Часть 1

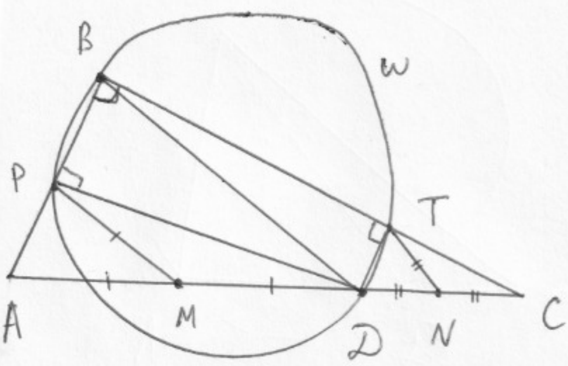
Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211006136**

ID профиля: **259979**

Вариант 12

№1.



$\triangle ABC$ $D \in AC$ w - окр. с диам. BD

$w \cap AB = P$, $w \cap BC = T$

M, N - сер. AD и CD соотв. $PM \parallel NT$

а) $\angle ABC$ - ?

б) $MP = \frac{1}{2}$, $NT = 1$, $BD = \frac{4}{3}$; S - ?

а) $\angle BPD = \angle BTD = 90°$, т.к. впис. опираются на диаметр.

Тогда $\angle APD = \angle DTC = 90°$

Значит PM и TN медианы в прямоуг. треуг. из прямого угла, а тогда $AM = MD = PM$, $DN = NC = TN$.

Из параллельности PM и TN $\angle AMP = \angle DNT = \alpha$.

Тогда из равнобедренности $\angle BAC = \frac{180° - \alpha}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}$.

$\angle TNC = 180° - \alpha$, $\angle BCA = \frac{180° - (180° - \alpha)}{2} = \frac{\alpha}{2}$ (из равнобедр.)

Тогда $\angle ABC = 180° - \angle BAC - \angle BCA = 180° - 90° + \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 90°$

Ответ: $\angle ABC = 90°$.

б) Т.к. $\angle ABC = 90°$, то $\angle PDT = 90°$, значит $PBTD$ прямоугольник. Тогда

$BT = PD$, $BP = TD$
$AD = 2PM = 1$
$DC = 2TN = 2$

Также, т.к. $\angle ABC = \angle APD$, то $PD \parallel BC$, а значит

$\frac{AP}{PB} = \frac{AD}{DC} = \frac{1}{2}$ $AP = x$
$PB = 2x$

$$- \begin{cases} AP^2 + PD^2 = AD^2 \\ BP^2 + PD^2 = BD^2 \end{cases}$$

$AP^2 - BP^2 = AD^2 - BD^2$ $\Rightarrow$ $4x^2 - x^2 = \frac{16}{9} - 1$

$BP^2 - AP^2 = BD^2 - AD^2$

$3x^2 = \frac{7}{9}$

$x^2 = \frac{7}{27}$ $x = \sqrt{\frac{7}{27}} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{7}{3}}$

$AB = 3x = \sqrt{\frac{7}{3}}$

$AB^2 + BC^2 = AC^2$

211006136 (U259979 M1278506)

$BC^2 = AC^2 - AB^2 = 9 - \frac{7}{3} = \frac{20}{3}$; $BC = \sqrt{\frac{20}{3}} = 2\sqrt{\frac{5}{3}}$

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{\sqrt{\frac{7}{3}} \cdot \cancel{2} \cdot \sqrt{\frac{5}{3}}}{\cancel{2}} = \frac{\sqrt{35}}{3}$$

Ответ: а) $\angle ABC = 90^\circ$, б) $S = \frac{\sqrt{35}}{3}$

№2.

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$ ОДЗ: $x \in [-1; 4]$

$f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3$

$f(x)$ возр. при $x \in [-1; 4]$

$g(x) = 2\sqrt{4+3x-x^2}$

$g(x)$ возр. при $x \in [-1; 1,5]$, убывает при $x \in [1,5; 4]$

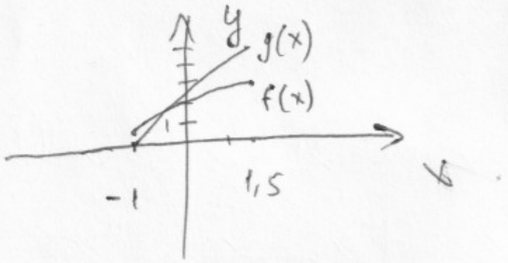
На промежутке $[1,5; 4]$ слева возрастающая функция, а справа убывающая. Значит тут не более 1 решения. Это $x = 3$.

На промежутке $[-1; 1,5]$ с обоих сторон возрастающие функции.

$f(x)_{min} = 3 - \sqrt{5}$ $g(x)_{min} = 0$

$f(x)_{max} = 3$ $g(x)_{max} = 2\sqrt{4+4,5-2,25} = 2\sqrt{6,25} = \cancel{5\sqrt{2,5}}\ 5$

Схематичные графики на этих промежутках:



То есть на этом промежутке тоже не более 1 решения.

№3.

$A: 2a^2 - 2ax - 6ay + x^2 + 2xy + 5y^2 = 0$

$ax^2 + 4a^2x - ay + 4a^3 + 2 = 0$ – парабола $\cancel{x \neq}$ $a \neq 0$

$$y = \frac{ax^2 + 4a^2x + 4a^3 + 2}{a} = x^2 + 4ax + 4a^2 + \frac{2}{a}$$

$$x_0 = \frac{-4a}{2} = -2a$$

$$y_0 = 4a^2 - 8a^2 + 4a^2 + \frac{2}{a} = \frac{2}{a}$$

$B\left(-2a; \frac{2}{a}\right)$

$l: y = -x + 3$

1) B и A ниже l

$$\frac{2}{a} < 2a + 3$$

$$2a + 3 - \frac{2}{a} > 0$$

$$\frac{2a^2 + 3a - 2}{a} > 0$$

$$D = 9 + 16 = 25 = 5^2$$

$$a = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}$$

$$a = \frac{-3-5}{4} = -2$$

$$\frac{(a+2)(2a-1)}{a} > 0$$

$$a \in (-2; 0) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$$

211006136 (U259979 M1278506)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006136**

ID профиля: **259979**

Вариант 12

Чистовик.

ОДЗ: $x^2+y^2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$

№4.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \dfrac{5}{4} \\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2 = \dfrac{9}{4} \end{cases}$$

$$- \begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \dfrac{5}{4} \\ 2(x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = \dfrac{9}{4} \end{cases}$$

$$2(x^2+y^2)^2 - \frac{1}{x^2+y^2} = 1 \quad \Big| \cdot (x^2+y^2)$$

$$2(x^2+y^2)^3 - 1 = (x^2+y^2)$$

$x^2+y^2 = t$

$2t^3 - t - 1 = 0$

$t = 1$ уд.

$$\begin{array}{r|l} 2t^3 - t - 1 & t-1 \\ \cline{2-2} -\;2t^3 - 2t^2 & 2t^2+2t+1 \\ \cline{1-1} 2t^2 - t & \\ -\;2t^2 - 2t & \\ \cline{1-1} t - 1 & \\ -\;t - 1 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

$(t-1)(2t^2+2t+1) = 0$

$2t^2+2t+1 = 0$

$\frac{D}{4} = 1 - 2 < 0$ нет реш. в $\mathbb{R}$

То есть $x^2+y^2=1$

Тогда $x^2y^2 = \frac{1}{4}$

Пусть $x^2=a$, $y^2=b$ $(a, b>0)$. Тогда по Т. Виета a и b явл. корнями уравнения $u^2 - u + \frac{1}{4} = 0$.

$D = 1 - 4 \cdot \frac{1}{4} = 0$

$u = \frac{1}{2}$. То есть $a = b = \frac{1}{2}$. Значит $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$; $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ответ: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

№5.

Посчитаем, сколько таких пар можно выбрать, если один узел лежит на $y=x$.

На этой прямой 62 узла, дальше мы можем выбрать узлы не на $y=x$, а также не на вертикали этого узла и не на горизонтали этого узла (иначе будет параллельность).

Таким образом таких пар

$62(62^2-3\cdot 61-1)$

Прибавим теперь те случаи, когда оба узла на прямой $y=x$.

Их будет $C_{62}^2=\frac{62\cdot 61}{2}$

$62(62^2-3\cdot 61-1)+\frac{62\cdot 61}{2}$

То же самое для прямой $y=63-x$. Итого

$2\cdot\left(62(62^2-3\cdot 61-1)+\frac{62\cdot 61}{2}\right)$

Но мы дважды посчитали случаи, когда оба узла лежат на этих прямых. Вычтем $62\cdot 60$, т.к. на второй прямой мы не можем выбрать точки на верт. и гор. I-го узла.

Также точка пересечения этих прямых не является узлом:

$63-x=x,\ 2x=63\quad x\notin\mathbb{Z}$

То есть всего

$\cancel{2\cdot 62(62^2-3\cdot 61)+62\cdot 61-62\cdot 60}$

$2\cdot 62(62^2-3\cdot 61-1)+62\cdot 61-62\cdot 60=2\cdot 62(62^2-3\cdot 61-1)+62=$

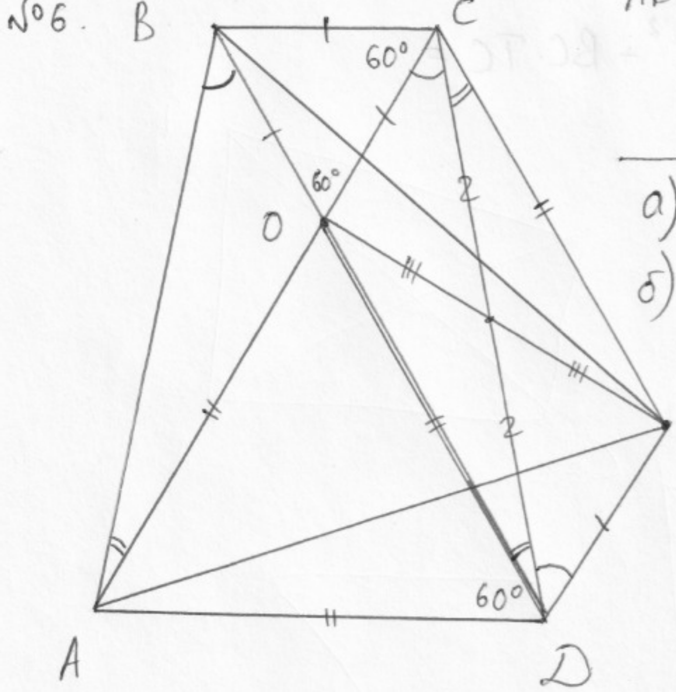
$=\cancel{62(2(62^2-3\cdot 61)}\ 62(2\cdot(62^2-3\cdot 61-1)+1)=453902$

Ответ: 453902.

211006136 (U259979 M1278507)

Чистовик

№6.



$ABCD$: $AC \cap BD - O$

AOD и BOC правильные

T симметрична O отн. ср. CD

а) ABT правильный?

б) $BC = 2$, $AD = 4$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$ — ?

а) Т.к. $\angle ADO = \angle CBO = 60°$, то $AD \parallel BC$

$\triangle BOA = \triangle COD$ по 2-ум стор. и углу меж. ними

$ABCD$ - равнобокая трапеция, т.е. $ABCD$ вписанный

$CODT$ - пар-м, т.к. диагонали т. пересеч. делятся пополам.

$TD = OC$, $OD = CT$

$\angle CDT = \angle OCD$ из параллельности

$\angle OCD = \angle DBA$ из впис.

$\angle ODC = \angle DCT$ из параллельности

~~$\angle DCT$~~ $= \angle ODC = \angle BAC$ из впис.

Но $\angle DBA + \angle BAC = 60° = \angle BOC$ как внешний для $\triangle ABO$.

Тогда $\angle BCT = \angle ADT = \angle BOA = 120°$

А значит $\triangle BCT = \triangle TDA = \triangle BOA$. Ну, значит $BT = AT = AB$, т.е. $\triangle ABT$ правильный

б) $S_{ABCD} = S_{BOC} + S_{AOD} + S_{BOA} + S_{COD}$

$S_{BOC} = \frac{1}{2}\sin 60° \, BC^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 4 = \sqrt{3}$

$S_{AOD} = \frac{1}{2}\sin 60° \, AD^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 16 = 4\sqrt{3}$

$S_{BOA} = S_{COD} = \frac{1}{2}\sin 120° \, BO \cdot OA = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 2\sqrt{3}$

$S_{ABCD} = 9\sqrt{3}$

По т. косинусов найдем BT:

$BT^2 = BC^2 + TC^2 - 2BC \cdot TC \cdot \cos 120° = BC^2 + TC^2 + BC \cdot TC =$

$= 4 + 16 + 2 \cdot 4 = 28$

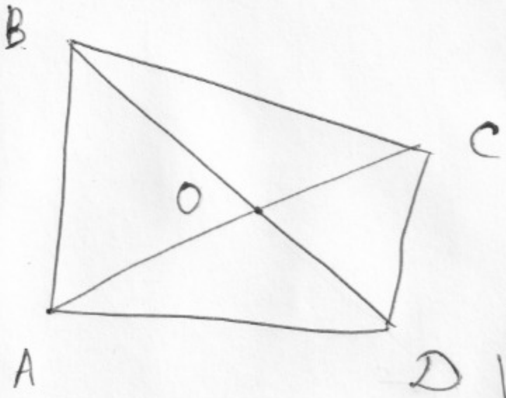
$S_{ABT} = \frac{1}{2} \sin 60° \cdot BT^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 28 = 7\sqrt{3}$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{7\sqrt{3}}{9\sqrt{3}} = \frac{7}{9}$

Ответ: б) $\frac{7}{9}$

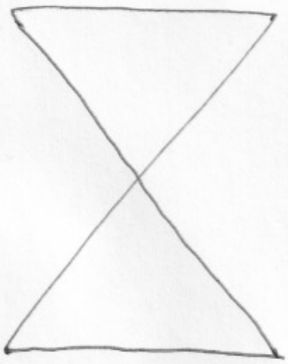
ABCD - тра-ция   Черновик

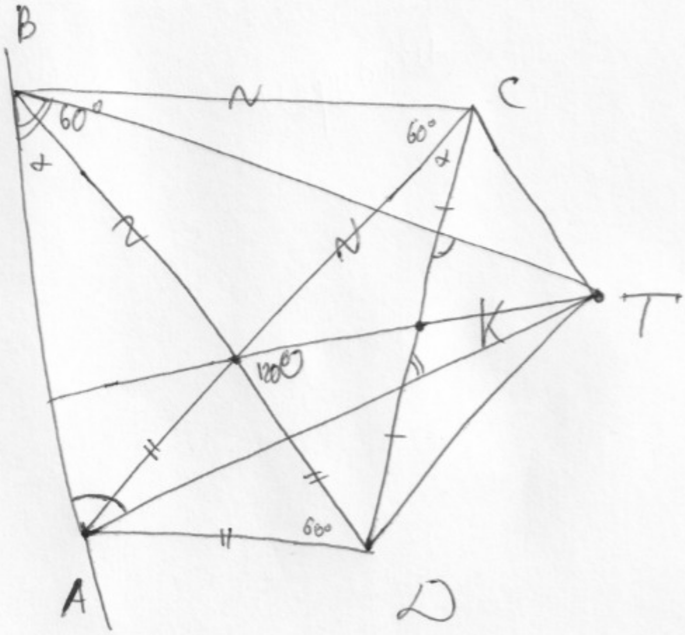
AOD и BOC прав.



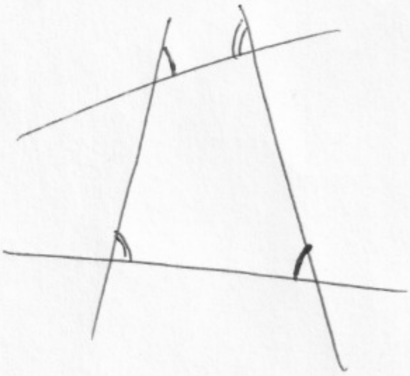
$$2\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{4}+5\cdot\frac{1}{4}=$$

$=$

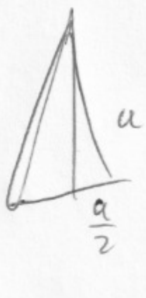




ABT - прав - ?



$$2\cdot\left(2\cdot\left(4-4\right)+1\right)=2$$



$$\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}}=\sqrt{\frac{3a^2}{4}}=\frac{\sqrt{3}a}{2}$$

$$a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\frac{1}{7}=$$

Формула: $2(n-1)\left((n-1)^2-2(n-2)\right)-(n-1)(n-3)$ Черновик

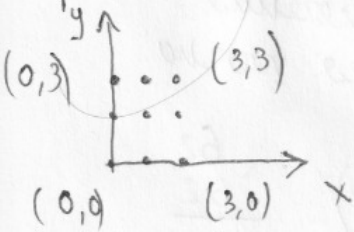
$4\cdot(16-9)=28$

Проверим для 3

$2\cdot 2\cdot(4-2)-0=$

$=4\cdot 2=8$

$2\left(4(16-9-1)+C_4^2\right)-$



$n=5$

$2\cdot 4\cdot(25-6)-4\cdot 2=$

$=8\cdot 19-8=8\cdot 18=80+64=144$

$5-x=x$

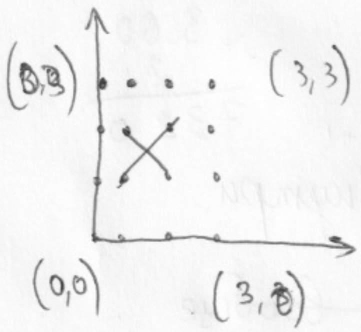
$2x=5$

$x=2,5$

$2\left((n-1)\left((n-1)^2-3(n-2)-1\right)+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\right)-$

$2\left(2\cdot(4-3-1)+\frac{2\cdot 1}{2}\right)=2$ $-(n-1)(n-3$

Для 3:



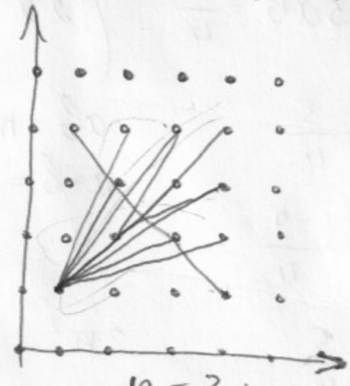
62^2 узлов внутри

$y=x$: ~~выб~~ выбрать 1 узел: 62 вар.

Убиваются 61 верт., 61 гор.

$62(62^2-2\cdot 61)+62(62^2-2\cdot 61)$ для $63-x$,

но мы и туда, и туда посчитали, которые лежат на концах $62\cdot 60$



$14+11=25$

Ответ: $2\cdot 62\cdot(62^2-2\cdot 61)-62\cdot 60$

$2\cdot 2(4-2)-0=8$

$2\cdot(4-2)$

$2\left(62(62^2-3\cdot 61)+C_{62}^2\right)-62\cdot 60$

$2\left((n-1)\left((n-1)^2-3(n-2)\right)+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\right)-(n-1)(n-3)$

$2\left(2\cdot(4-3)+\frac{2}{2}\right)-0=6$

$2\left(4\cdot(16-3-3)+\frac{4\cdot 3}{2}\right)-4\cdot 2=2(28+6)-8$

211006136 (U259979 M1278507)

Черновик

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

$x^2 = a$ $\quad a+b \neq 0$

$y^2 = b$

$63 - x = x$

$2x = 63$

$2a^2+2b^2+5ab = \frac{9}{4}$ $\quad \frac{a}{b} = t$ $\quad a = tb$ $\quad \begin{array}{r} 61 \\ \times\ 3 \\ \hline 183 \end{array}$

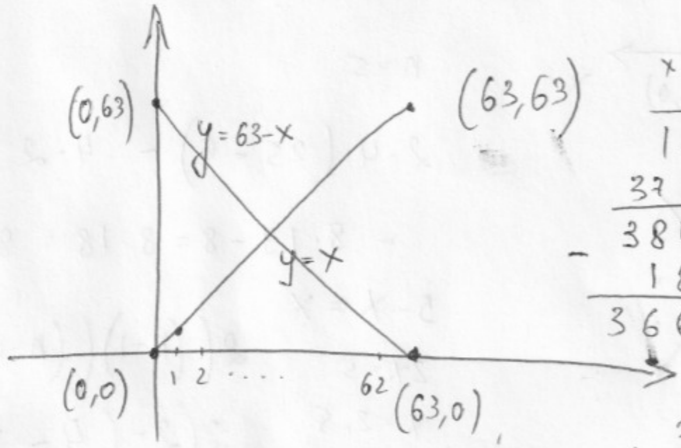
Т. пересечения нецелая точка.

$2t^2b^2+2b^2+5tb^2 = \frac{9}{4}$

$8a^2+8b^2+20ab = 9 \quad | : b^2$

$8t^2+8+20t = \frac{9}{b^2}$

$8t^2+20t+8-\frac{9}{b^2} = 0$



$\begin{array}{r} 62 \\ \times\ 62 \\ \hline 124 \\ 372 \\ \hline 3844 \\ -\ 184 \\ \hline 3660 \end{array}$

$\frac{D}{4} = 100 - 8\left(8 - \frac{9}{b^2}\right) = 36 + \frac{72}{b^2} = 36\left(1+\frac{2}{b^2}\right)$

$t = \frac{-10 + 6\sqrt{1+\frac{2}{b^2}}}{2}$

$62-1+1$

62 целые точки внутри.

$\begin{array}{r} 3660 \\ \times\ 2 \\ \hline 7320 \end{array}$

$$\begin{cases} \frac{1}{a+b} + ab = \frac{5}{4} \\ 2a^2+2b^2+5ab = \frac{9}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{1}{a+b} + ab = \frac{5}{4} \\ 2a^2+4ab+2b^2+ab = \frac{9}{4} \end{cases}$$

~~Всего вообще~~

$\begin{array}{r} 7321 \\ \times\ 62 \\ \hline 14642 \\ 43926 \\ \hline 453902 \end{array}$

$$\begin{cases} \frac{1}{a+b} + ab = \frac{5}{4} \\ 2(a+b)^2 + ab = \frac{9}{4} \end{cases}$$

$ab = m$

$a+b = n$

Смотрим на прямой $y=x$.

На $y=x$ 62 возможности выбора. А на $y=63-x$. Уже

$$\begin{cases} \frac{1}{n} + m = \frac{5}{4} \\ 2n^2 + m = \frac{9}{4} \end{cases}$$

$2n^2 - \frac{1}{n} = 1 \,|\cdot n$ 60.

$2n^3 - 1 = n$

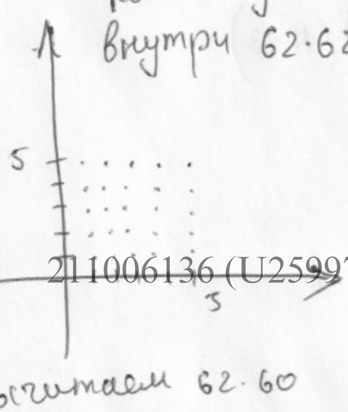
Ответ: $62 \cdot 60$

$2n^3 - n - 1 = 0$ $\quad$ n-нечет

Кол-во узлов внутри $62 \cdot 62 = 62^2$

$n = 1$ уд.

Формула: $n(n-2)$



На прямой $y=x$ 62 способа выбрать.

И уничтожается $61+61=122$ узла.

То есть $62(62^2-122)$ способов на $y=x$.

Столько же на $y=63-x$. Но мы два раза посчитали когда узлы на обоих прямых.

Вычитаем $62 \cdot 60$