Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211006164**

ID профиля: **303671**

Вариант 12

Чистовик.

(3.)

(1) $2a^2 - 2ax - 6ay + x^2 + 2xy + 5y^2 = 0$

(2) $ax^2 + 4a^2x - ay + 4a^3 + 2 = 0$

$x + y = 3$

1. $a = 0 \Rightarrow \varnothing$.

2. найдем ~~верш~~ B: $a \neq 0$

$y = x^2 + 4ax + 4a^2 + \frac{2}{a}$

$B_{x_0} = -2a$

$B_{y_0} = 4a^2 - 8a^2 + 4a^2 + \frac{2}{a} = \frac{2}{a}$

$B\left(-2a; \frac{2}{a}\right)$

3. $x + y = 3 \Rightarrow$

$-2a + \frac{2}{a} = 3$

$-2a^2 - 3a + 2 = 0$

$2a^2 + 3a - 2 = 0$

$D = 9 + 16 = 25$

$a = \frac{-3 \pm 5}{4} = \left[\begin{array}{l} -2 \\ 0{,}5 \end{array}\right. \Rightarrow$

1. ~~при a~~ все возможные $a \cap c$ $x + y = 3 \Rightarrow$ ~~...~~ либо несколько рассмотрим 3 случая

1) $\left[\begin{array}{l} a > 0{,}5: \\ a < -2. \end{array}\right.$ $a = 1 \Rightarrow$ $-2 + 2 < 3 \Rightarrow$ находится ниже прямой $(x + y = 3)$ $\Rightarrow$

найдем a при котором (1) уравн. имеет корни.

т.к. А задает единств образом $\Rightarrow$ $D(1) = 0$

$2a^2 - 2ax - 6ay + ~~(x+y)^2~~ + 4y^2 = 0$

$5y^2 + 2xy + x^2 - 6ay - 2ax + 2a^2$

$y(2x - 6a)$

$2a^2 - 2ax - 6ay + 9 + 4y^2 = 0$ $\quad x + y ~~\leq 3 \Rightarrow y \leq~~ 3 - x$

$D = (6a - 2x)^2 - ~~...~~$

$2a^2 - 6a - 4y + 9 + 4y^2 = 0$

$(6a - 2x)^2 - 20(x^2 - 2ax + 2a^2) = 0$

$(y - 2)^2 = 6a - 2a^2 + 5$

$\Rightarrow y = \frac{-6a + 2x \pm (2x - a)}{10} =$

$36a^2 + 4x^2 - 24ax - 20x^2 + 40ax - 40a^2 = 0$

$= \left[\begin{array}{l} \frac{5x}{10} \\ 0{,}4x - 0{,}7a \\ 0{,}1a \end{array}\right. \Rightarrow$

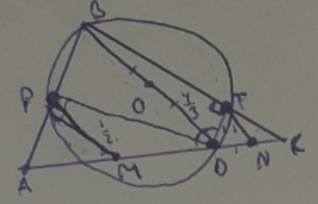
$-16x^2 + 16ax - 4a^2 = 0$

$(2x - a)^2 = 0 \Rightarrow x = 2a \Rightarrow$

2) при $a \in (-2; 0{,}5)$ – выше прямой $x + y = 3$, находится B' проверим, подставив любые числа из диапазона.

(1)

Чистовик.



Решение:

1) 1. ∠BTD = 90° (т.к. опирается на диаметр)

2. соединим D и P ⇒ ∠BPD = 90° (т.к. опир. на диам.) ⇒ по св-ву о Σ∠

⇒ для 4-ёхуг. ⇒ ∠PBT + ∠BTD + ∠PDT + ∠DPB = 360° ⇒

⇒ ∠PBC + ∠ADT = 180° (из п.1 и п.2)

3. пусть ∠PDB = α, ∠BDT = β, ∠BAC = x, ∠ACB = z ⇒ т.к. △APD = 90° (т. к. смежн.) по св-ву п/у △ ⇒ ∠PDA = 90° − x

аналогично для △DTC ⇒ ∠TDC = 90° − z ⇒

⇒ α + β + ∠PDA + ∠TDC = 180° (т.к. сумма смежных углов) ⇒

⇒ α + β + 90° − x + 90° − z = 180° ⇒

α + β = x + z ⇒ т.к. Σ∠△ = 180° ⇒ ∠ABC = 180° − 90° = 90°.

Ответ: 90°

2). т.к. △PDA − п/у (из п.3) по св-ву мед. п/у △ ⇒ PM = AM = MD = $\frac{1}{2}$

аналогично для TN = DN = NC = 1 ⇒

⇒ AC = AM + MD + DN + NC = 2 + 1 = 3

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}$ AB · BC (по св-ву п/у △)

по св-ву п/у △

$S_{\triangle ABC}$ = BC · AB · $\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{2}$ BD · AC = $\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3$ = 2

Ответ: 2

Чистовик.

(2) $\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{(4-x)(x+1)}$

ОДЗ: $\begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 4 \end{cases} \Rightarrow x \in [-1; 4]$

1. Пусть $a = \sqrt{x+1}, a \geq 0$

$b = \sqrt{4-x}, b \geq 0$

$a - b + 3 = 2ab$

$a - b = 2ab - 3 \;|^{\wedge 2}$

$a^2 + b^2 - 2ab = 4a^2b^2 - 12ab + 9$

$a^2 + b^2 + 10ab - 4a^2b^2 - 9 = 0$

Делаем обратную замену.

$x + 1 + 4 - x + 10\sqrt{(4-x)(x+1)} - 4(4 + 3x - x^2) - 9 = 0$

2. Пусть $t = \sqrt{(4-x)(x+1)}, t \geq 0$

$-4t^2 + 10t - 4 = 0$

$4t^2 - 10t + 4 = 0$

$2t^2 - 5t + 2 = 0$

$D = 25 - 16 = 9$

$t = \frac{5 \pm 3}{4} = \left[\begin{matrix} 0{,}5 \\ 2. \end{matrix}\right.$

3. Делаем обр. замену

1) $t = 2 \Rightarrow$

$(4-x)(x+1) = 4 \Rightarrow$

$4 + 3x - x^2 = 4 \Rightarrow$

$x^2 - 3x = 0$

$x = \left[\begin{matrix} 0 \\ 3 \end{matrix}\right.$ $\oplus$ одз.

2) $t = 0{,}5 \Rightarrow$

$16 + 12x - 4x^2 = 1$

$4x^2 - 12x - 15 = 0$

$D = 144 + 240 = 384$

$x = \frac{12 \pm \sqrt{384}}{8}$

$x = \left[\begin{matrix} \frac{3 \pm \sqrt{24}}{2} \end{matrix}\right.$

1) $x = \frac{3 + \sqrt{24}}{2}$ $\oplus$ подх. (<5)

2) $x = \frac{3 - \sqrt{24}}{2} \Rightarrow$ подх.

4) 3) $x = \frac{3 - \sqrt{24}}{2}$.

$\sqrt{\frac{5 - \sqrt{24}}{2}} - \sqrt{\frac{5 + \sqrt{24}}{2}} < 1 \Rightarrow$ ~~+~~ $1 = 1$

$x = \frac{3 + \sqrt{24}}{2}$

4) $\sqrt{\frac{5 + \sqrt{24}}{2}} - \sqrt{\frac{5 - \sqrt{24}}{2}}$

$= \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}\right)^2$

$\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{3})3 =$

$= 1 \Rightarrow$ ~~5~~ $\neq 1 \Rightarrow \ominus$

4) Проверка:

1) $x = 0$:

$1 - 2 + 3 \neq 4 \ominus$

2) $x = 3$:

$2 - 1 + 3 = 4 \oplus$

Ответ: 3; $\frac{3 + \sqrt{24}}{2}$; ~~[illegible]~~

Черновик

1, 2, 3

1: $\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$

ОДЗ: $\begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 4 \end{cases} \Rightarrow x \in [-1; 4]$

$\sqrt{4+3x-x^2} = \sqrt{(x+1)(4-x)} \Rightarrow$

$4x - x$

$(4-x)(x+1)$

$a - b + 3 = 2ab$

$a^2 + b^2 - 2ab = 4a^2b^2 - 12ab + 9$

$a^2 + b^2 - 4a^2b^2 + 10ab + 9 = 0$

$x + 1 + 4 - x - 4(4+3x-x^2) + 10\sqrt{4+3x-x^2} + 9 = 0$

$t = \sqrt{4+3x-x^2} \geq 0$

$-4t^2 + 10t + 14 = 0$

$16 \cdot 14 = 160 + 64 = 224$

$4(4+3x-x^2) = 49$

$x^2 - 3x - 3 = 0$

$D =$

$D = 100 + 224 = 324 = 18^2$

$16 + 12x - 4x^2 = 49$

$t = \frac{-10 \pm 18}{-8} =$

$18^2 =$

$4x^2 - 12x + 33 = 0$

$D = 144 - \dots \Rightarrow \varnothing$

$= \left[\begin{array}{l} -1 \\ 3{,}5 \end{array}\right.$

$-\frac{14}{4} = \frac{-7}{-2}$

211006164 (U303671 M1276810)

Чистовик.

(3) ⇒

$2a + 0{,}5a -$

1. $a \in (-\infty; -2) \cup (0{,}5; +\infty) \Rightarrow x + y > 3 \Rightarrow$

$\begin{cases} 2a - 0{,}5a \leq 3 \\ 2a - 0{,}7a \leq 3 \end{cases} \Rightarrow$ $a \leq 2$

$1{,}3a > 3$

$2{,}1a \leq 3 \Rightarrow$ $1{,}3a >$ $a \leq \frac{30}{21} \frac{10}{7}$

$a \leq 2$

$\Rightarrow a \in (-\infty; -2) \cup (0{,}5; \frac{10}{7})$

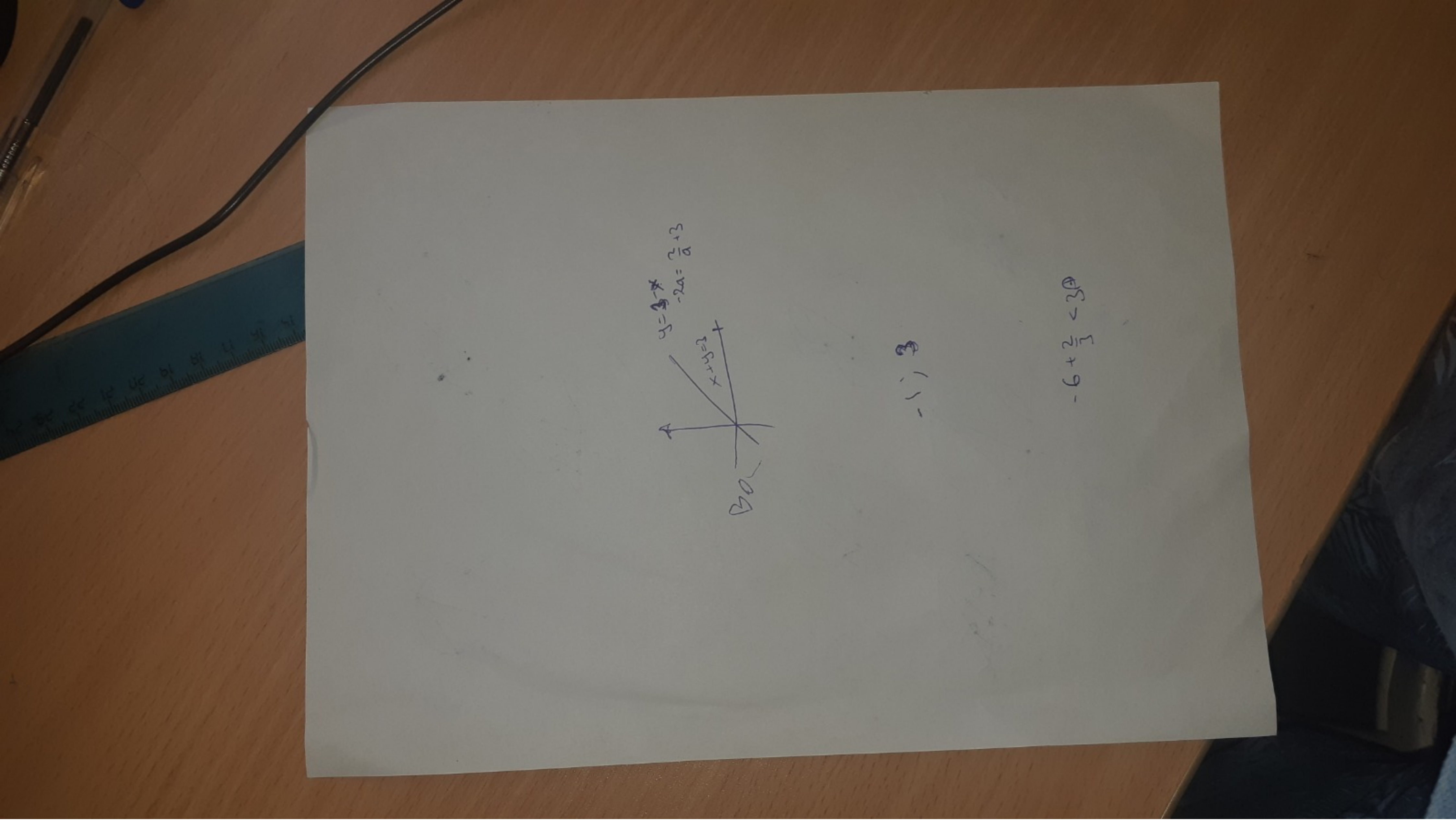
2. $a \in (-2; 0{,}5) \Rightarrow$

$\begin{cases} 2a - 0{,}5a \geq 3 \Rightarrow a \geq 2 \\ 2a + 0{,}1a \geq 3 \Rightarrow a \geq \frac{10}{7} \end{cases} \Rightarrow$ $\begin{cases} a > 2 \\ a \in (-2; 0{,}5) \end{cases} \Rightarrow \varnothing$

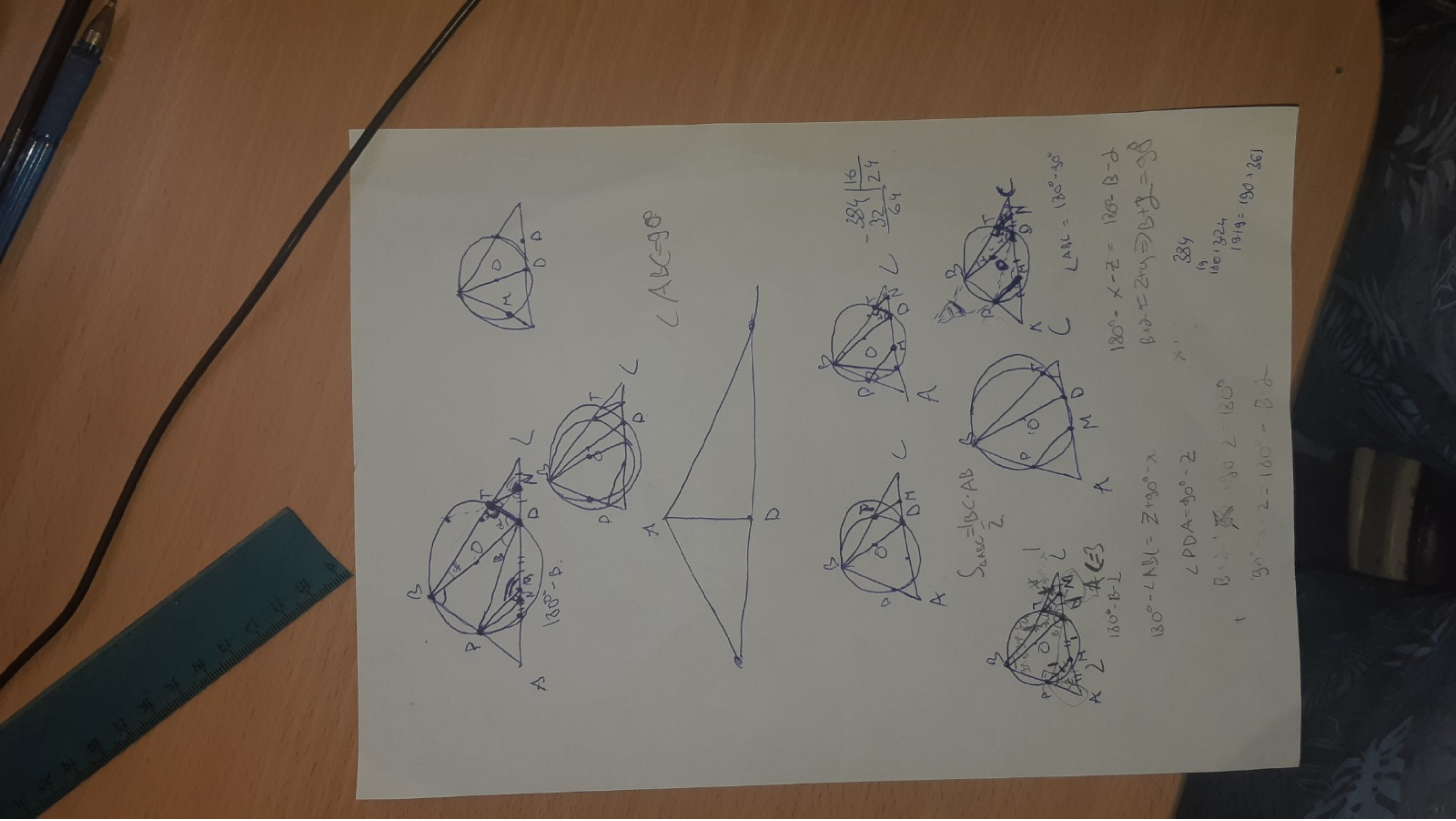
$\Rightarrow \varnothing$

$\begin{cases} a > 2 \\ a \in (-2; \frac{10}{7}) \end{cases} \Rightarrow$

Ответ: $a \in (-\infty; -2) \cup (0{,}5; \frac{10}{7})$



211006164 (U303671 M1276810)



211006164 (U303671 M1276810)

Черновик

$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)$

$-2+3=\sqrt{[illegible]}$

$+y^2=(x+y)^2=3$

3a. $2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0$

$ax^2+4a^2x+ay+4a^3+2=0$

$\sqrt{\frac{5-\sqrt{24}}{2}}-\sqrt{[illegible]}$

$\sqrt{\frac{(5-\sqrt{24})(5+\sqrt{24})}{2\cdot 2}}=\frac{2}{2}$ $x+y=3$

$\frac{2\sqrt{2}\sqrt{2}}{2}+3=5$ $2a^2-2ax-6ay+9+4y^2=0$

$-2a(x+y)$

В-2

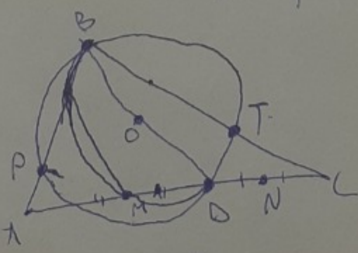
$2a^2-6a-4ay+9+4y^2=0$

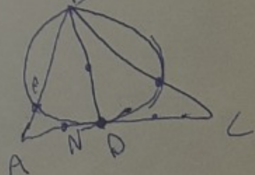
$2\sqrt{6}$

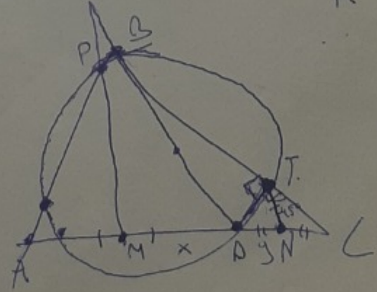
$(\sqrt{6}+1)^2$

$\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}{2}$

1.







$\angle ABC$?

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006164**

ID профиля: **303671**

Вариант 12

Чистовик. 1 лист

(4)
$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2+y^2 = \frac{5}{4} \\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

О.Д.З: $x^2+y^2 \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ y\neq 0 \end{cases}$

1) $\frac{1}{x^2+y^2} + x^2+y^2 - 2x^4-2y^4-5x^2y^2 = -1$

$\frac{1}{x^2+y^2} - 2(x^2+y^2)^2 = -1$

Пусть $t = x^2+y^2$, $t \geq 0$

$-2t^3+t+1=0$

	-2	0	1	1
1	-2	-2	-1	0 ⊕

$2t^2+2t+1=0$

$D=-4<0 \Rightarrow \varnothing$

$t=1 \Rightarrow x^2+y^2=1 \Rightarrow x^2=1-y^2$

сделаем обратную замену

$2(1-y^2)^2+2y^4+5(1-y^2)y^2=\frac{9}{4}$

$2(1-2y^2+y^4)+2y^4+5y^2-5y^4=\frac{9}{4}$

$2-4y^2+2y^4+2y^4+5y^2-5y^4=\frac{9}{4}$

$-y^4+y^2-\frac{1}{4}=0 \quad |\cdot(-4)$

$4y^4-4y^2+1=0$

$(2y^2-1)^2=0 \Rightarrow y^2=\frac{1}{2} \Rightarrow y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

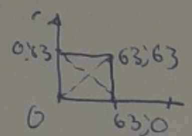
1. $y=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$ $x^2+\frac{1}{2}=1 \Rightarrow$ $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

2. $y=-\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$ $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

Ответ: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Чистовик 2 лист

(5)



заметим, что прямая $y=x$ и прямая $y = 63 - x$, являются диагоналями исходного квадрата

Т.к. узлы стали находятся внутри квадрата ⇒ значит 1 из узлов ∈ диагонали кв-та.

всего таких узлов (целочисленными координатами) $62 \cdot 62 = (\ell - 1)^2$, $\ell = 63$, т.к. мы не учитываем внешние грани, то всего 62 координаты по x и 62 коорд. под мы можем взять (всего 64 по x и 64 по y коорд, но мы исключаем 0 и 63, т.к. по условию узлы не должны быть на границах квадрата)

1. тогда на данных прямых ∈ лежат $62 + 62 - \frac{?}{2}$ точка (т.к. они ∩ в коорд ($x = 63 - x$, $x = 31{,}5$), то все узлы будут иметь разные коорд. ⇒ всего 124 узла. (62 на 1 диаг. и 62 на другой, т.к. взяв 1 коорд. x, она опред. 2 коорд y на этих узлах)

2. Рассмотрим 2 случая, когда мы взяли оба узла с 2-ух диагоналей, и когда только 1 узел с диагонали.

5

Зимин чистовик.

I случай:

на 1 место мы возьмем любую из $62+62=124$ узлов, тогда мы не можем взять для этого узла узел с таким же x и узел с таким же y ⇒ мы можем взять 124-1-1-1, т.к. ещё вылезет 3 - это наша точка ⇒ $\frac{124 \cdot 121}{2}$ вариантов взять узел.

II случай

теперь берём любой из 124 узлов, т.к мы не можем брать с 2-х диагоналей больше (I случ.) и не можем брать узлы с такими же коорд x и y,

то будет: $124 \cdot (62 \cdot 62 - 1 - 60 - 60 - 123)$

(всего узлов; − выбранный узел; x; под; кол-во ост. диагоналей)

Тогда общее кол-во =:

$\frac{124 \cdot 121}{2} + (62 \cdot 62 - 1 - 60 - 60 - 123) \cdot 124$

3844 121 244 3600

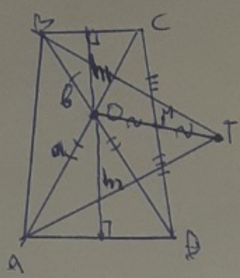
$124 \cdot (\frac{7200 + 121}{2}) = 62 \cdot 7321 = 453902$

$$\begin{array}{r} 7321 \\ \times \quad 62 \\ \hline 14642 \\ 43926 \\ \hline 453902 \end{array}$$

Ответ: 453902 способа.

чистовик. 4 лист.

(6)



а) 1) т.к $\angle BCO = \angle CAD$ (по опр. р/с д) ⇒ $BC \parallel AD$ (по призн. н.л $\angle$) ⇒

т.к $BO = OC$, $AO = OD$ ⇒

по опр. ABCD - трапеция, ⇒

ABCD - р/б трапеция.

2) $\angle COT = \alpha$

$\angle DOT = B$ ⇒

для $\triangle OCD$ ⇒ $CD^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ (по т.cos)

$OM^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - a^2 - b^2 - ab}{4} = \frac{a^2 + b^2 - ab}{2} = x$ ⇒

⇒ $BT^2 = b^2 + OT^2 - 2bx \cdot \cos(60° + \alpha)$

$AT^2 = a^2 + OT^2 - 2ax \cdot \cos(60° + B)$

$b^2 - a^2 - 2x(b\cos(60°+\alpha) + a \cdot \cos(60° + B)) = = 0$ (аналогично для ABCAT можно сделать)

$\alpha + B = 120°$ ⇒

$BT = AT$ ⇒ $BT = AB = AT$ ⇒

$\triangle ABT$ - р/с ⇒ доказано

б) 1) из п.а ⇒ $\triangle ABT$ - р/с ⇒

⇒ $S_{\triangle ABT} = \frac{AB^2}{2} \cdot \sin 60°$

$BO = OC = BC$ (по опр р/с д)

2) $\angle BOA = 120°$ (т.к смежн с $\angle AOD$) ⇒

$AB^2 = BO^2 + AO^2 + 2BO \cdot AO \cdot \cos 60° =$

$= 2^2 + 4^2 + \frac{2 \cdot 2 \cdot 4}{2} =$

$= 20 + 8 = 28$

$S_{\triangle ABT} = \frac{28}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 7\sqrt{3}$

3) из $\triangle BOC$ найдем h_1 ⇒

$h_1^2 = (\sqrt{4-1})^2 = 3$

из $\triangle AOD$ найдем h_2 ⇒

$h_2^2 = (\sqrt{16-4})^2 = 12$

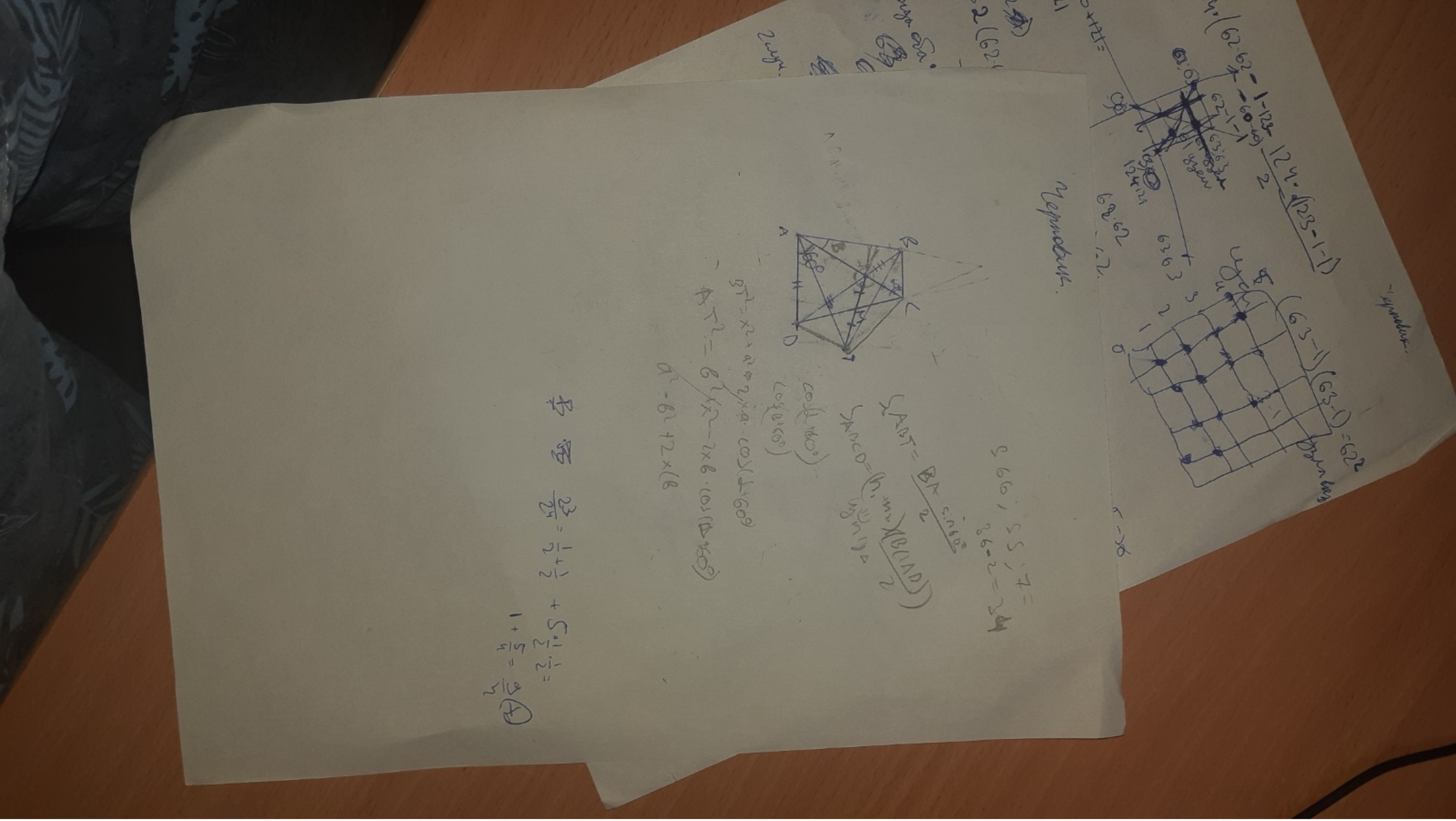
$h_{ABCD} = h_1 + h_2$ (т.к h_1 и h_2 лежат на 1 прямой (расст м/у BC и AD)) ⇒ $h_{ABCD} = 3\sqrt{3}$

$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot h_{ABCD} =$

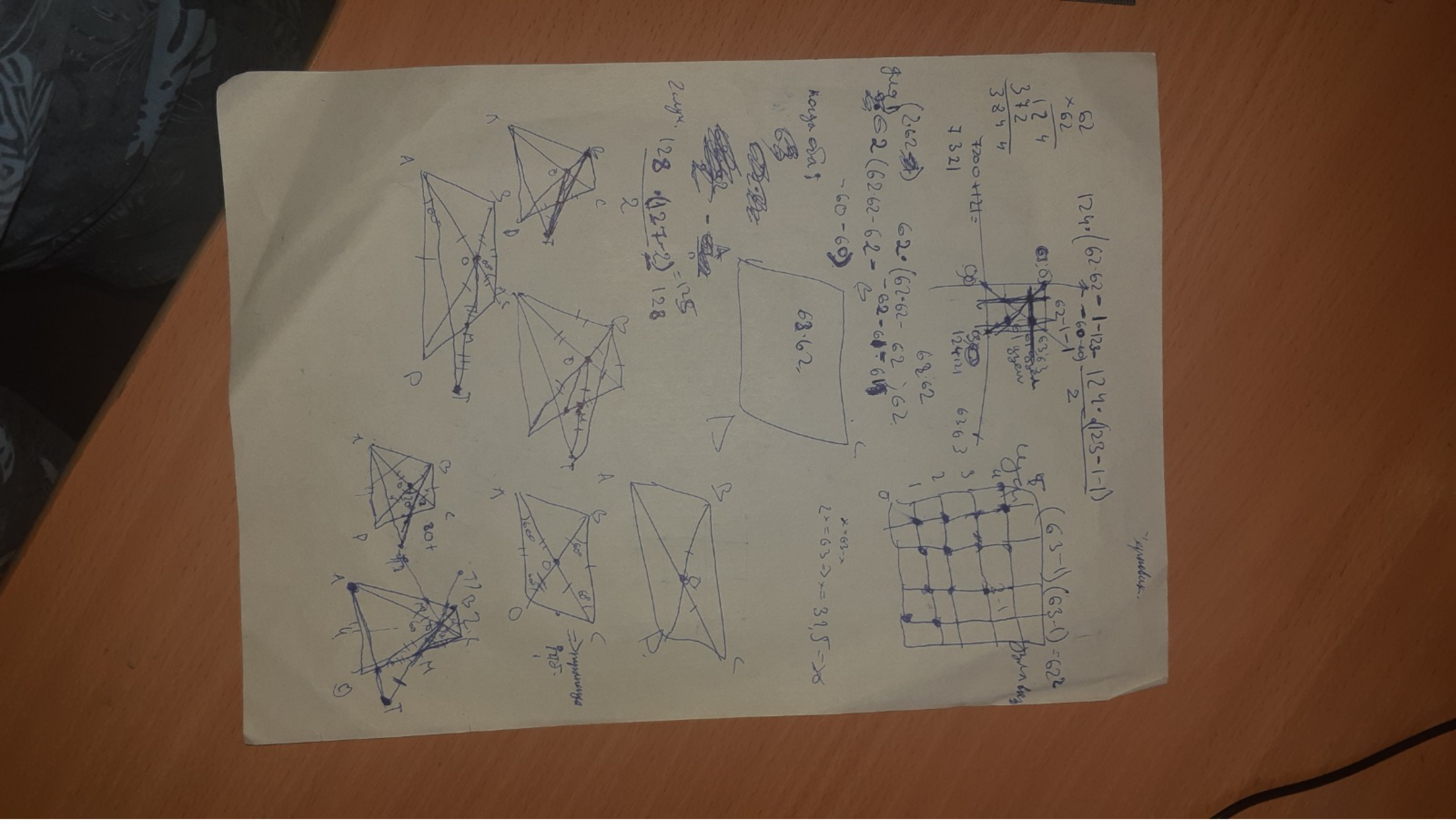
$= 3 \cdot 3\sqrt{3}$ ⇒

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{7\sqrt{3}}{9\sqrt{3}} = 7:9$

Ответ: 7:9



211006164 (U303671 M1276811)



211006164 (U303671 M1276811)