Часть 1

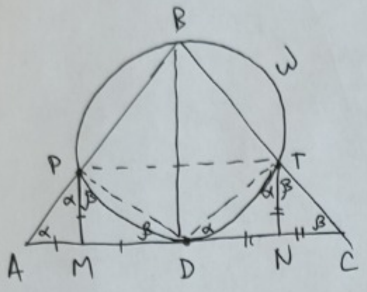
Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211006183**

ID профиля: **862297**

Вариант 12

Задача 1)



1) M – середина AD; N – середина DC ⇒
⇒ в $\triangle APD$ и $\triangle CTD$ – PM и TN соответственно – медианы.

2) Также $\angle BPD$ и $\angle BTD$ – вписанные, опирающиеся на диаметр. ⇒ $\angle BPD = \angle BTD = 90^\circ$

3) из 1) и 2) ⇒ PM и TN – медианы прямоуг. $\triangle$-ов ⇒ $\triangle APM$, $\triangle PMD$, $\triangle TND$ и $\triangle TNC$ – р/б (см. рис.)

4) Также из $PM \parallel TN \Rightarrow \angle PMA = \angle TND$; $\angle PMD = \angle TNC$

5) из 3) и 4) ⇒ $\angle PAM = \angle APM = \angle TDN = \angle DTN = \alpha$

$\angle MPD = \angle MDP = \angle NCT = \angle NTC = \beta$.

$\Rightarrow PDT = 180^\circ - \alpha - \beta$, а это $= 90^\circ$ $(= \angle APD) \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle PBT = 180^\circ - \angle PDT = 90^\circ$ (т. к. PBTD – впис.)

~~PM = BD (т.к. она - диаметр ω)~~

по т. об $\angle$ между хордой и касательной $\angle PBD = \beta$;
$\angle TBD = \alpha \Rightarrow \angle BDP = 90 - \beta = \alpha$; $\angle BDT = 90 - \alpha = \beta \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ADB = 90^\circ$; $\angle BDC = 90^\circ \Rightarrow$ BD – высота $\triangle ABC$.

$AC = AM + MD + DN + NC = 2PM + 2TN = 3$

$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} BD \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{1} = 2$. Чистовик

Ответ: 1) 90° 2) 2.

Задача 2) $\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$

Прежде, чем упрощать выр-е, посмотрим на обл. определения

$$\left.\begin{matrix} x+1\geqslant 0\\ 4-x\geqslant 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow x\in[-1;4].$$

Возведём обе части условия в квадрат.

$$x+1+4-x+9-2\sqrt{(4-x)(x+1)}+6\sqrt{x+1}-6\sqrt{4-x}=4(x+1)(4-x)$$

$$14-2\sqrt{(4-x)(x+1)}+6\left(2\sqrt{(4-x)(x+1)}-3\right)=4(x+1)(4-x)$$

Пусть $\sqrt{(4-x)(x+1)}=t$.

$$14-2t+12t-18-4t^2=0.$$

$\cancel{4t^2+10t-4=0}$ $4t^2-10t+4=0$

$\cancel{2t^2+5t-2=0,\ D=25+16=41}$

$\cancel{t=\frac{-5\pm\sqrt{41}}{4}}$. ~~Один из них не подходит~~, т.к.

$\cancel{t=\sqrt{(4-x)(x+1)}\geqslant 0}$.

~~Вернемся к x.~~

$\cancel{4\sqrt{(4-x)(x+1)}=\sqrt{41}-5}$.

$\cancel{16(4-x)(x+1)=25+41-10\sqrt{41}}$.

$$2t^2-\cancel{10}^{\,5}t+2=0,\ D=25-16=9,\ t_{1,2}=\frac{5\pm3}{4}=2 \text{ или } \frac{1}{2}.$$

Чистовик

2

Вернёмся к x:

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{(4-x)(x+1)}=2\\ \sqrt{(4-x)(x+1)}=0,5\end{array}\right. \to \left[\begin{array}{l}4x+\cancel{4}-x^2-x=\cancel{4}\\ 4x+4-x^2-x=0,25\end{array}\right. \to$$

$$\to \left[\begin{array}{l}x^2-3x=0\\ x^2-3x-3,75=0,\ D=9+4\cdot 3,75=\\ \qquad =9+15=24\end{array}\right. \to$$

$$\to \left[\begin{array}{l}x=0\ (1)\\ x=3\ (2)\\ x=\frac{3+\sqrt{24}}{2}\ (3)\\ x=\frac{3-\sqrt{24}}{2}\ (4)\end{array}\right.$$

Не все совершённые переходы были равносильными, поэтому сделаем проверку.
(1) и (2) очевидно подходят.

$$(3):\ \sqrt{\frac{3+\sqrt{24}+2}{2}}-\sqrt{\frac{8-3-\sqrt{24}}{2}}+3=2\sqrt{4+\frac{9+3\sqrt{24}}{2}-\frac{9+24+6\sqrt{24}}{4}}$$

$$\sqrt{\frac{5+\sqrt{24}}{2}}-\sqrt{\frac{5-\sqrt{24}}{2}}+3=2\sqrt{\frac{16+18+\cancel{6\sqrt{24}}-9-24-\cancel{6\sqrt{24}}}{4}}$$

$$\underbrace{\sqrt{\frac{5+\sqrt{24}}{2}}-\sqrt{\frac{5-\sqrt{24}}{2}}}_{>0}=\underbrace{1-3}_{<0}$$ – не подх.

Аналогично не подходит (4)

Ответ: $\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=3\end{array}\right.$

Чистовик 3

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$, $D(f) = [-1; 4]$.

$x+1+4-x+9-2\sqrt{(x+1)(4-x)} - 6\sqrt{4-x} + 6\sqrt{x+1} = 4(x+1)(4-x)$

$14 - 2\sqrt{(x+1)(4-x)} - 6\left(2\sqrt{(x+1)(4-x)} - 3\right) = 4(x+1)(4-x)$

$32 - 14\sqrt{(x+1)(4-x)} - 4(x+1)(4-x) = 0.$

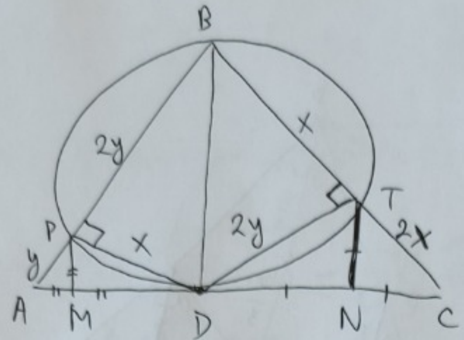
Пусть $\sqrt{(x+1)(4-x)} = t$.

$2t^2 + 7t - 16 = 0.$

$D =$

$14 - 4 + 24 - 18 - 16 =$

ЧЕРНОВИК



ЧЕРНОВИК

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+3=2\sqrt{\underbrace{4+3x-x^2}}$$

$$=-(x^2-3x-4)$$

$$=-(x-4)(x+1)$$

$$\underbrace{\sqrt{x+1}}_{\uparrow\uparrow}\underbrace{-\sqrt{4-x}}_{\uparrow\uparrow}+3=2\underbrace{\sqrt{\underbrace{x+1}_{\uparrow\uparrow}}\sqrt{\underbrace{4-x}_{\downarrow\downarrow}}}_{\downarrow\downarrow}$$

$x+1 \geqslant 0 \quad x \geqslant -1$

$4-x \geqslant 0 \quad x \leq 4$

$$\sqrt{3+1}-\sqrt{4-3}+3=2\sqrt{(3+1)(4-3)}$$

$$2-1+3=2\sqrt{2\cdot 1}$$

$4=4$ — верно.

Задача 2) $\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+3=2\sqrt{4+3x-x^2}$

I) $\left.\begin{matrix} x+1\geqslant 0 \\ 4-x\geqslant 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow x\in[-1;4].$

II) Рассмотрим монотонности левой и правой частей ур-я на этом промежутке:

$$\left.\begin{matrix} x+1 \nearrow\nearrow \text{ на } [-1;4] \Rightarrow \sqrt{x+1} \nearrow\nearrow \text{ на } [-1;4] \\ 4-x \downarrow\downarrow \text{ на } [-1;4] \Rightarrow -\sqrt{4-x} \nearrow\nearrow \text{ на } [-1;4] \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ левая часть ур-я $\nearrow\nearrow$ на $[-1;4]$.

$$4+3x-x^2=-(x^2-3x-4)=-(x-4)(x+1)=(4-x)(x+1)$$

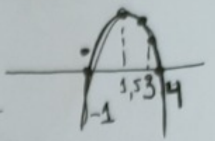
$\Rightarrow$ п.ч. $=2\sqrt{(4-x)(x+1)}$

ЧЕРНОВИК

$x_2 > x_1$

$\sqrt{(4-x_1)(x_1+1)} \vee \sqrt{(4-x_2)(x_2+1)}$

$4x_1 - x_1^2 + 4 - x_1 \vee 4x_2$ $\qquad 4+3x-x^2$



ЧЕРНОВИК

$-x^2+3x+4=0.$

$x_B = \frac{-3}{-2} = 1,5.$

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{(4-x)(x+1)}$

$x+1-4+x+9-2\sqrt{(x+1)(4-x)} + \underbrace{6\sqrt{x+1}-6\sqrt{4-x}}_{=6(2\sqrt{()()}-3)} =$

$= 4(4-x)(x+1)$

$2x+6-18+4\sqrt{(x+1)(4-x)} = 4(4-x)(x+1)$

$x-6 \cancel{+} - \cancel{4}\,2(4-x)(x+1) = -4\sqrt{(x+1)(4-x)}$

$x-6-2(4x+4-x^2-x) = -\cancel{4}\,2\sqrt{(x+1)(4-x)}$

$2x^2-5x-14 = -2\sqrt{(x+1)(4-x)}$

$D = 25+80+32=$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006183**

ID профиля: **862297**

Вариант 12

Задача 4) $\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \\ 2x^4 + 2y^4 + 5x^2y^2 = \frac{9}{4}. \end{cases}$

Чистовик

Пусть $x^2 = s$; $y^2 = t$:

$$\begin{cases} \frac{1}{s+t} + st = \frac{5}{4} \\ 2(s^2+t^2) + 5st = \frac{9}{4}. \end{cases}$$

Пусть $s+t = k$; $st = n$:

$$\begin{cases} \frac{1}{k} + n = \frac{5}{4} \\ 2(k^2-2n) + 5n = \frac{9}{4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{k} + n = \frac{5}{4} \ (1) \\ 2k^2 + n = \frac{9}{4} \ (2) \end{cases}$$

(2)-(1): $2k^2 - \frac{1}{k} = 1$.

$$\begin{cases} 2k^3 - k - 1 = 0 \\ k \neq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (k-1)(\underbrace{2k^2+2k+1}_{D<0}) = 0 \\ k \neq 0 \end{cases} \Rightarrow k = 1.$$

Подставим в (1): $1 + n = \frac{5}{4} \Rightarrow n = 0{,}25$.

Вернёмся к s и t:

$$\begin{cases} s+t = 1 \\ st = 0{,}25 \end{cases} \rightarrow s\cdot(1-s) = 0{,}25 \ ; \ s^2 - s + 0{,}25 = 0$$

$D = 1 - 1 = 0$.

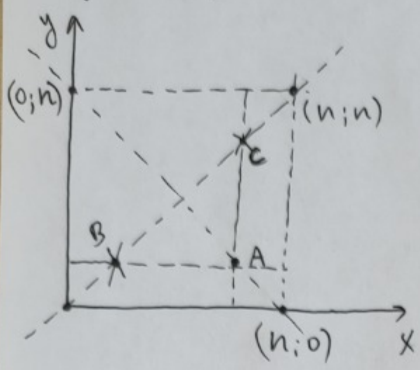
$s = \frac{1}{2}$. Тогда $t = \frac{1}{2}$.

Вернёмся к x и y:

$$\begin{cases} x^2 = \frac{1}{2} \\ y^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\sqrt{2}}{2};\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x = \frac{\sqrt{2}}{2};\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ x = -\frac{\sqrt{2}}{2};\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x = -\frac{\sqrt{2}}{2};\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right.$$

← Ответ.

Задача 5)



Рассм. квадрат $n \times n$, вписанный в угол декартовой системы координат.

Прямые $y = x$ и $y = n - x$ – его диагонали.

при нечётном n они пересекаются не в узле сетки.

Способов взять одну точку на одной из диагоналей $2(n-2)$ (т.к. каждую вер. и гор. линию диагональ пересекает в узле сетки)

После того, как мы взяли точку на диагонали (БОО пусть это т. А), есть $(n-3)+(n-\overset{4}{\cancel{3}})$ способов взять вторую точку, также лежащую на одной из диагоналей*, а также $(n-2)^2-(n-2)-(n-3)-((n-3)-(n-4))$ способов взять вторую точку не на диагонали

*– т.к. на одной из диагоналей есть отмеченная точка, а на другой есть 2 точки, лежащие с отмеченной на верт./гор. (B и C на рис.)

Итак, способов взять 2 точки, лежащие на диагоналях и удовл. условию $\frac{2(n-2)((n-3)+(n-4))}{2!}$, т. е. $61 \cdot 119$. А взять 2 точки, только одна из которых лежит на диагонали, можно $2(n-2)((n-2)^2-4n+12)$ способами.

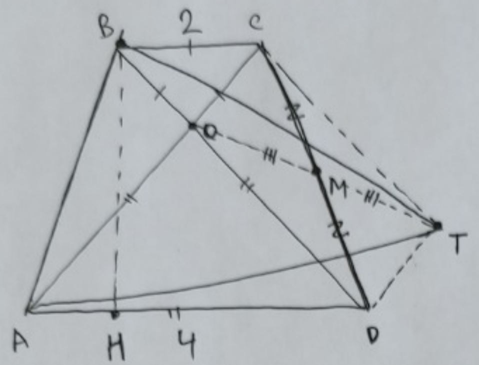
Всего способов $61 \cdot 119 + 2 \cdot 61 \cdot 3481 = 7259 + 424682 = 431941$

Ответ: 431941 способов.

ЧИСТОВИК 2

Задача 6)

Дано: ABCD - выпуклый
BOC и AOD - р/с
т.T симметрична т.O отн. т.M
т.M - середина CD.
$BC = 2$; $AD = 4$
Д-ть: $\triangle ABT$ - р/с
Найти: $\dfrac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$.



$\angle ODA = \angle OBC = 60°$ (по св-ву р/с $\triangle$) $\Rightarrow AD \parallel BC \Rightarrow ABCD$ - трапеция

$\left.\begin{array}{l} BO = CO \\ AO = OD \\ \angle ADB = \angle DOC \\ \quad \text{(верт.)} \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABO = \triangle DCO$ (по СУС) $\Rightarrow AB \overset{(1)}{=} CD \Rightarrow ABCD$ - р/б. трапеция.

$CM = MD$ (т.к. т.M - сер. CD), также $OM = MT$ (по опр. центр. симметрии)

$\Rightarrow OCTD$ - пар-мм (по пр-ку)

$\left.\begin{array}{l} BD \parallel CT \text{ (опр.)} \\ TD = CO = BC \\ \quad \text{(св-во)} \end{array}\right\} \Rightarrow BCTD$ - р/б трапеция $\Rightarrow BT \overset{(2)}{=} CD$ (диагонали)

$\left.\begin{array}{l} AC \parallel DT \text{ (опр.)} \\ CT = OD = AD \text{ (св-во)} \end{array}\right\} \Rightarrow ACTD$ - р/б трапеция $\Rightarrow AT \overset{(3)}{=} CD$ (диагонали)

из (1), (2) и (3) $\Rightarrow AB = BT = AT$ $(= CD)$ $\Rightarrow \triangle ABT$ - р/с ч.т.д.

$\left.\begin{array}{l} AO = AD = 4 \\ BO = BC = 2 \\ \angle BOA = 180° - 60° = \\ \quad 120° \text{ (смежный с } \angle BOC) \end{array}\right\} \Rightarrow AB = CD = \sqrt{4^2 + 2^2 + 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \cos 60°} =$ (по т. cos)

$= \sqrt{28}$

см. продолжение ЧИСТОВИК 3

$\Rightarrow AB = BT = AT = \sqrt{26}$ (т.к $\triangle ABT$ – р/с) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow S_{ABT} = \sqrt{\frac{3\sqrt{28}}{2} \cdot \frac{1 \cdot \sqrt{28}}{2} \cdot \frac{\sqrt{28}}{2} \cdot \frac{\sqrt{28}}{2}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 28^2}{16}} = \frac{28}{4}\sqrt{3} =$$

$$= 7\sqrt{3}. \ (4)$$

Д.п: BH – высота трапеции $ABCD$.

$AH = \frac{|AD - BC|}{2} = 1$; $AB = \sqrt{28}$ (док. выше)

$$\Rightarrow BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}.$$

$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot BH = 3 \cdot 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3} \ (5)$$

из (4) и (5) $\Rightarrow \frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{7\sqrt{3}}{9\sqrt{3}} = \frac{7}{9}.$

Ответ: $\frac{7}{9}$.

$$\begin{cases} \frac{1}{s+t} + st = \frac{5}{4} \\ 2\underbrace{(s^2+t^2)}_{=(s+t)^2-2st} + 5st = \frac{9}{4} \end{cases} ; \quad st =$$

ЧЕРНОВИК

Пусть $s+t=k$; $st=n$

$$\begin{cases} \frac{1}{k} + n = \frac{5}{4} \quad (1) \\ 2(k^2-2n)+5n = \frac{9}{4} \end{cases} ; \quad 2k^2+n = \frac{9}{4} \quad (2)$$

61×61: 61, 366, 3721

$63 \times 4 = 232$

$((2)-(1)): 2k^2 - \frac{1}{k} = 1.$

$3721 - 232 + 12 =$

$= 3721 - 240 = 3521 - 40 =$ 3481

$2k^3 - k - 1 = 0.$

$k = 1.$

$$\begin{array}{r|l} 2k^3 - k - 1 & k-1 \\ \hline -\;2k^3 - 2k^2 & 2k^2+2k+1, \; D = 4 - \\ 2k^2 - k & \\ -\;2k^2 - 2k & \\ k - 1 & \end{array}$$

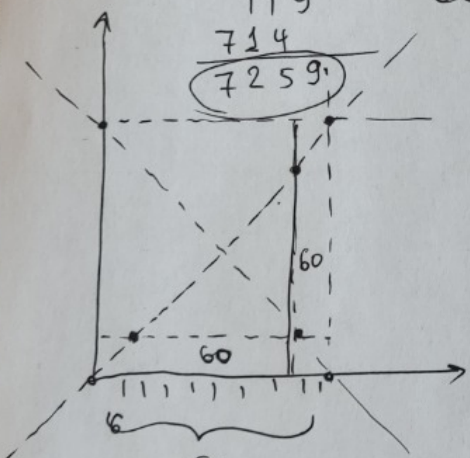
119×61: 119, 714, 7259

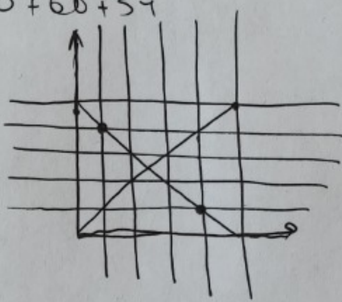
$= 714$

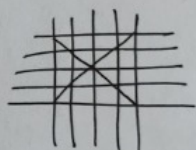
$600 + 60 + 54$

$63 = 3 \cdot 21 =$

$= 3 \cdot 3 \cdot 7.$







Способов взять точку на одной из 2-ух прямых:

$61 + 61 = 122.$

Затем способов взять точку [illegible] на этих прямых:

[illegible] $60 + 59 = 119.$

все $- 61 - 60 - 119$

Способов взять точка не на них:

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 5/4 \\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2 = \frac{9}{4}. \end{cases}$$

ЧЕРНОВИК

Пусть $x^2 = s$; $y^2 = t$.

$2s^2 - 4st + 2t^2$

$= 2(s-t)^2$

$$\begin{cases} \frac{1}{s+t} + st = \frac{5}{4} \\ 2s^2+2t^2-5st = \frac{9}{4} \end{cases}$$

$2 \cdot 6$

$$\begin{array}{r} 3481 \\ \times\ 122 \\ \hline 6962 \\ 6962 \\ 3481 \\ \hline 424682 \\ +\ 7259 \\ \hline 431941 \end{array}$$

$1 + st(s+t) = \frac{5(s+t)}{4}$

$4 + \underline{4s^2t} + 4st^2 - 5s - \underline{5t} = 0.$

$4st^2 + (4s^2-5)t + (4-5s) = 0.$

$D = (4s^2-5)^2 - 16s(4-5s) =$

$= 16s^4 - 40s^2 + 25 - 64s$

$$\begin{cases} \frac{4}{s+t} + 4st = 5 \\ 8(s^2+t^2) - 20st = 9 \end{cases}$$

$32-$

$$\begin{cases} \frac{4}{s+t} + 4st = 5 \quad \Big|\ 4st = 5 - \frac{4}{s+t}. \\ 8(s+t)^2 - 4st = 9 \end{cases}$$

$4k^3 - 7k + 2 = 0.$

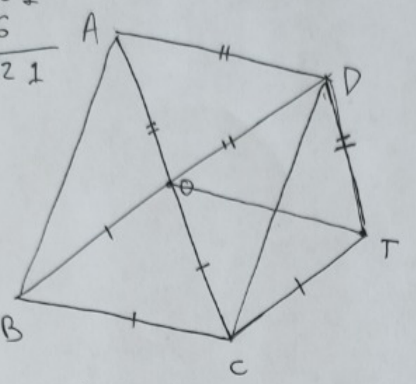
$8(s+t)^2 - 5 + \frac{4}{s+t} = 9$

$8k^2 + \frac{4}{k} = 14.$

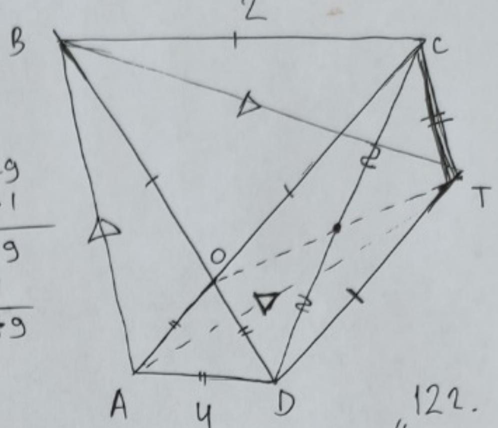
$8k^3 - 14k + 4 = 0$

$$\begin{array}{r} \times\ 61 \\ 61 \\ \hline 61 \\ 366\ \ \\ \hline 3721 \end{array}$$

$3521 - 40 = 3481$



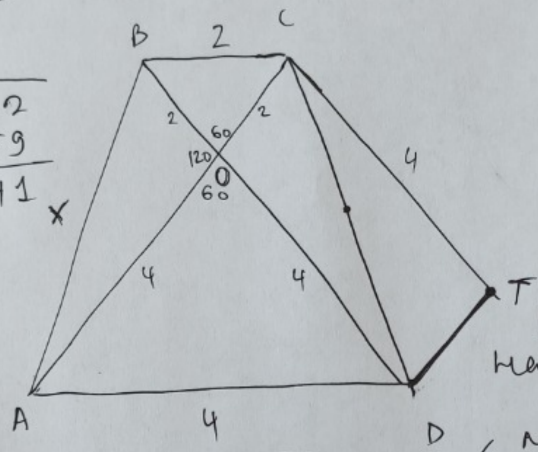
$$\begin{array}{r} 119 \\ 61 \\ \hline 119 \\ 714\ \ \\ \hline 7259 \end{array}$$



122.
=
$2 \cdot 61$.
=
Взяли Т.
на диагонали
(она должна быть)

$$\begin{array}{r} 3481 \\ \times\ 122 \\ \hline 6962 \\ 6962\ \ \\ 3481\ \ \ \ \\ \hline 424682 \\ +\ \ 7259 \\ \hline 431941 \end{array}$$

x



Взяли вторую.
на диагонали
|
любая кроме 3-ёх
↓
Ответ надо поделить на 2!
=
$61 \cdot 119$.
=
7259

Взяли вторую
не на диагонали
|
любая кроме вер. и гор линии и диагоналей
=
$122(61^2 - 240)$
=
424682

ЧЕРНОВИК 119.

любая $= 61^2$

кроме вер. и гор: $- 61 - 60$.

кроме тех, что на диаг: $- 119$.

$= 61^2 - 121 - 119 = (61^2 - 240)$