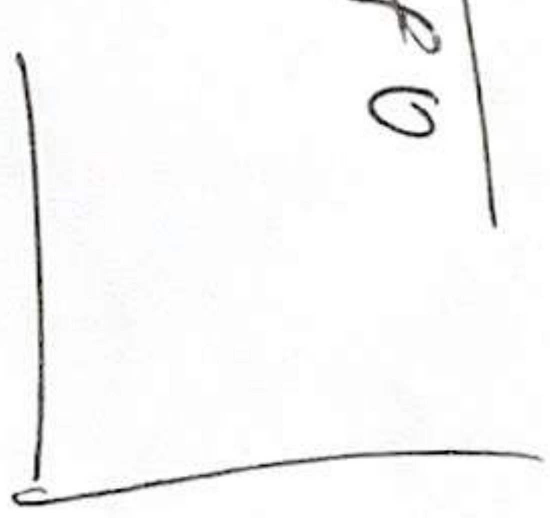
$$\begin{array}{r} 123 \\ 442800 \\ -\ 3599 \\ \hline \boxed{439201} \end{array}$$

$(2(61^2-121)-60)\cdot 62$

$(100\cdot 72-60)\,62$

$$\begin{array}{r} 7200 \\ -\ 60 \\ \hline 7140 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7140 \\ \times 62 \\ \hline 14280 \\ 42840 \\ \hline 442680 \end{array}$$



72.

черновик

$$\begin{array}{r} 123 \\ \times 72 \\ \hline 246 \\ 861 \\ \hline 8856 \end{array}$$

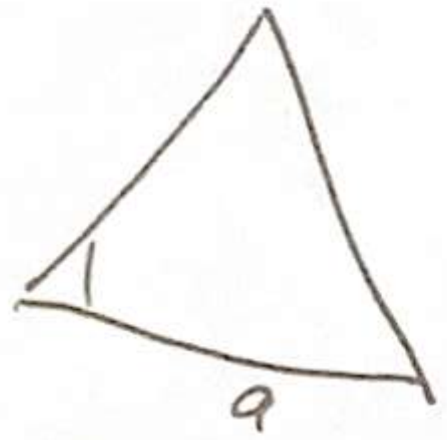
$$\begin{array}{r} 8856 \\ \times 50 \\ \hline 442800 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 60 \\ +62 \\ \hline 122 \end{array}$$

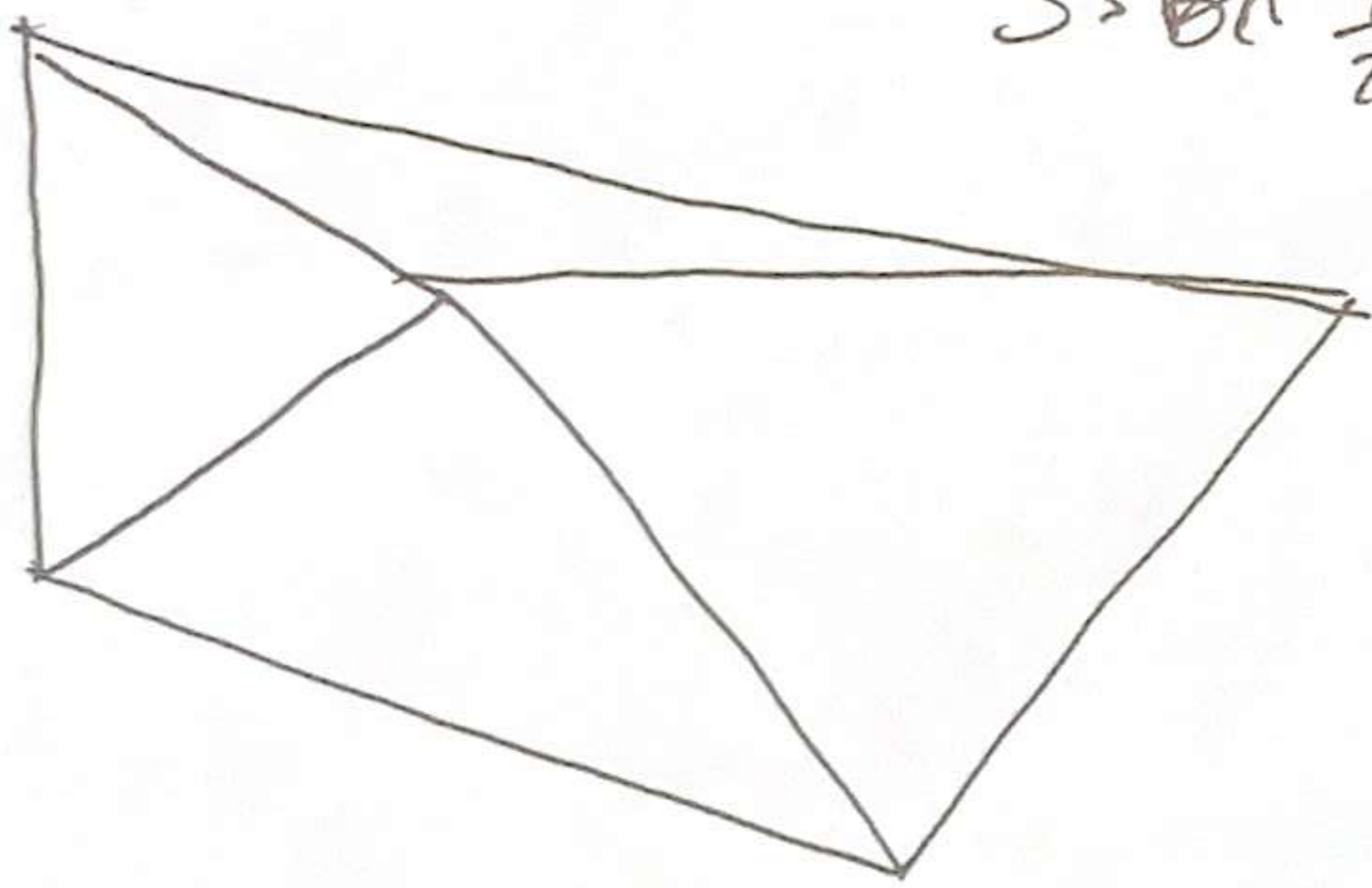
$S_{ABCD} = \frac{2+4}{2} \cdot (2\sqrt{3} + 4\sqrt{3})$

$\cancel{3 \cdot 6}\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$

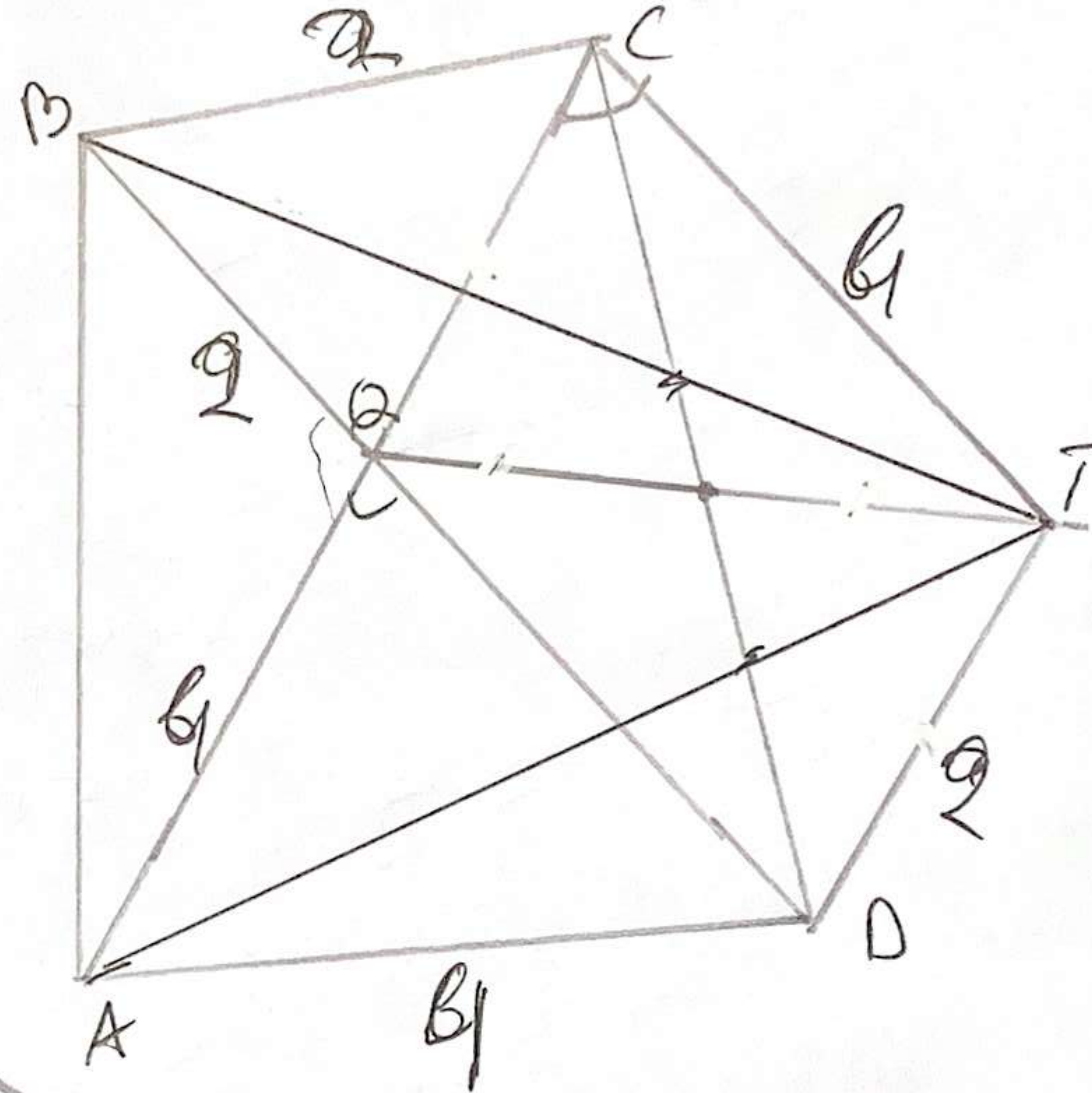


$S = \cancel{BA}\ \frac{1}{2}a^2 \sin 60$

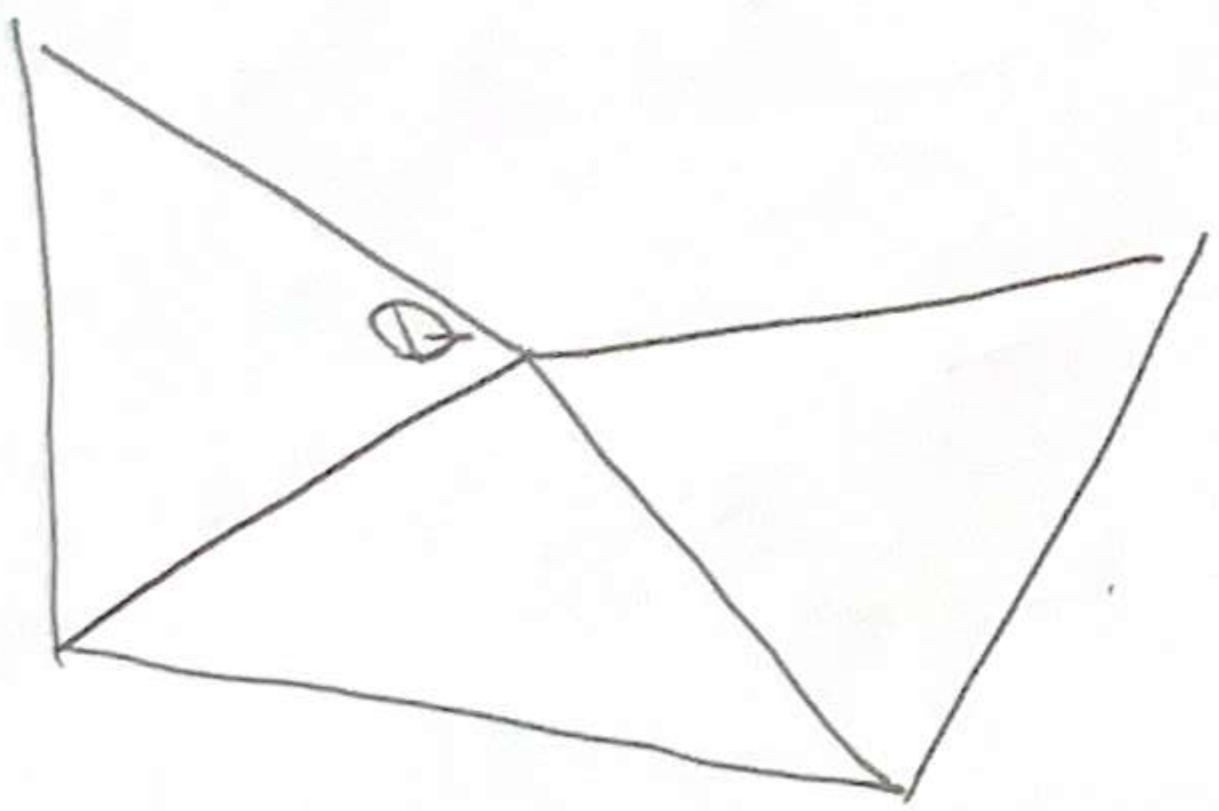


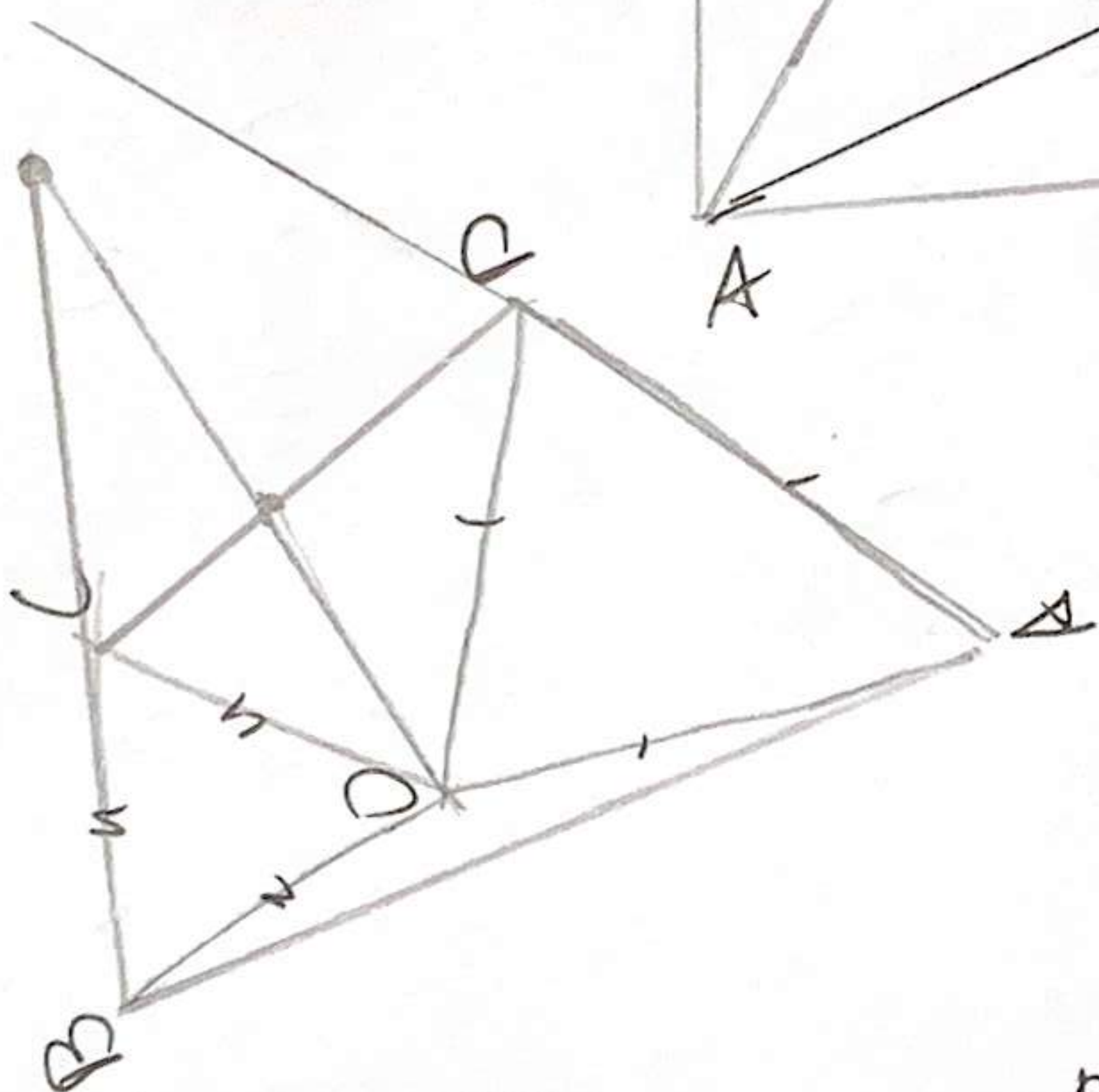
$\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}a^2 = \frac{1}{2}ah \Rightarrow$

$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$



$\Delta BOA = \Delta BCT = \Delta TDA$





$BA^2 = 4 + 16 + 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}$

$\begin{array}{r} +16 \\ 12 \\ \hline 28 \end{array}$

$BA = 2\sqrt{7}$

$S_{ABT} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 7\sqrt{3}$

$D = \frac{7\sqrt{3}}{18\sqrt{3}} = \frac{7}{18}$

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \\ 2x^4+2y^4+6x^2y^2 = \frac{9}{4} \end{cases} \quad ; \frac{1}{(x+y)^2-2xy} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \quad ; \cancel{(x^2+y)^2}$$

Черновик

$$2\left((x^2+y^2)^2 - 2x^2y^2\right) + 6x^2y^2$$

$x^2+y^2 = k, \ k \geq 0$

$$2(x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = \frac{9}{4}$$

$\cancel{2(x^2+y)^2}$ $(xy)^2 = g, \ g \geq 0$

$$\frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{k} + g = \frac{5}{4} \\ 2k^2 + g = \frac{9}{4} \end{cases} -$$

$2k^3 - k - 1 = 0$ $\quad 2k^2 - \frac{1}{k} = 1$

	2	0	-1	-1
1	2	2	1	0

$(k-1)(2k^2+2k+1) = 0$ $\quad \frac{D}{4} = 1 - 2 < 0$ $\quad k = 1$, $g = \frac{1}{4}$

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ (xy)^2 = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow xy = \pm\frac{1}{4}$$

① $x^2 + \frac{1}{4x^2} = 1$ $\quad t = x^2$ $\quad t + \frac{1}{4t} = 1$

$4t^2 + 1 = 4t$

$4t^2 - 4t + 1 = 0$

$(2t-1)^2 = 0$ $\quad t = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

Отв: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$