Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211006062**

ID профиля: **851181**

Вариант 12

Черновик.

$\sqrt{x+1}=a.$

$\sqrt{4-x}=b.$ $\Rightarrow a^2+b^2=5.$

$(a\mp b)^2-5=-2ab.$

$a\mp b+3=(a+b)^2-5. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a-b+8=(a+b)^2.$

$2ab=(a+b)^2-5.$

$a-b+a^2+b^2-2=2ab \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a-b)^2=(b-a)+2 \Leftrightarrow$

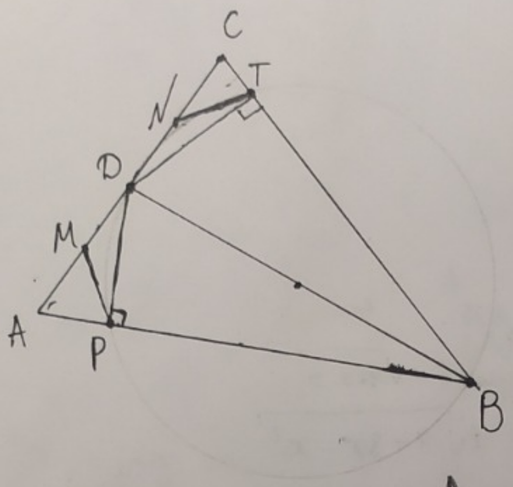
$\Leftrightarrow (b-a)^2=(b-a)+2$

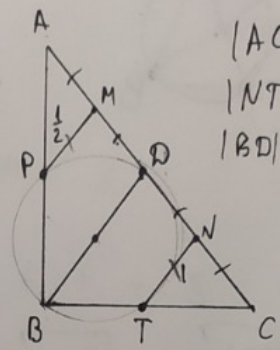
$t^2+t-2=0.$

$t=1.$

$t=-2.$

Черновик.





$|AC| = 3$

$|NT| = 1$

$|BD| = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$

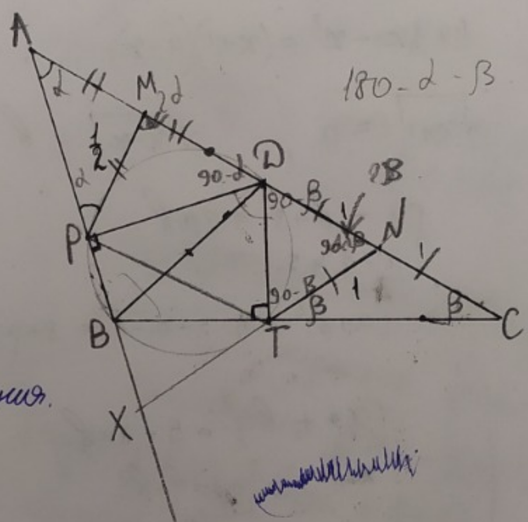
~~$|PM| = |PT|$~~

~~$(PM) \parallel (PT)$ =>~~

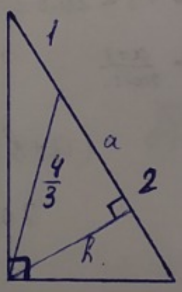
~~=> PMNT - пар-мм.~~

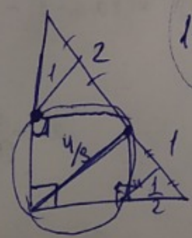
~~$|PT| = |MN|$~~

~~$PT = \frac{1}{2} AC$, $PT \parallel AC$ => PT - ср. линия.~~



$180 - \alpha - \beta$





$1\frac{1}{3}$ $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$.

$16 \cdot 9 = 90 + 54 =$
$= 144$.

$h = \sqrt{\frac{16}{9} - a^2}$ $\quad \frac{16}{9} - a^2 = 2 + a - a^2$

$h = \sqrt{(1+a)(2-a)}$ $\quad a =$

$|BH| = a$, то BD

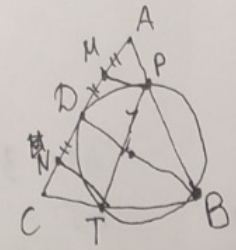
$|BH| = \sqrt{(1+a)(2-a)}$, $|AH| = 1 + a$

$= \sqrt{BD^2 - DH^2} = \sqrt{\frac{16}{9} - a^2}$ $\quad |HC| = 2 - a$.

=> (1+

черновик.

1.



2.

$2 - 1 + 3 = 4$ $\quad$ $2 \cdot \sqrt{4+9-9}$ $\quad$ 4.

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$$

$$4+3x-x^2 = (x+1)(4-x)$$

ОДЗ:
$x \geq -1$
$x \leq 4$.

$\sqrt{x+1} = a$, $\quad \sqrt{4-x} = b$. $\Rightarrow$ $a^2 = x+1$, $b^2 = 4-x$

3-корень.

$$\begin{cases} a - b + 3 = 2ab \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases}$$

$\underline{a^2 + b^2 = 5}$

$a^2 + b^2$

$(a+b)^2 = 5 + 3 + a - b = 8 + a - b$

$(a+b)^2 = 5 + 2ab$

$\underbrace{a^2 + 2ab + b^2}_{5}$

$(a-b)^2 = a^2 + b^2$

$(a-b)^2 = (2ab-3)^2 - ?$

$a - b + 3 = 2ab \Leftrightarrow b(2a+1) = a+3 \Rightarrow$

$a \geq 0$

$\Rightarrow b = \frac{a+3}{2a+1}$.

$a^2 + \frac{(a+3)^2}{(2a+1)^2} = 5$.

$(a+b)^2 = 5 + 2ab$.

$2ab = (a+b)^2 - 5$.

$a - b + 3 = 2ab = \underline{5 - a^2 - b^2}$

~~$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 5 - (x+1) - (4-x) =$~~ 0.

Чистовик

лист 3.

Задание 2.

ОДЗ: $x \in [-1; 4]$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$$

Пусть $\sqrt{x+1} = a$
$\sqrt{4-x} = b$ $\qquad 2\sqrt{4+3x-x^2} = 2ab.$

Тогда $a^2 + b^2 = x+1+4-x = 5.$

$(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab = 5+2ab \Rightarrow 2ab = (a+b)^2 - 5.$

$\cancel{2\sqrt{4+3x-x^2} = (\sqrt{x+1} + \sqrt{4-x})^2 - 5 \Leftrightarrow}$

$3 = a^2 + b^2 - 2.$

$a - b + a^2 + b^2 - 2 = 2ab \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (a-b) - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a-b=1 \\ a-b=-2 \end{array}\right.$

1) $\sqrt{x+1} = 1 + \sqrt{4-x} \Leftrightarrow x+1 = 1 + 2\sqrt{4-x} + 4 - x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x - 4 = 2\sqrt{4-x} \Leftrightarrow x - 2 = \sqrt{4-x} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 4-x = x^2-4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 5x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5.$ (не удв. ОДЗ.)

2) $2 + \sqrt{x+1} = \sqrt{4-x} \Leftrightarrow x + 1 + 4\sqrt{x+1} = 4 - x \Leftrightarrow$

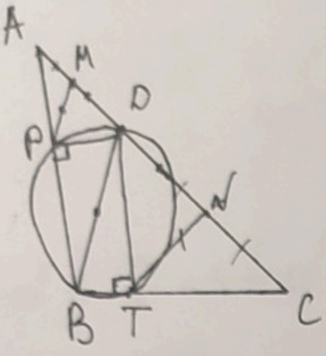
$\Leftrightarrow -2x + 3 = 4\sqrt{x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+3 \geq 0 \\ 16x+16 = 4x^2 - 12x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq +6 \\ 4x^2 - 28x - 7 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \; x \leq 6$

Чистовик.

лист 1.

Задание 1.



Решение:

а) Т. к. [BD] – диаметр окружности,

$\angle BTD = \angle BPD = 90°$.

Пусть $\begin{cases} \angle ACB = \alpha \\ \angle BAC = \beta \end{cases}$, ~~Тогда $\angle BDC = 90° - \alpha = 180° - \angle APD - \alpha$~~ ~~$\angle ADP = 90° - \beta = 180° - \angle DTC - \beta$~~

~~$\angle PDT = 180° - \angle ADP - \angle CDT =$~~

Т. к. NT – медиана прямоуг. $\triangle DTC$, $|NT| = \frac{1}{2}|DC| = |DN| = |NC|$

аналогично $|PM| = |AM| = |MD|$.

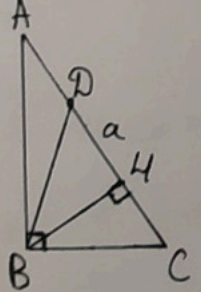
Тогда $\angle PMD$ (внеш $\triangle AMP$) $= 2\beta$.

$\angle TND = 2\alpha$.

$(PM) \parallel (NT) \Rightarrow \angle PMN + \angle TNM = 180° = 2(\alpha + \beta) \Rightarrow \alpha + \beta = 90° \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ABC = 90°$.

б)



$\left.\begin{matrix} |AD| = 2|MP| = 1. \\ |CD| = 2|NT| = 2. \end{matrix}\right\} \Rightarrow AC = 3.$

Пусть BH – высота $BH \leq BD$, т. к.

$BH = \sqrt{AH \cdot HC}$ Если $BD \leq BH$, то $BD = \sqrt{AD \cdot DC} = \sqrt{2}$,

но $BD = \frac{4}{3}$.

1) A – D – H – C:

Пусть $|DH| = a$, $|AH| = 1 + a$, $|HC| = 2 - a$.

$|BH| = \sqrt{(1+a)(2-a)} = \sqrt{BD^2 - DH^2} = \sqrt{\frac{16}{9} - a^2} \Rightarrow (1+a)(2-a) = \frac{16}{9} - a^2$

Чистовик.

Лист 2.

$\frac{16}{9} - a^2 = -a^2 + a + 2 \iff a = \frac{16}{9} - 2 < 0$?!

2) $A - H - D - C$:

Пусть $|DH| = a$, $|AH| = 1 - a$, $|CH| = 2 + a$.

$|BH| = \sqrt{(1-a)(2+a)} = \sqrt{\frac{16}{9} - a^2} \iff -a^2 - a + 2 = \frac{16}{9} - a^2 \iff$

$\iff a = 2 - \frac{16}{9} = \frac{2}{9}$.

$|BH| = \sqrt{\frac{16}{9} - \frac{4}{81}} = \sqrt{\frac{140}{81}} = \frac{2}{9}\sqrt{35}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{2}{9}\sqrt{35} = \frac{\sqrt{35}}{3}$

Ответ: а) $90°$

б) $\frac{\sqrt{35}}{3}$.

211006062 (U851181 M1275142)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006062**

ID профиля: **851181**

Вариант 12

Чистовик

лист 1.

Задание 4.

Решение: $\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2 = \frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x^4+y^4+2x^2y^2)+x^2y^2-\frac{1}{x^2+y^2}-x^2y^2 = \frac{9}{4}-\frac{5}{4} \\ \frac{1}{x^2+y^2}+x^2y^2 = \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x^2+y^2)^2 = 1+\frac{1}{x^2+y^2} \\ \frac{1}{x^2+y^2}+x^2y^2=\frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x^2+y^2)^2 = \frac{1+x^2+y^2}{x^2+y^2} \\ \frac{1}{x^2+y^2}+x^2y^2=\frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x^2+y^2)^3 = 1+x^2+y^2 \\ \frac{1}{x^2+y^2}+x^2y^2=\frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$

] $x^2+y^2=t \quad 2t^3-t-1=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (t-1)(2t^2+2t+1)=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow t=1$

Т.о. $x^2+y^2=1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ \frac{1}{x^2+y^2}+x^2y^2=\frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 1+x^2y^2=\frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2y^2=\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2(1-x^2)=\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^4-x^2+\frac{1}{4}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ (x^2-\frac{1}{2})^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=\frac{1}{2} \\ y^2=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm\frac{1}{2} \\ y=\pm\frac{1}{2} \end{cases}$

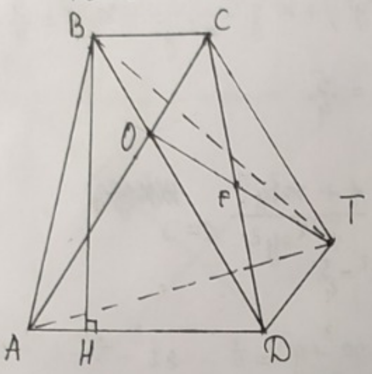
Ответ: $\{(\frac{1}{2};\frac{1}{2});(-\frac{1}{2};\frac{1}{2});(\frac{1}{2};-\frac{1}{2});(-\frac{1}{2};\frac{1}{2})\}$.

Чистовик

лист 2.

Задание 6.

Решение:



а) $\angle OAD = \angle BCO \Rightarrow BC \parallel AD$
$\triangle BOA = \triangle COD$ по I призн $\Big| \Rightarrow$

$\Rightarrow ABCD$ - р/б трапец.

] F – середина [CD]
$\triangle CFO = \triangle FOT$ ($\angle OFC = \angle DFT \wedge DF = CF \wedge OF = FT$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow OCTD$ - пар-мм. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} OC = DT = BC \\ OD = CT = AD \\ \angle ODT = \angle OCT = 180^\circ - \angle COD = 60^\circ \\ \angle BCO = \angle ADO \end{cases} \Bigg| \Rightarrow \triangle BCT = \triangle ADT \text{ по I призн.}$$

$$\begin{cases} \angle CTD = \angle COD = 120^\circ \\ \angle BCT = 120^\circ \\ BC = TD \wedge CT\text{-общ} \end{cases} \Rightarrow \triangle BCT = \triangle CTD = \triangle ADT \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} CD = BT = AT \\ CD = AB \end{matrix} \Big| \Rightarrow AB = BT = AT.$$

ч.т.д.

б)] Высота $\triangle BOC = h_1$; $h_1 = BC \sin 60^\circ = \sqrt{3}$.
Высота $\triangle DOA = h_2$; $h_2 = AD \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}$.
Высота $ABCD = h_1 + h_2 = 3\sqrt{3}$

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(h_1+h_2)(|BC|+|AD|) = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{3} \cdot 6 = 9\sqrt{3}$.

] BH - высота ABCD.
Т.к. ABCD – р/б., $|AH| = \frac{1}{2}(AD-BC) = 1$.
$|AB| = \sqrt{|AH|^2+|BH|^2} = \sqrt{1+9\cdot 3} = \sqrt{28}$

$S_{ABT} = \frac{|AB|^2\sqrt{3}}{4} = \frac{28\sqrt{3}}{4} = 7\sqrt{3}$. $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{7}{9}$

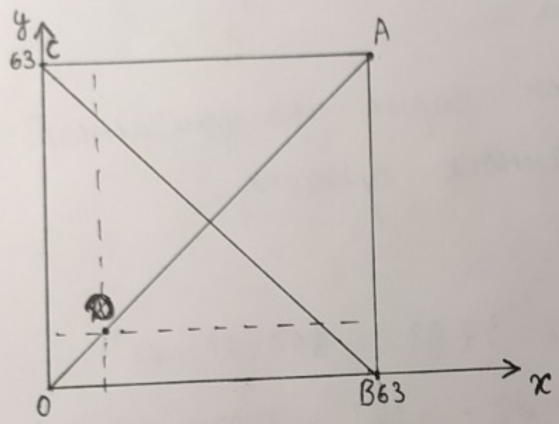
Ответ: $\frac{7}{9}$

Чистовик

лист 3.

Задание 5.

Решение:



Точки $(0;0)$, $(63;63)$ лежат на прямой $y=x$.

точки $(0;63)$, $(63;0)$ лежат на прямой $y=63-x$.

Сл-но, данные прямые – диагонали квадрата.

Между точками $(0;0)$, $(63,0)$ и $(0;0)$, $(0;63)$ лежат по 62 точки узла ⇒ всего внутри квадрата $62 \cdot 62 =$ ~~3844~~ 3844 узла.

$\exists$ $O(0;0)$, $A(63;63)$, $B(63;0)$, $C(0;63)$.

~~$\forall$ узла X из (AO) $\exists$ 61 узел Y в квадрате, т.ч. XY ∥ O~~

$\forall$ узла D из (AO) $\exists$ 122 узла F в квадрате, т.ч. $\left[\begin{array}{l} XF \parallel OX \\ XF \parallel OY \end{array}\right.$

(OA) содержит 62 узла, поэтому для узлов из (OA) кол-во пар: $62 \cdot (3844-122) = 62 \cdot 3722$.

$\forall$ узла G из (BC) $\exists$ 122 узла H в квадрате, т.ч. $\left[\begin{array}{l} GH \parallel OX \\ GH \parallel OY \end{array}\right.$

~~2 из этих 122 пар уже исключены~~

~~поэтому для узлов из (BC) – $62 \cdot (3844-120) = 62 \cdot 3724$.~~

Кол-во пар для узлов из (BC): $62 \cdot (3844-122) = 62 \cdot 3722$.

Чистовик

лист 4.

При этом дважды посчитаны пары, когда обе точки лежат на данных прямых

— $62 \cdot 61 = 3781$ пара.

И дважды посчитаны пары для центральной точки пересечения данных прямых.

— 3844 пары.

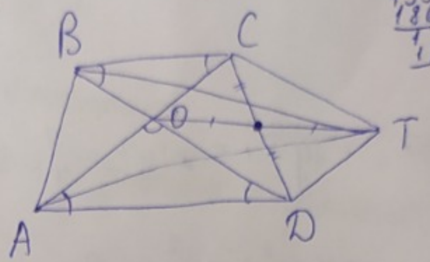
Всего пар: $2 \cdot 62 \cdot 3722 - 62 \cdot 61 - 62^2 =$

$= 62 \cdot (6444 - 61 - 62) = 62 \cdot 6321 = 391902$

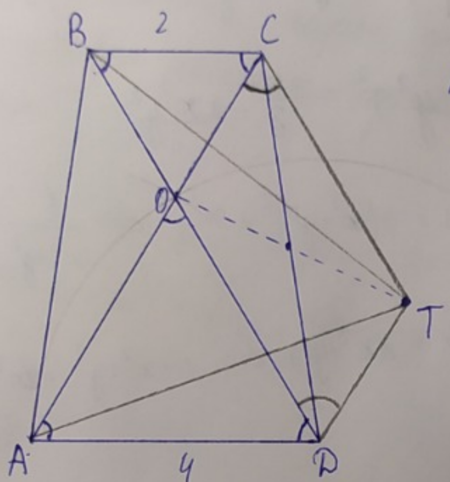
Ответ: 391902.

черновик

$$\begin{array}{r|l} 391902 & 62 \\ \underline{372} & 6321 \\ 199 & \\ \underline{186} & \\ 130 & \\ \underline{124} & \\ 62 & \end{array}$$



$\frac{1}{2} a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}$



$\triangle ADT = \triangle BCT$

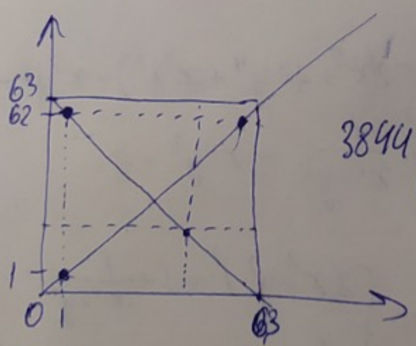
$\triangle BCT = \triangle ADT = \triangle DCT$ по 3 сторонам.

но $|CD| = |AB|$

и $|BT| = |CD| = |AT|$

$(2+60) \cdot 60 = 3600 + 120 = 3720.$

$62 \times 62 = 3720 + 124 = 3844$



3844 точки (узлы).

$$\begin{array}{r|l} 3844 & 62 \\ -372 & \underline{62} \\ 124 & \\ -124 & \\ 0 & \end{array}$$

$62 \cdot (3844 - (61 \cdot 2)) = 62 \cdot (3844 - 122) = \underline{62 \cdot (3722)}.$

$62 \cdot (3722 - 62 \cdot 2) = 62 \cdot (3722 - 124) =$

$= 62 \cdot (3598)$

$62 \cdot (3598 + 3722) = \underline{62 \cdot 7320}.$

Черновик

$$1+t=2t^3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2t^3-t-1=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (t-1)(2t^2+2t+1)=0$$
$$\Leftrightarrow t=1.$$

$$2x^4+2y^4+5x^2y^2=\frac{9}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2+y^2)^2=\frac{9}{4}-x^2y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2+y^2)^2=\frac{9}{8}-\frac{x^2y^2}{2}$$

$$6321 \cdot 62 = 391902$$

$$\frac{1}{x^2+y^2}+x^2y^2+1=2(x^2+y^2)^2+x^2y^2 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2+y^2}+1=2(x^2+y^2)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+x^2+y^2}{x^2+y^2}=2(x^2+y^2)^2 \Leftrightarrow 1+x^2+y^2=2(x^2+y^2)^3 \Rightarrow \cancel{x^2+y^2=1}.$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2=1.$$

$$t^2-t+\frac{1}{4}=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow t=\frac{1\pm\sqrt{1-\frac{1}{1}}}{2\cdot 1}$$

$$x^2y^2=\frac{5}{4}$$
$$2+x^2y^2=\frac{9}{4}.$$

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2}+x^2y^2=\frac{5}{4} \\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2=\frac{9}{4}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x^4+2+y^4+2x^2y^2)+x^2y^2-x^2y^2-\frac{1}{x^2+y^2}=1 \\ \frac{1}{x^2+y^2}+x^2y^2=\frac{5}{4}. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x^2+y^2)^2-\frac{1}{x^2+y^2}=1 \\ \frac{1}{x^2+y^2}+x^2y^2=\frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x^2+y^2)^2=1+\frac{1}{x^2+y^2} \\ \frac{1}{x^2+y^2}+x^2y^2=\frac{5}{4}. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x^2+y^2)^3=1+(x^2+y^2) \\ \frac{1}{x^2+y^2}+x^2y^2=\frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ \frac{1}{x^2+y^2}+x^2y^2=\frac{5}{4}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2y^2=\frac{1}{4}. \\ x^2+y^2=1. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x^2+y^2=t \quad 2t^3-t-1=0 \Leftrightarrow t=1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2=1-y^2 \\ y^2-y^4=\frac{1}{4}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=1-y^2 \\ y^4-y^2+\frac{1}{4}=0. \end{cases}$$