Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

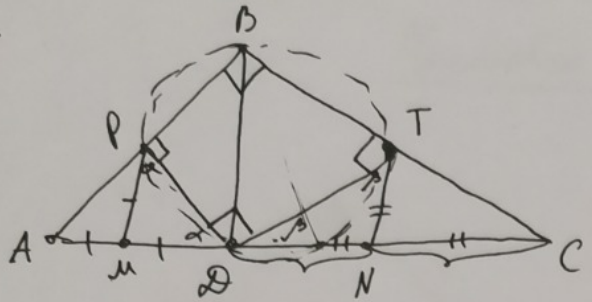
Шифр: **211006067**

ID профиля: **889154**

Вариант 12

Чистовик.

1.



Дано: $\triangle ABC$, BD — диаметр,

$AM = MD$, $DN = NC$, $PM \parallel TN$.

а) ABC — ?

б) $MP = \frac{1}{2}$, $NT = 1$, $BD = \frac{4}{3}$. S_{ABC}?

а) BD — диаметр $\Rightarrow \angle BPD = 90°$ (опирается на диаметр)

Аналогично $\angle BTD = 90° \Rightarrow \angle APD = 90°$ и $\angle DTC = 90°$

$\triangle APD$ — прямоугольный и PM — медиана из прямого угла $\Rightarrow$

$PM = \frac{1}{2}AD = AM = MD \Rightarrow \triangle PMD$ — равнобедренный $\Rightarrow$

$\angle MPD = \angle MDP = \alpha$

Аналогично для $\triangle DTC$: $TN = DN = NC$, $\angle TDN = \angle NTD = \beta$

$PM \parallel TN \Rightarrow \angle PMD = \gamma$, а $\angle DNT = 180 - \gamma$

$$+\begin{cases} 2\alpha + \gamma = 180 \\ 2\beta + 180 - \gamma = 180 \end{cases}$$

$2\alpha + 2\beta + 180 = 360$

$\alpha + \beta = 90° \Rightarrow PDT = 90°$

Рассмотрим $PBTD$. В нём ~~все~~ 3 угла по $90° \Rightarrow \angle ABC = 90°$.

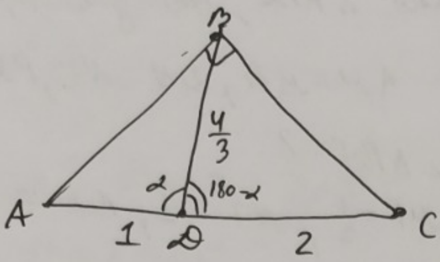
б) $MP = \frac{1}{2} \Rightarrow AM = MD = \frac{1}{2} \Rightarrow AD = 1$

$TN = 1 \Rightarrow DN = NC = 1 \Rightarrow DC = 2$.

Чистовик

1. б) продолжение.

S_{ABC} − ?



$\angle AOB = \alpha$

$\angle BOC = 180 - \alpha$

т. косинусов:

$$+\begin{cases} AB^2 = \frac{16}{9} + 1 - \frac{8}{3}\cos\alpha \\ BC^2 = 4 + \frac{16}{9} + \frac{16}{3}\cos\alpha \end{cases}$$

$$AB^2 + BC^2 = 5 + \frac{32}{9} + \frac{8}{3}\cos\alpha$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 3^2 = 9$$

$$9 = 5 + \frac{32}{9} + \frac{8}{3}\cos\alpha$$

$$\frac{8}{3}\cos\alpha = 4 - \frac{32}{9} \quad |\cdot 9$$

$$24\cos\alpha = 4$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{6}$$

$\cancel{AB = AC\cos\alpha = 3\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{2}}$

$\cancel{\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{36}} = \frac{\sqrt{35}}{6}}$

$\cancel{S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot\sin\alpha} =$

$$AB^2 = \frac{16}{9} + 1 - \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{6}$$

$$AB^2 = \frac{25}{9} - \frac{8}{18} = \frac{50-8}{18} = \frac{42}{18} = \frac{7}{3}$$

$$AB = \sqrt{\frac{7}{3}}$$

$$BC^2 = 9 - \frac{7}{3} = \frac{20}{3} \qquad BC = \sqrt{\frac{20}{3}}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{7}{3}}\cdot\sqrt{\frac{20}{3}} = \frac{\sqrt{140}}{6}$$

Ответ: $\angle ABC = 90^\circ$, $S_{ABC} = \frac{\sqrt{140}}{6}$

Чистовик

2. $\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2} \Leftrightarrow \sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{(x+1)(4-x)}$

$\sqrt{x+1} = a \qquad -\sqrt{4-x} = b$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+3=-2ab \\ a^2+b^2=5 \\ a \geq 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} a+b+3+2ab=0 \\ a^2+b^2=5 \end{cases}$$

$(a+b)+(a+b)^2-2=0$

$$\left[\begin{array}{l} a+b=1 \\ a+b=-2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=1-b \\ a=-2-b \end{array}\right.$$

$a=1-b$:

$b^2+1-2b+b^2=5$

$2b^2-2b-4=0$

$b^2-b-2=0$

$$\left[\begin{array}{l} b=2 \\ b=-1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=-1 \\ a=2 \end{array}\right.$$

Но $a \geq 0$ и $b \leq 0$

$\Rightarrow a=2$ и $b=-1$

$a=-2-b$:

$b^2+(-2-b)^2=5$

$b^2+4+4b+b^2=5$

$2b^2+4b-1=0$

$D=16+4\cdot 2=16+8=24$

$\sqrt{D}=2\sqrt{6}$

$$\left[\begin{array}{l} b=\frac{-4+2\sqrt{6}}{4}=-1+\frac{\sqrt{6}}{2} \\ b=\frac{-4-2\sqrt{6}}{4}=-1-\frac{1}{2}\sqrt{6} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=-2-\left(-1+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)=-1-\frac{\sqrt{6}}{2} \\ a=-2-\left(-1-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)=-1+\frac{\sqrt{6}}{2} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ Но $a \geq 0$ и $b \leq 0$

$b=-1-\frac{\sqrt{6}}{2}$ и $a=-1+\frac{\sqrt{6}}{2}$

3

Чистовик

$\sqrt{x+1} = 2$

$x+1=4$

$x=3$

или

$\sqrt{x+1} = -1 + \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2} - 1$

$x+1 = \frac{6}{4} - \sqrt{6} + 1$

$x = 1{,}5 - \sqrt{6}$

Ответ: $x=3$, $x=1{,}5-\sqrt{6}$

211006067 (U889154 M1277176)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006067**

ID профиля: **889154**

Вариант 12

Чистовик

1. $\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \\ 2x^4 + 2y^4 + 5x^2y^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$

$2(x^4+y^4) = 2\left((x^2+y^2)^2 - 2x^2y^2\right)$

$\begin{cases} x^2+y^2 = a \\ x^2y^2 = b \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{1}{a} + b = \frac{5}{4} \\ 2(a^2-2b) + 5b = \frac{9}{4} \end{cases}$

$-\begin{cases} \frac{1}{a} + b = \frac{5}{4} \\ 2a^2 + b = \frac{9}{4} \end{cases}$

$2a^2 - \frac{1}{a} = 1$

$2a^2 - \frac{1}{a} - 1 = 0$

ОДЗ: $a \neq 0$.

$2a^3 - a - 1 = 0$

$a = 1$ – корень

$(2a^2+2a+1)(a-1) = 0$

$2a^2+2a+1 = 0$

$D < 0$

$a = 1$

$b = \frac{5}{4} - \frac{1}{a} = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}$ $b = \frac{1}{4}$

$\begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ x^2y^2 = \frac{1}{4} \end{cases}$

Черновик

$$x^2 = (1-y^2)$$

$$(1-y^2)y^2 = \frac{1}{4}$$

$$y^4 - y^2 + \frac{1}{4} = 0$$

$$\left(y^2 - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

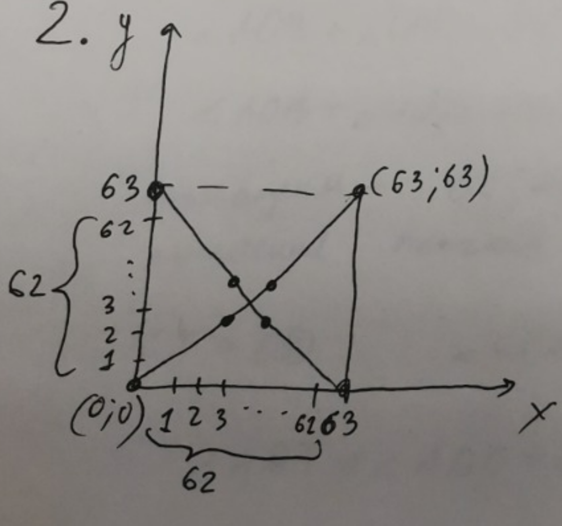
$$\begin{cases} y^2 = \frac{1}{2} \\ x^2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$$

$$x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

2.



Найдём кол-во точек внутри квадрата. На оси x лежит 62 точки и на оси y лежит 62 точки. Точек внутри 62×62.

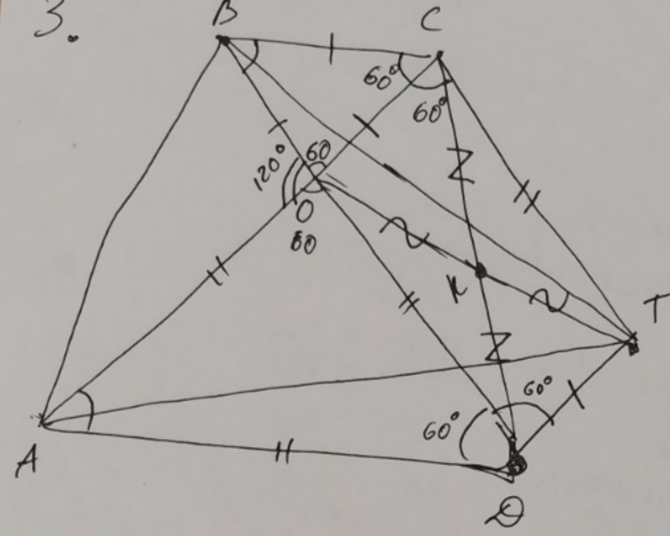
Прямые $y = x$ и $y = 63 - x$ это диагонали квадрата.

Так как 63 - нечетное число, то у диагоналей нет общих точек.

На одной диагонали 62 точки. На двух $62 + 62 = 124$.

Чистовик

3.



Дано: $\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ – правильные, $CK = KD$, $TK = KO$ (из симметрии).

а) Д-ть, что ABT – правильный.

б) $BC = 2$, $AD = 4$, $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$ – ?

Решение

а) $\angle BCO = 60°$, $\angle CAD = 60°$ (из правильности $\triangle$) $\Rightarrow$
$\Rightarrow BC \parallel AD \Rightarrow ABCD$ – трапеция

$AC = BD \Rightarrow ABCD$ – равнобедренная $\Rightarrow AB = CD \Rightarrow$
$\Rightarrow \triangle AOB = \triangle COD$ (по 3 сторонам) $\Rightarrow \angle AOB = \angle COD$, но

$\angle AOB + \angle COD = 360 - \angle BOC - \angle AOD = 240 \Rightarrow$
$\angle AOB = \angle COD = 120°$.

Рассмотрим $OCTD$. В нём диагонали делятся точкой пересечения пополам $\Rightarrow OCTD$ – парал. $\Rightarrow OC = TD$ и $CT = OD$. $\angle COD = 120° \Rightarrow \angle ODT = 180 - 120 = 60° \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ADT = \angle ADO + \angle ODT = 120°$

$\triangle AOB = \triangle ADT$ (по 2 сторонам и углу между ними)

$\Rightarrow \underline{AB = AT}$

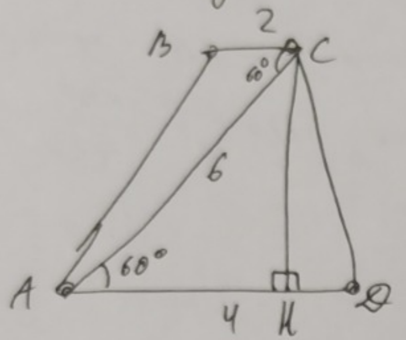
$\angle ACT = 60° \Rightarrow \angle BCT = 120° \Rightarrow \triangle BCT = \triangle AOB \Rightarrow$
$\Rightarrow \underline{BT = AB} \Rightarrow \triangle ABT$ – правильный

Чистовик

б) $BC = 2 \Rightarrow OC = 2$

$AD = 4 \Rightarrow AO = 4$ $\Big\}$ $AC = 6.$

Получали такую трапецию:

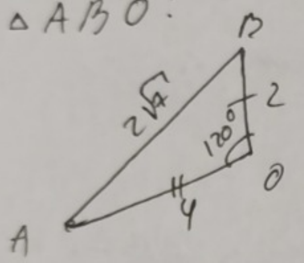


CH – высота

$CH = 6 \cdot \sin 60° = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

$S_{ABCD} = \frac{4+2}{2} \cdot 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$

$\triangle ABO$:

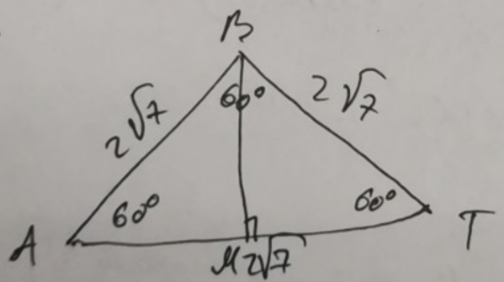


$AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2 \cdot AO \cdot BO \cos 120°$

$AB^2 = 4 + 16 + 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 20 + 8 = 28$

$AB = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

$\triangle ABT$:



~~BM – высота~~

~~$BM = AB \cdot \sin 60° = 2\sqrt{7} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{21}$~~

$S_{ABT} = \frac{1}{2} \cdot \sin 60° \cdot 2\sqrt{7} \cdot 2\sqrt{7} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4 \cdot 7 = 7\sqrt{3}$

$$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{7\sqrt{3}}{9\sqrt{3}} = \frac{7}{9}$$

Ответ: б) $\frac{7}{9}$