Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

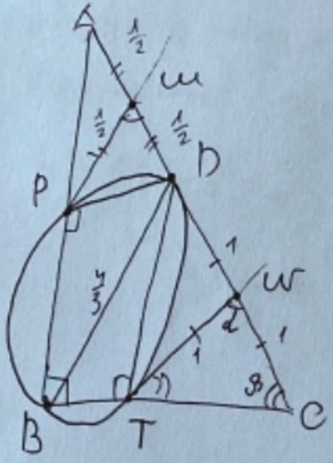
Шифр: **211006192**

ID профиля: **846690**

Вариант 12

Чистовик. Математика 10 класс.

w1.



PM || Tw

Решение:

а) Т.к. BD - диаметр, ∠DTB = ∠DPB = 90° (опирается на BD).
=> △BTC и △APD - прямоугольные.
Тогда Tw и PM - медианы в них => равны $\frac{1}{2}$ гипотенузы => Tw = Dw = wC, PM = AM = MD. Обозначим ∠TwC = α.
PM || Tw => ∠PMD также = α.
Тогда ∠PMA = 180 − α и т.к. △PMA - равнобедренный, ∠MAP = ∠MPA = 90 − $\frac{\alpha}{2}$.
Также △TwC - равнобедр => ∠wCT = ∠wTC = = 90 − $\frac{\alpha}{2}$
=> Сумма ∠BAC + ∠BCA = $\frac{\alpha}{2}$ + 90 − $\frac{\alpha}{2}$ = 90°

=> $\boxed{\angle ABC = 90°}$.

б) MP = $\frac{1}{2}$, wT = 1, BD = $\frac{4}{3}$.

~~Запишем т. косинусов для △DBC и угла BCA = β: (обозначим PD = x,~~
~~и заметим, что т.к. ∠B = 90°, то BPDT прямоугольник (3 угла по 90°).~~
~~$BD^2 = BC^2 + DC^2 - 2\,BC\,DC\cos\beta$ => $\frac{16}{9} = 4 + \left(x + \sqrt{\frac{20}{9}+x^2}\right)^2 -$~~

Обозначим PD = x = BT (BPDT - прямоугольник (3 угла по 90°)).
По т. Пифагора: $DT = BP = \sqrt{\frac{16}{9} - x^2}$. Обозначим ∠BCA = β. = ∠PDA (BT || PD).
Тогда DT = BP = 2·sinβ. AP = 1·sinβ => AP + BP = 3sinβ.
DP = AD·cosβ = cosβ = BT, TC = DC·cosβ = 2·cosβ => BT + TC = 3cosβ.
По т. Пифагора для △ABC: $(AP + BP)^2 + (BT+TC)^2 = AC^2 = 9$.

По т. Пифагора: $(BP + AP)^2 + (x + TC)^2 = 9$
$BP = \sqrt{\frac{16}{9} - x^2} = DT$, $AP = \sqrt{1-x^2}$, $TC = \sqrt{4 - (\frac{16}{9} - x^2)} = \sqrt{\frac{20}{9}+x^2}$;
$\frac{16}{9} - x^2 + 1 - x^2 + 2\sqrt{(\frac{16}{9}-x^2)(1-x^2)} + x^2 + \frac{20}{9} + x^2 + 2\sqrt{x(\frac{20}{9}+x^2)} = 9$
$\sqrt{(\frac{16}{9} - x^2)(1-x^2)} + \sqrt{x(\frac{20}{9}+x^2)} = 2.$, 9 $S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot BC}{2}$.

1

211006192 (U846690 M1276224)

Чистовик. Математика 10 класс

№2.

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$$

ОДЗ: $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \\ 4+3x-x^2 \geq 0 \end{cases}$

Заметим, что $4+3x-x^2 = (4-x)(x+1)$

Замена $t = \sqrt{x+1}$. Тогда $\sqrt{4-x} = \sqrt{5-t^2}$

$t - \sqrt{5-t^2} + 3 = 2t\sqrt{5-t^2} \Rightarrow t+3 = \sqrt{5-t^2}\,(2t+1)$

$(t+3)^2 = (5-t^2)(2t+1)^2 \Rightarrow t^2+6t+9 = (5-t^2)(4t^2+4t+1)$

$t^2+6t+9 = 20t^2+20t+5-4t^4-4t^3-t^2$

$4t^4+4t^3-18t^2-14t+4=0 \Rightarrow 2t^4+2t^3-9t^2-7t+2=0$

$2t^3(t+1) - 9t^2 - 9t + 2t + 2 = 0 \Rightarrow 2t^3(t+1) - 9t(t+1) + 2(t+1) = 0$

$(t+1)(2t^3-9t+2)=0$

Заметим $t=2$ - корень

$$\begin{array}{r|l} 2t^3 - 9t + 2 & t-2 \\ \hline -2t^3 - 4t^2 & 2t^2+4t-1 \\ 4t^2 - 9t & \\ -4t^2 - 8t & \\ -t + 2 & \\ -t + 2 & \\ 0 & \end{array}$$

$\to t = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16+8}}{4} = -1 \pm \dfrac{\sqrt{6}}{2}.$

Итак: 1) $\sqrt{x+1} = -1$ $\varnothing$ т.к. $\sqrt{x+1} \geq 0$.

2) $\sqrt{x+1} = 2 \Rightarrow x+1 = 4 \Rightarrow \boxed{x=3}$ ← подходит

3) $\sqrt{x+1} = -1 - \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ $\varnothing$ т.к. корень ≥ 0

4) $\sqrt{x+1} = -1 + \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ $\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2} > 1, \text{т.к. } \sqrt{6} > 2,\ 6 > 4\right)$.

$x+1 = \left(\dfrac{\sqrt{6}}{2} - 1\right)^2 = \dfrac{3}{2} + 1 - \sqrt{6} = \dfrac{5}{2} - \sqrt{6}$

$x = \dfrac{3}{2} - \sqrt{6}.$

Проверим по ОДЗ:

$\begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 4 \\ (4-x)(x+1) \geq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow x \in [-1; 4]$.

$\dfrac{3}{2} - \sqrt{6} \lor -1$

$\dfrac{\sqrt{5}}{2} \lor \sqrt{6}$

$\dfrac{25}{4} \lor 6 \Rightarrow 25 > 24 \Rightarrow \dfrac{3}{2} - \sqrt{6} > -1 \Rightarrow$ подходит.

Ответ: $x = 3$ и $x = \dfrac{3}{2} - \sqrt{6}$.

2

211006192 (U846690 M1276224)

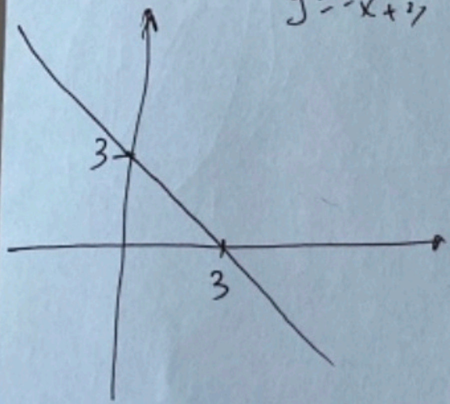
№3.

$ax^2+4a^2x-ay+4a^3+2=0.$

Вершина: $x_в = -\frac{b}{2a} = \frac{-4a^2}{2a} = -2a$, $y_в = a(-2a)^2+4a^2(-2a)-ay+4a^3+2=0$

$\Rightarrow ay=2 \Rightarrow y_в=\frac{2}{a} \Rightarrow$ Координата точки $B(-2a;\frac{2}{a})$.

$y=-x+3$



$2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0:$

$(x-a)^2+(3y-a)^2-2y(2y-x)=0.$

Если точки выше $x+y=3$:

для т. B: $-2a+\frac{2}{a}\geq 3$

$\frac{-2a^2+2}{a}\geq 3$ (1) $2a^2+3a+2\leq 0$

Если ниже: $-2a+\frac{2}{a}\leq 3$

(1) $a=-3\pm\sqrt{9-4\cdot 2} \Rightarrow D<0.$

3

Черновик. $(x+3y)^2 = x^2+6xy+9y^2 -$

№3.

$$2a^2 - 2a(x+3y) + x^2+2xy+5y^2 = 0$$

$$= (x+3y)^2 - 4xy - 4y^2 = 0$$

$$(x+3y)^2 - 2a(x+3y) - 4y(x+2y) + 2a^2 = 0$$

$a \le -2$: $x, y \geq 0$ $\varnothing$

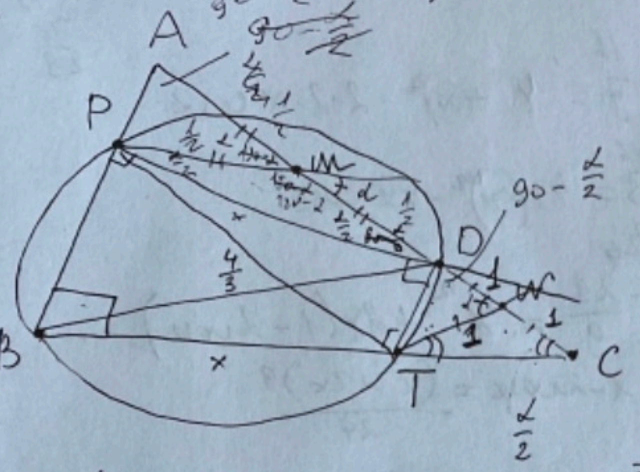
$$2a^2 - 2ax - 6ay + x^2+2xy + 5y^2 = 0$$

$a \le -2$: 1) $x \le 0$:

211006192 (U846690 M1276224)

Черновик. Математика 10 класс.

№1.



BD - диаметр

$PM \parallel TN$

PM - медиана в прямоугольн.

Тогда TN

$\angle MPD = \angle MDP = \cancel{180-\alpha}$

$\frac{180-(180-\alpha)}{2} = \frac{\alpha}{2}$

$\Rightarrow \boxed{\angle ABC = 90^\circ}$

$MP = \frac{1}{2}$, $NT = 1$, $BD = \frac{4}{3}$. $(\cdot)/S_{\Delta ABC}$

Пусть $PD = x$:

$BP = \sqrt{\frac{16}{9}-x^2} = BT$ $AP = \sqrt{1-x^2}$

$AC = 2$.

$\Rightarrow TC = \sqrt{4-BT^2} = \sqrt{4-\left(\frac{16}{9}-x^2\right)} = \sqrt{\frac{20}{9}+x^2}$.

По т. Пифагора: $AB^2+BC^2 = AC^2$

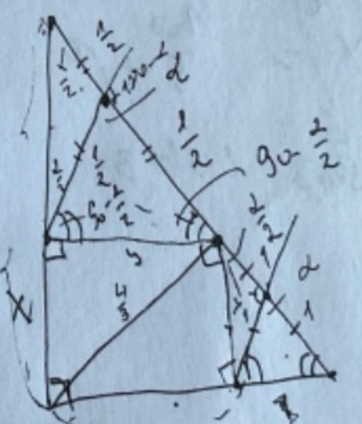
$(BP+AP)^2 + (x+TC)^2 = 9$

$\frac{16}{9} - \cancel{x^2} + 1 - \cancel{x^2} + 2\sqrt{\left(\frac{16}{9}-x^2\right)(1-x^2)} + \cancel{x^2} + \frac{20}{9} + \cancel{x^2} +$

$+ 2\sqrt{x\left(\frac{20}{9}+x^2\right)} = 9$

$(\cdot)$ $\frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{(BP+AP)(x+TC)}{2}$

$\sqrt{\left(\frac{16}{9}-x^2\right)(1-x^2)} + \sqrt{x\left(\frac{20}{9}+x^2\right)} = 2.$



$x = x\left(\frac{20}{9}+x^2\right) = 1$

$\cancel{x^3 + \frac{20}{9}x - 1 = 0}$

$x = \frac{4}{3}$,

4.

$\frac{4}{3} \cdot \left(\cancel{\frac{20}{9}+\frac{16}{9}}\right)$

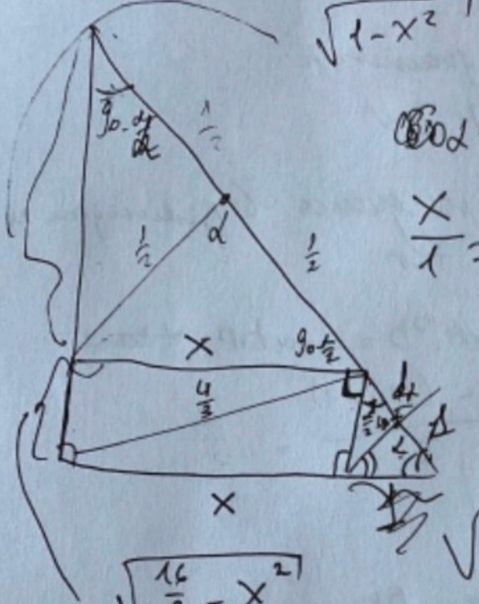
$\sqrt{1-\left(\frac{16}{9}-x^2\right)} = \sqrt{x^2-\frac{7}{9}}$

$\left(\sqrt{x^2-\frac{7}{9}}+x\right)^2 + \left(\sqrt{4-x^2}+x\right)^2 = 9$

$x^2 - \frac{7}{9} + x^2 + 2\sqrt{x\left(x^2-\frac{7}{9}\right)} + 4 - x^2 + \cancel{x^2} + 2\sqrt{(4-x^2)x} = 9$

Черновик.

$\sqrt{1-x^2}$



$\cos\alpha = \sin(90-\alpha)$

$\frac{x}{1} =$

$\frac{16}{9} = 4 + (x+1)^2 - 2\cdot 2\cdot x\cos\alpha$

$\frac{16}{9} = 4 + (x+1)^2 - 4x\cos\alpha$

$-\frac{29}{9} = x^2 + 2x(1-2\cos\alpha)$

$1-2\cos\alpha = -\frac{(x^2+2x)9}{29}$

$\sqrt{4-\left(\frac{16}{9}-x^2\right)} = \sqrt{\frac{20}{9}+x^2}$

$\left(\sqrt{\frac{16}{9}-x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)^2 + \left(x+\sqrt{\frac{20}{9}+x^2}\right) = 9$

$\frac{16}{9} - x^2 + 1 - x^2 + 2\sqrt{\left(\frac{16}{9}-x^2\right)(1-x^2)} + x^2 + \frac{20}{9} + x^2 + 2\sqrt{x\left(\frac{20}{9}+x^2\right)} = 9$

$2\sqrt{\left(1-x^2+\frac{7}{9}\right)(1-x^2)} + 2\sqrt{x\left(\frac{20}{9}+x^2\right)} = 4.$

$\left(\frac{16}{9}-x^2\right)(1-x^2) + \left(\frac{20}{9}+x^2\right)x + 2\sqrt{\left(\frac{16}{9}-x^2\right)(1-x^2)\left(\frac{20}{9}+x^2\right)x} = 4.$

$\left(\frac{16}{9}-x^2-\frac{16}{9}x^2+x^4\right)\left(\frac{20}{9}+x^2\right)x$

$\sqrt{4-\left(\frac{16}{9}-x^2\right)} = \frac{20}{9}+x^2$

$DT = \frac{2}{\sin\beta}\ 2\cdot\sin\beta$

211006192 (U846690 M1276224)

Черновик.

№2.

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$

ОДЗ: $x+1 \geq 0$

$4-x \geq 0$

$4+3x-x^2 \geq 0$

$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{-2} = \frac{-3 \pm 5}{-2} = \left[\begin{array}{l} 4 \\ 1 \end{array}\right.$

$\underset{a}{\sqrt{x+1}} - \underset{b}{\sqrt{4-x}} + 3 = 2\sqrt{(4-x)(x+1)}$

$\sqrt{x+1} = t$

$\sqrt{4-x} = \sqrt{5-t^2}$

$t - \sqrt{5-t^2} + 3 = 2t\sqrt{5-t^2}$

$t + 3 = \sqrt{5-t^2}(1+2t)$

$t^2 + 6t + 9 = (5-t^2)(1+2t)^2$

$= (5-t^2)(1+4t+4t^2) = 5 + 20t + 20t^2 - t^2 - 4t^3 - 4t^4$

$4t^4 + 4t^3 - 18t^2 - 14t + 4 = 0$

$2t^4 + 2t^3 - 9t^2 - 7t + 2 = 0$

$t = -1$: $2 - 2 - 9 + 7 + 2 = 0$

$$\begin{array}{l} 2t^4 + 2t^3 - 9t^2 - 7t + 2 \;\big|\; t+1 \\ -2t^4 - 2t^3 \qquad\qquad\qquad 2t^3 + 4t^2 - 5t - 6 \\ \overline{\qquad 4t^3 - 9t^2} \\ \quad -4t^3 - 4t^2 \\ \overline{\qquad\quad -5t^2 - 7t} \\ \qquad\; -5t^2 + 5t \\ \overline{\qquad\qquad -12t + 2} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2t^4 + 2t^3 - 9t^2 - 7t + 2 \;\big|\; t+1 \\ -2t^4 + 2t^3 \qquad\qquad\quad 2t^3 \\ \overline{\qquad\qquad -9t^2 - 7t} \end{array}$$

$2t^3(t+1) - 9t^2 - 9t + 2t + 2 = 0$

$= -9t(t+1) + 2(t+1) = 0$

$(t+1)(2t^3 - 9t + 2) = 0$

$t = 2$ - корень

$$\begin{array}{l} 2t^3 - 9t + 2 \;\big|\; t-2 \\ -2t^3 - 4t^2 \qquad 2t^2 + 4t - 1 \\ \overline{\quad 4t^2 - 9t} \\ \; -4t^2 - 8t \\ \overline{\qquad -t + 2} \end{array}$$

$= \frac{-4 \pm \sqrt{16+8}}{4} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{6}}{4} = -1 \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$.

$\frac{\sqrt{6}}{2} < 1$

$\sqrt{6} < 2$

Черновик

№3. (!) Все a : A, B по 1 сторону от $x+y=3$.

$2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0$ – координаты A.

$ax^2+4a^2x-ay+4a^3+2=0$ – парабола с вершиной в B.

(2)

$(x+y)^2 \cancel{+4y^2-6ay-2ax}$

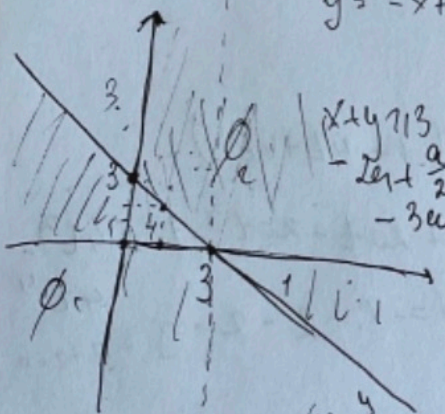
$x^2-2ax+5y^2-6ay+2xy+2a^2=0 \qquad -(2y-\frac{x}{2})^2-\frac{x^2}{4}$

$(x-a)^2+(3y-a)^2-4y^2+2xy=0$

$(x-a)^2+(3y-a)^2-2y(-x+2y)=0 \Rightarrow$ т. А. не в I четверти и не в III.

$y=-x+3 \qquad +2y(-x+2y)=0.$

1) Точки A и B лежат выше.



$x+y\ge 3$

$-2a+\frac{a}{2}\ge 3$

$-3a\ge 6$

$3(a+2)\le 0$

$a\le -2.$

$y\ge 3$

2: ~~$x,y\ge 0$~~ $x\ge 3 \quad y\ge 3.$

(2) $ax^2+4a^2x-ay+4a^3+2=0$

B. вершина: $x_0=\frac{-b}{2a}=\frac{-4a^2}{2a}=$

$=-2a.$

(1) $\frac{y}{a}=4\pm\sqrt{16-20}$

y_0: $a\cdot(-2a)^2+4a^2(-2a)-ay+4a^3+2=0$

$4a^3-8a^3-ay+4a^3+2=0$

$ay=2 \qquad y=\frac{a}{2}.$

Если IV четверть:

Если $x\ge 0$, то $a\le 0.$

$\Rightarrow y\ge 0.$

Нужно, чтобы B$(-2a;\frac{a}{2})$ и A – по 1 сторону от $x+y=3.$

$2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0. \qquad x=a:$

$(x-a)^2+(3y-a)^2-4y^2+2xy=0 \qquad 2a^2-2a^2-6ay+a^2+2ay+5y^2$

$2y(x-2y)=0. \qquad a^2-4ay+5y^2=0 \mid :a^2$

~~$y=\ldots$~~

$y=\frac{4a\pm\sqrt{16a^2-20a^2}}{10}=\frac{4a\pm\sqrt{-4a^2}}{10} \qquad (1)\ 5\left(\frac{y}{a}\right)^2-\frac{4y}{a}+1=0.$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006192**

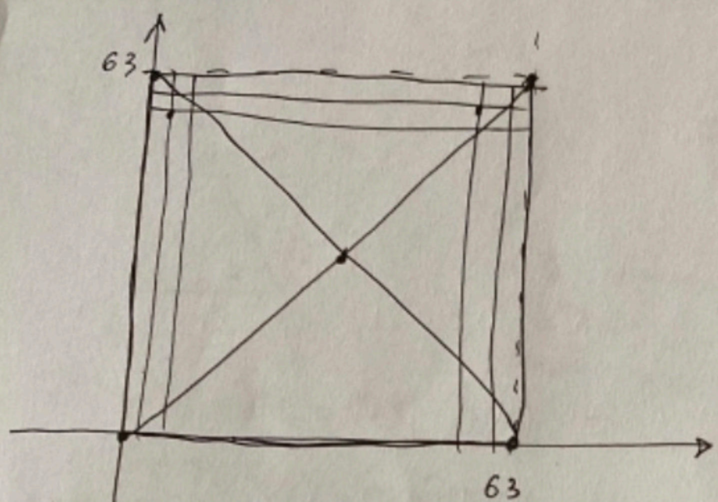
ID профиля: **846690**

Вариант 12

Чистовик.

Математика 10 класс.

№5.



Решение:

Посчитаем общее кол-во узлов, не считая границы квадрата. На каждой прямой ∥ оси координат (O_y) находится $63-1=62$ узла. Т.к. границы не включаем, то таких узлов всего $62 \cdot 62$. Далее требуется выбрать 1 узел так, чтобы он находился на $y=x$ или $y=63-x$. Посчитаем суммарное кол-во узлов на этих прямых. На прямой $y=x$ имеется 62 узла (не включая границы) (каждая прямая ∥ O_y пересекает ровно 1 раз). На $y=63-x$ также 62 (диагонали квадрата равны). Но у них есть 1 общая точка ⇒ всех вариантов выбрать 1 узел на какой-либо из этих прямых: $62+62-1=143$.

Далее для 2-го узла запрещены все точки, оставшиеся на прямых ∥ осям и проходящих через 1 узел, т.е. на прямой ∥ O_y – $62-2=60$ точка запрещена (границы не считаем) и также ∥ O_x – 60 точек ⇒ всего $60+60=120$ точек запрещено. ⇒ Всего вариантов:

$143 \cdot (62 \cdot 62 - 120)$

общее кол-во точек. запрещенные для каждого.

$$\begin{array}{r} 62 \\ \times\ 62 \\ \hline 124 \\ 372 \\ \hline 3844 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3844 \\ -\ 120 \\ \hline 3724 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\ 143 \\ \hline 11532 \\ 15376 \\ 3844 \\ \hline 549692 \end{array}$$

Ответ: 549692 способа.

2

211006192 (U846690 M1276225)

Чистовик. математика

№4.

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \\ 2x^4 + 2y^4 + 5x^2y^2 = \frac{9}{4}. \end{cases}$$

ОДЗ: $x^2+y^2 \neq 0$.

Сделаем замену $x^2y^2 = a$, $x^2+y^2 = b$;

Тогда $x^4+y^4 = (x^2+y^2)^2 - 2x^2y^2 = b^2 - 2a$

$$\begin{cases} \frac{1}{b} + a = \frac{5}{4} \Rightarrow a = \frac{5}{4} - \frac{1}{b} \\ 2(b^2-2a) + 5a = \frac{9}{4}. \end{cases}$$

$$2\left(b^2 - 2\cdot\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{b}\right)\right) + 5\cdot\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{b}\right) = \frac{9}{4}$$

$$2\left(b^2 - \frac{5}{2} + \frac{2}{b}\right) + \frac{25}{4} - \frac{5}{b} = \frac{9}{4}$$

$$2b^2 - 5 + \frac{4}{b} + \frac{25}{4} - \frac{5}{b} = \frac{9}{4} \Rightarrow 2b^2 - \frac{1}{b} = \frac{9}{4} - \frac{25}{4} + 5 = 1$$

$-\frac{16}{4} = -4$

$$2b^2 - \frac{1}{b} - 1 = 0$$

$$\frac{2b^3-1}{b} - 1 = 0 \Rightarrow 2b^3 - b - 1 = 0 \text{ (с учетом ОДЗ } b \neq 0).$$

Заметим $b = 1$ - корень:

$$\begin{array}{r|l} 2b^3 - b - 1 & b-1 \\ \underline{-2b^3 - 2b^2} & 2b^2+2b+1. \\ 2b^2 - b & \\ \underline{-2b^2 - 2b} & \\ b - 1 & \end{array}$$

$$(2b^2+2b+1)(b-1) = 0$$

$D = 4 - 4\cdot 2 < 0 \Rightarrow$ корней нет.

Итак $b = 1$: $\frac{1}{1} + a = \frac{5}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{4}$.

$$\begin{cases} x^2y^2 = \frac{1}{4} \\ x^2+y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1-x^2 \end{cases}$$

$$x^2(1-x^2) = \frac{1}{4}$$

$$x^4 - x^2 + \frac{1}{4} = 0$$

$$x^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\cdot\frac{1}{4}}}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

1) $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$: $\frac{1}{2} + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

2) $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$: $\frac{1}{2} + y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

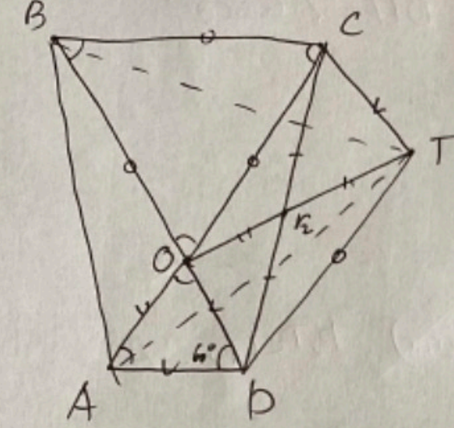
Ответ: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

1.

211006192 (U846690 M1276225)

Чистовик.

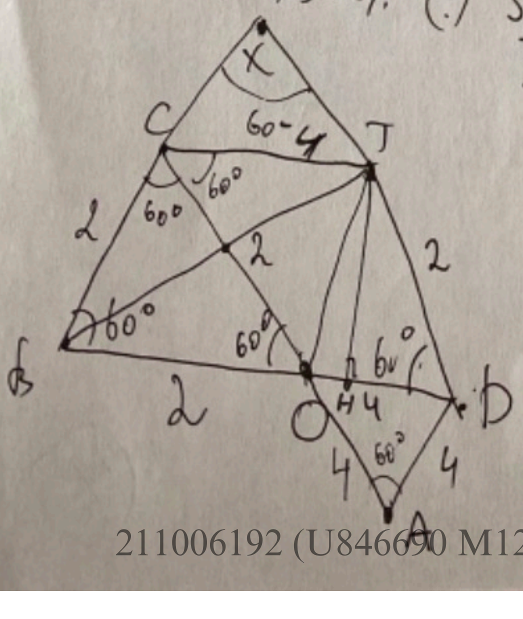
№6.



Решение:

а) Обозначим точку пересечения CD и OT за K.
ΔBOC и ΔAOD - правильные, т.к. все углы $= 60°$, т.е. $\angle BDA = \angle DBC = 60°$ $\Rightarrow BC \parallel AD$. Также $BO = OC = BC$, $AO = DO = AD$. T - симметрична т. O относительно середины CD $\Rightarrow CK = KD$, $OK = KT$ $\Rightarrow OCTD$ - параллелограм. (диагонали точкой пересечения делятся пополам).
$\Rightarrow BC = OC = DT$, $DO = CT$ и $CO \parallel TD$, $DO \parallel CT$. $\Rightarrow BD \parallel CT$, $AC \parallel DT$.
$\Rightarrow BCTD$ - равнобокая трапеция, а значит диагонали равны: $BT = CD$. Также $AD = DO = CT$, $AC \parallel DT \Rightarrow ACTD$ - равнобокая трапеция $\Rightarrow AT = CD$ (диагонали равны) $\Rightarrow AT = BT$.
$\angle COD = 120°$ (смежный с $\angle DOA$). т.к. OCTD - параллелограм, $\angle DTC = \angle COD = 120°$. $\Rightarrow ACTD$ - вписанный ($\angle DTC + \angle CAD = 120 + 60 = 180°$), также BCTD - вписанный $\Rightarrow$ точка T лежит на 1-ой окружности с точками C, A, D и в то же время на одной окружности с точками C, B, D $\Rightarrow$ все точки A, B, C, D, T лежат на одной окружности. $\Rightarrow \angle ATB = \angle ACB = 60°$ (опираются на AB)
$\Rightarrow$ в ΔBTA: $BT = AT$, $\angle ATB = 60° \Rightarrow \angle TBA = \angle TAB = \frac{180 - 60}{2} = 60°$
$\Rightarrow \Delta BTA$ - правильный, ч.т.д.

б) $BC = 2$, $AD = 4$. (?) $\frac{S_{\Delta ABT}}{S_{ABCD}}$



Рассмотрим трапецию BCTD.
$\angle BDT = 60°$, т.к. $\angle COD = 120°$, и DOCT - параллелограм.
Продлим DT и CT до пересечения в точке X. тогда из суммы углов треугольника $\angle BXD = 60°$ т.к. ΔBOC и ΔAOD - правильные, то $BO = 2$, $DO = 4$.

Черновик.

№4.

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \\ 2x^4 + 2y^4 + 5x^2y^2 = \frac{9}{4}. \end{cases}$$

$a = x^2y^2$

$b = x^2+y^2$

b

$$\begin{cases} \frac{1}{b} + a = \frac{5}{4} \\ 2\cdot(b^2-2a) + 5a = \frac{9}{4}. \end{cases}$$

$2(x^4+y^4) =$

$= 2(b^2 - 2x^2y^2)$

$a = \frac{5}{4} - \frac{1}{b}$

$2(b^2 - \frac{5}{2} + \frac{2}{b}) + \frac{25}{4} - \frac{5}{b} = \frac{9}{4}$

$2b^2 - 5 + \frac{4}{b} + \frac{25}{4} - \frac{5}{b} = \frac{9}{4}$

$2b^2 - \frac{1}{b} = -\frac{16}{4} + 5 = 1.$

$2b^2 - \frac{1}{b} - 1 < 0$

$\frac{2b^3 - 1 - b}{b} = 0 \longrightarrow$ Заметим $b=1$ - корень

$2b^3 - b - 1 \mid b-1$

$-2b^3 - 2b^2 \qquad 2b^2+2b+1$

$2b^2 - b$

$-2b^2 - 2b$

$b - 1$

$D = 4 - 4\cdot 2 < 0 \; \varnothing$

$\boxed{b = 1}$. $\Rightarrow 1 + a = \frac{5}{4}$

$4 + 4a = 5$

$4a = 1 \Rightarrow \underline{a = \frac{1}{4}}$.

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1 - x^2 \\ x^2y^2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$x^2(1-x^2) = \frac{1}{4}$

$-x^4 + x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x^4 - x^2 + \frac{1}{4} = 0$ Замена $t = x^2$:

$t^2 - t + \frac{1}{4} = 0$

$t = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\cdot\frac{1}{4}}}{2} = \frac{1}{2}$

$x^2 = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$

1) $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$: $\frac{1}{2} + y^2 = 1$

$y^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$

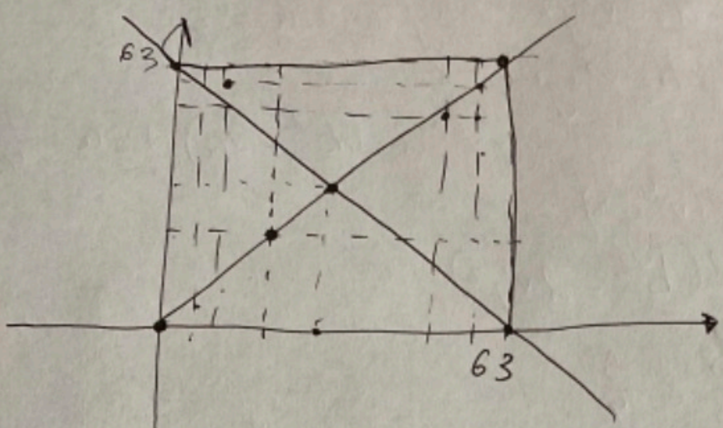
2) $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$: $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

Ответ: $(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}})$, $(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

211006192 (U846690 M1276225)

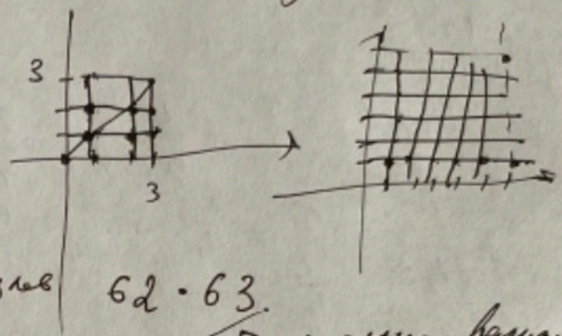
Черновик.

№5.



$\begin{cases} y = x \\ y = 63 - x \end{cases}$

Выбрать $\forall$ узел:
Посчитать кол-во узлов.



Не включая границ кол-во узлов $62 \cdot 63$ ← столько вариантов

Выбрать 1-ый узел (любой). Не считая границ на прямой $y=x$ лежит 62 узла и на $y=63-x$ также 62 узла
$\Rightarrow$ всего узлов на этих прямых $2 \cdot 62 - 1$ (т. пересечения).
$= 143$ вариантов для 1-го узла.

Для 2: $\nparallel$ Ox и Oy

На этих прямых нельзя выбрать $61 + 61 = 122$ запретных

$143 \cdot (62 \cdot 63 - 122)$

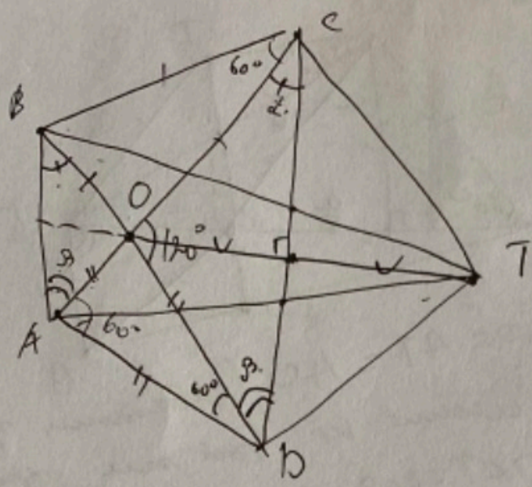
$$62 \times 63 = 186 + 3720 = 3906$$

$$3906 - 122 = 3784$$

$$3784 \times 143 = 11352 + 151360 + 378400 = \boxed{541112}$$

Черновик.

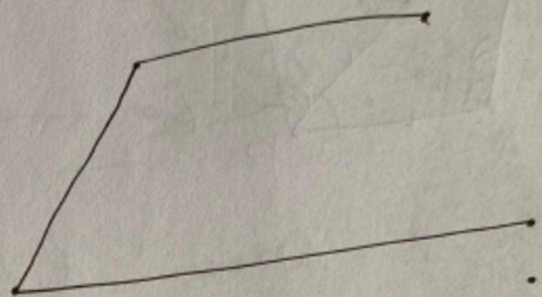
W6.

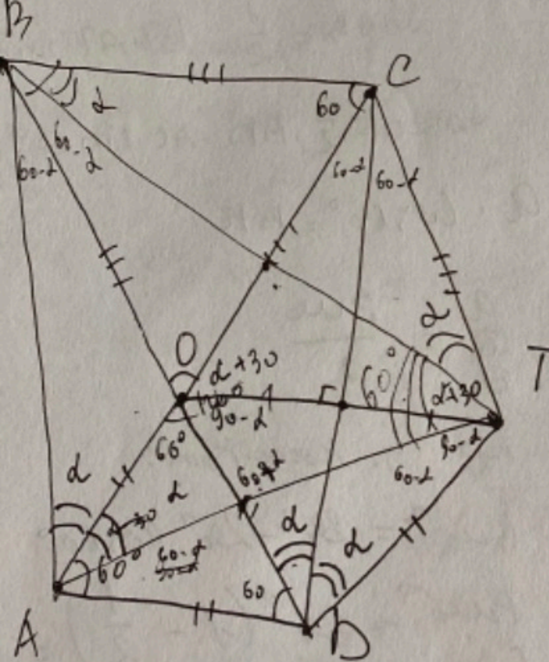


C/ ABT - правильные

$60 + \alpha + 60 + \beta = 180$

$\alpha + \beta = 60°$.





$\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ - правильные.

$\Rightarrow \underline{BC \parallel AD}$ $\angle BCA = \angle BDA \Rightarrow ABCD$ - вписанный.

$\angle TAD = \angle DTA = \frac{180 - (60 + 2\alpha)}{2} =$

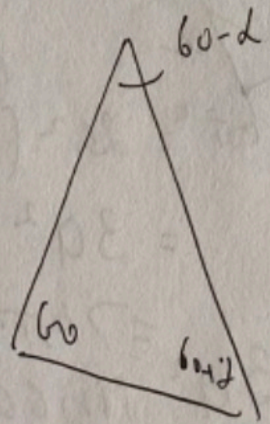
$= 60 - \alpha$.

Для друг: $\angle CBT = \angle CTB = \frac{180 - (60 \cdot 3 - 2\alpha)}{2} =$

$= \alpha$ $\Rightarrow$ из Σ углов:

$\underline{\angle BTA = 60°}$. $180 - (120 - \alpha) =$

$= 60 + \alpha$



$180 - (60 + \alpha) =$

$= 120 - \alpha$

№6 (продолжение)

Опустим высоту TH. $TH = 2\cdot\sin 60^\circ$, $DH = 2\cdot\cos 60^\circ$

$\Rightarrow BH = BD - DH = 6 - 2\cdot\underset{\cos 60^\circ}{\frac{1}{2}} = 5$

По т. Пифагора:

$BT = \sqrt{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 25} = \sqrt{25+\sqrt{3}}$. По доказанному ранее ($BT = CD$, трапеция равнобокая) $BT = CD = AT$.

$\Rightarrow S_{\triangle ATB} = \frac{1}{2}\cdot BT\cdot AT\cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2}\cdot(25+\sqrt{3})\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}\cdot AC\cdot BD \sin 60^\circ$, $BD = 6 = AC$ ($\triangle BOA$ и $\triangle AOD$ - равнобедренные)

$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow$ Отношение: $\frac{S_{\triangle ATB}}{S_{ABCD}} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}}\cdot(25+\sqrt{3})\cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}}}{\cancel{\frac{1}{2}}\cdot 36\cdot\cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}}} =$

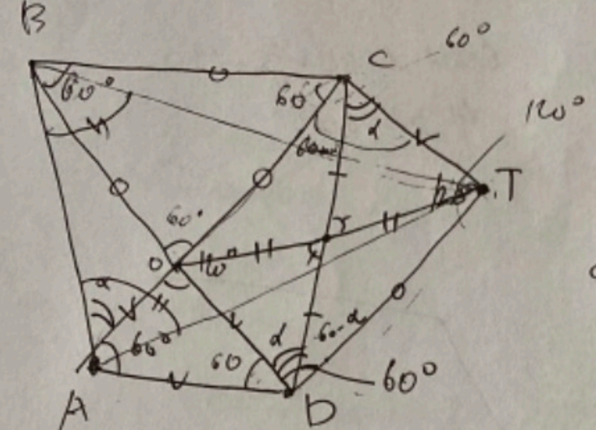
$= \frac{25+\sqrt{3}}{36}$

Ответ: а) доказано

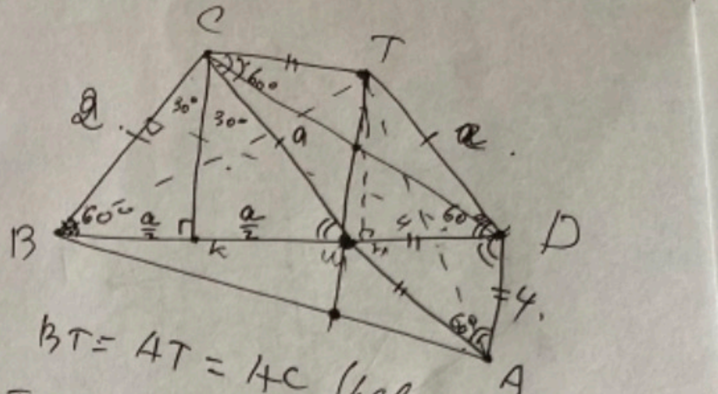
б) $\frac{25+\sqrt{3}}{36}$

Черновик.

№6



а)



BT = AT = AC (равнобокая трапеция)
T - лежит на той же окружности
$\Rightarrow \angle T = 60°$ ч.т.д.

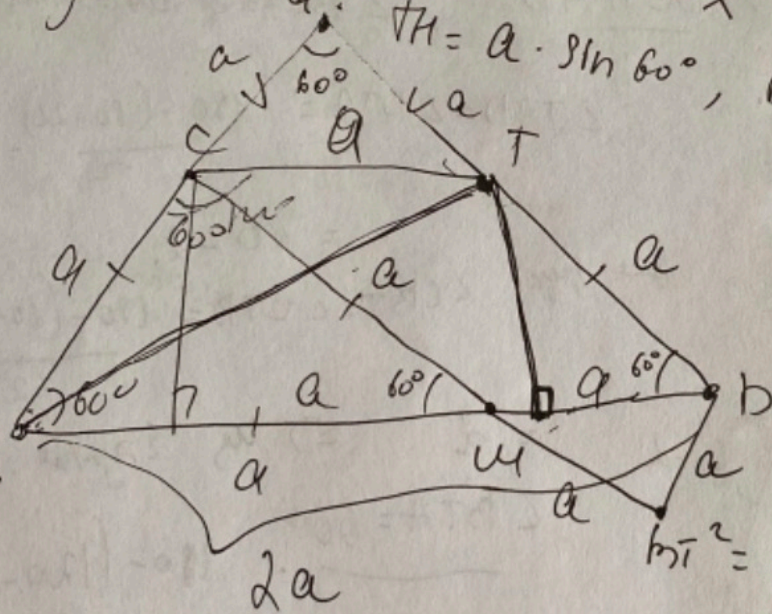
б) $BC = 2.$ $AD = 4.$ (!) $\dfrac{S_{\Delta ABT}}{S_{ABCD}}$

~~AC = BT~~ $CD = AT = BT. = x$

$S_{\Delta ABT} = \frac{1}{2} \cdot BT \cdot AT \cdot \sin 60°$

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} BD \cdot AC \sin 60°$

Пусть $BC = a$: $TH = a \cdot \sin 60°$, $DH = a \cdot \cos 60° = BK$



$\frac{a}{y} = \frac{Bm}{z}$

по т. косинусов:

$Bm^2 = 2a^2 - 2a^2 \cos 60°$

$Bm^2 = 2a^2\left(1 - \frac{1}{2}\right) =$

$BT^2 = 2a^2(1 - \underbrace{\cos 120°}_{-\frac{1}{2}}) = a$

$= 3a^2$

$BD = 2a. = AC$

$\Rightarrow BT = \sqrt{3}a = AT.$

$\Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot 4a^2 \cdot \cos 60° \Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot 3a^2 \sin 60°. \Rightarrow$ Отношение $\boxed{\frac{3}{4}}$