Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

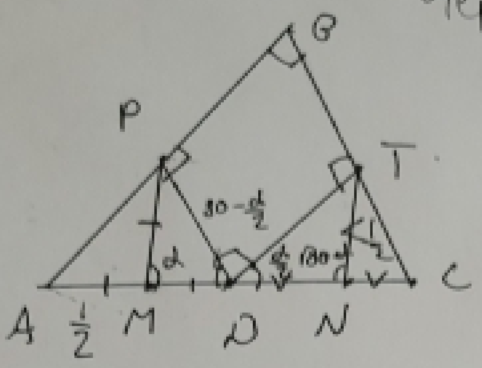
Шифр: **211006006**

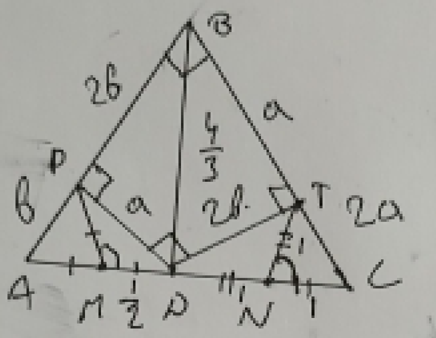
ID профиля: **373150**

Вариант 12

3. 1.

Черновик





$4b^2+a^2=\frac{16}{9}$

$4b^2+4a^2=4$

$a^2+b^2=1$

$\frac{7}{9}=3b^2$

$\frac{7}{27}=b^2$

$3a^2=\frac{36}{9}-\frac{16}{9}=\frac{20}{9}$

$a^2=\frac{20}{27}$

$3\cdot\frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}\cdot3\cdot\frac{\sqrt{20}}{3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{140}}{3}$

№2

Черновик

2 $\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$

$x \in [-1; 4]$

~~$\sqrt{x+1} + 3 =$~~

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} = 2\sqrt{4+3x-x^2} - 3.$

$x+1+4-x-2\sqrt{4+3x-x^2} = 4(4+3x-x^2)+9-12\sqrt{4+3x-x^2}$

$0 = 4(4+3x-x^2)+4-10\sqrt{4+3x-x^2}$

$\sqrt{4+3x-x^2} = t.$

$0 = 4t^2-10t+4.$

$D = 100-64 = 36.$

$x_1 = \frac{10+6}{8} = 2$

$x_{2} = \frac{10-6}{8} = \frac{1}{2}$

$\left[\begin{array}{l} 4+3x-x^2 = 4 \Rightarrow 3x-x^2 = 0 \quad \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \end{array}\right. \text{— н/п.} \\ 4+3x-x^2 = \frac{1}{4}. \Rightarrow 15+12x-4x^2 = 0 \end{array}\right.$

$D = 144+240 = 384$

$x_1 = \frac{-12+8\sqrt{6}}{8} = -1{,}5+\frac{\sqrt{6}}{1}$

$x_2 = \frac{-12-8\sqrt{6}}{8}$ — н/п.

№3

3. $-4a^2$.

Черновик

$\cancel{4a^2-4ax-12ay+2x^2+4xy+10y^2=10}$

$16a^3 + -64\,16a^3 - ay + 4a^3 + 2$

$4a^3 + 2 = ay$. $\quad ay - 2 = 0$

$ay = 2$

$a = \frac{2}{y}$

$y = \frac{2}{a}$.

$(x-a)^2 + (3y-a)^2 - 4y^2 - x^2 + 2xy$

$= (x-a)^2 - (x-y)^2 - 3y^2 + (3y-a)^2$

$2a(x+y) - 4ay + x^2 + 2xy + y^2 + 4y^2$

$+ 2a^2 =$

$= (x+y)^2 + 2a(x+y) + a^2 + 4y^2 - 4ay + a^2 = 0$

$(x+y+a)^2 + (2y-a)^2 = 0$.

$\Rightarrow a = 2y$.

$\cancel{x+3y=0}$. $\quad x + \frac{3}{2}a = 0$

$\cancel{x = -\frac{3}{2}a}$.

$x + y = -a$ $\quad x = -\frac{3}{2}a$.

$2y = a$. $\quad y = \frac{a}{2}$.

$\frac{2}{a} - 2a < 3$.

$4a^3 + 2 = ay$.

$-a > 3$.

$a < -3$.

$-a < 3$

$a > -3$.

$\cancel{-4a + \frac{4a^3+2}{a}} > 3$.

Ответ: $(-3; -2)$

$\frac{2}{a} - 2a > 3$.

$\frac{2-2a^2}{a} < 3$

$4(\frac{1}{2}...)\cancel{\frac{4a^3-4a^2+2}{a}} > 3$.

$2a - \frac{2}{a} < -3$.

$2 - 2a^2 - 3a < 0$.

$4a^3 - 4a^2 - 3a + 2 > 0$

$\frac{2a^2-2}{a} < -3$

$2a^2 + 3a - 2 > 0$

$\cancel{a(4a^2-3) - 4a^2}$

$D = 9 + 16 = 25$

$x_1 = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}$

$x_2 = \frac{-3-5}{4} = -2$.

– решений нет. $2a^2 + 3a - 2 < 0$

$\frac{-3-5}{4} = -2$ $\quad D = 9 + 16 = 25$

$x_1 = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}$

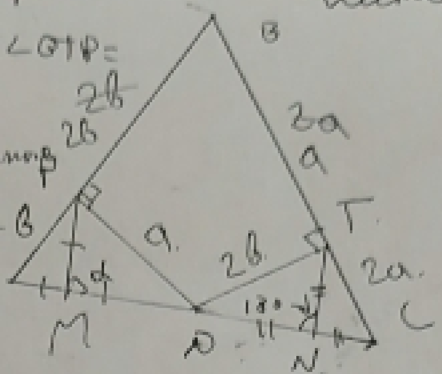
№1 Чистовик.

1) т.к BD - диам $\Rightarrow \angle BPD = \angle DTB = 90°$

$\Rightarrow APD$ и DTC - прямоугольн.

$\Rightarrow PM = AM = MD$ и ~~$DT = TC$~~

$DN = NC = TN$



если $\angle PMD - \alpha \Rightarrow \angle DNT = 180 - \alpha$ по пар.

$\Rightarrow \angle PDM = 90 - \frac{\alpha}{2}$ $\Rightarrow \angle TDM = \frac{\alpha}{2}$

$\Rightarrow \angle PDT = 180 - \angle PDA - \angle TDC = 180 - (90 - \frac{\alpha}{2}) - \frac{\alpha}{2} = 90$

$\angle B = 180 - \angle PDT$ (из впис) $= 90°$ Ответ: 90

2) $\left.\begin{array}{l}\angle PMA = \angle TND \\ \frac{PM}{TN} = \frac{DM}{NA}\end{array}\right] \Rightarrow \frac{PA}{DT} = \frac{PM}{TN} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ Если $AP = b \Rightarrow DT = 2b$.

аналогично: $TC = 2a \Rightarrow PD = a$.

по пункту 1. - $BPDT$ - прямоугольник

$\Rightarrow BD^2 = 4b^2 + a^2 = \frac{16}{9}$

$AD^2 = a^2 + b^2 = 1$

$\frac{7}{9} = 3b^2$. $3a^2 = \frac{20}{9}$.

$a^2 = \frac{20}{27}$ $\Rightarrow a = \frac{\sqrt{20}}{3\sqrt{3}}$

$b^2 = \frac{7}{27}$. $b = \frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}$

т.к $\angle B = 90$ $S = \frac{(BT + TC)(BD + AD)}{2} = \frac{9ab}{2} =$

$= \frac{\sqrt{140}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{35}}{3}$

Ответ: 1) $90°$ 2) $\frac{\sqrt{35}}{3}$

2.

Чистовик.

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$

$x \in [-1; 4]$.

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} = 2\sqrt{4+3x-x^2} - 3$

$x+1+4-x - 2\sqrt{4+3x-x^2} = 4(4+3x-x^2) + 9$
$- 12\sqrt{4+3x-x^2}$

$0 = 4(4+3x-x^2) + 4 - 10\sqrt{4+3x-x^2}$

$\sqrt{4+3x-x^2} = t$

$0 = 4t^2 - 10t + 4$.

$D = 100 - 64 = 36$.

$x_1 = \frac{10+6}{8} = 2$

$x_2 = \frac{10-6}{8} = \frac{1}{2}$

$\left[\begin{array}{l} 4+3x-x^2 = 4. \Rightarrow 3x - x^2 = 0 \quad \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \end{array}\right. - \text{н/п} \\ 4+3x-x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \quad 15 + 12x - 4x^2 = 0 \end{array}\right.$

$D = 144 + 240 = 384$.

$x_1 = \frac{-12+8\sqrt{6}}{-8}$ $x > -1$.

$x_2 = \frac{-12-8\sqrt{6}}{-8}$ ..

Ответ: $3; \frac{-12+8\sqrt{6}}{-8}; \frac{12-8\sqrt{6}}{-8}$.

$\sqrt{x+1}$ $x\in[-1;4]$. $4-x$ $+3=2\sqrt{4+3x-x^2}$ условие.

3.

Чистовик

Рассмотрим второе выражение как многочлен 2-ой степени относительно x

x_0 (вершина параболы) $= -\frac{b}{2a} = -\frac{4a^2}{a} = -2a$.

Подставим в выражение:

$4a^3 - 8a^3 - ay + 4a^3 + 2 = 0.$

$ay - 2 = 0$

$ay = 2$

$y = \frac{2}{a}$, $x = -2a$. $- x + y = \frac{2}{a} - 2a$

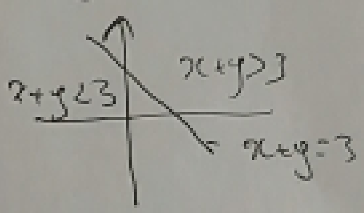
Рассмотрим 1-ое выражение

$2a^2 - 2a(x+y) - 4ay + (x+y)^2 + 4y^2 =$

$= (x+y-a)^2 + (2y-a)^2 = 0$

т.к. квадраты ≥ 0

$\Rightarrow x+y=a.$



$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a>3 \\ \frac{2}{a}-2a>3 \end{cases} \text{ – т.к. время } x+y>3 \text{ отмечается справа от прямой.} \\ \begin{cases} a<3 \\ \frac{2}{a}-2a<3 \end{cases} \text{ – в левой части} \end{array}\right.$

$\frac{2-2a^2}{a}>3$

$2-3a-2a^2>0$

$D=25$

$x_1=\frac{3+5}{-4}=-2$

$x_2=\frac{3-5}{-4}=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ решений нет т.к. $a>3$

$\frac{2-2a^2}{a}<3.$

$2-3a-2a^2<0.$

$D=25.$

$x_1=-2$

$x_2=\frac{1}{2}$

Ответ: $a\in(\frac{1}{2};3)\cup(-\infty;-2)$.

Часть 2

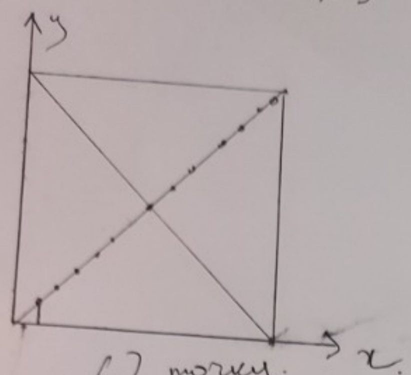
Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006006**

ID профиля: **373150**

Вариант 12

№5 Черновик.



62 точки.

+62 = 123 (минус точка пересечения

$\cancel{\frac{123\cdot 120}{2} = 123\cdot 60}$

$\cancel{122} + \cancel{\frac{122\cdot 118}{2}} +$

$122 + \cancel{\frac{122\cdot 118}{2}} + \cancel{(61^2 - 2\cdot 61 - 1)} +$

$+ \cancel{\frac{122\cdot(61^2 - 1 - 121)}{122}}$

$61 + 61 = 122$

$\frac{122\cdot 119}{2} + \frac{122\cdot(61^2 - 122 - 59\cdot 2)}{2} =$

$= \frac{122\cdot 119}{2} + 122(61^2 - 61\cdot 2 - 59\cdot 2) =$

$= \frac{122\cdot 119}{2} + 122(61\cdot 59 - 59\cdot 2) = 59^2 =$

$= 61\cdot 119 + 122\cdot 59^2$ способов.

Черновик

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

$2(x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = \frac{9}{4}$

$\frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4}$

$2(x^2+y^2)^2 - \frac{1}{x^2+y^2} = 1$

$x^2+y^2 = 2(x^2+y^2)^3 - 1$

$\cancel{x=0;\ y=0}$

$\cancel{1 = 2(x^2+y^2)^2}$

$\Rightarrow \cancel{x^2y^2 = \frac{5}{4}}$

$2t^3 - t - 1 = 0$

$t = 1$

$(t-1)(2t^2+2t+1)$

$D = 4 - 8 < 0$

$\Rightarrow$ решений нет

1)

$1 + x^2y^2 = \frac{5}{4}$

$x^2y^2 = \frac{1}{4}$

$$\left[\begin{array}{l} xy = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{array} \right.$$

$n + 6n + 4n = 11n$

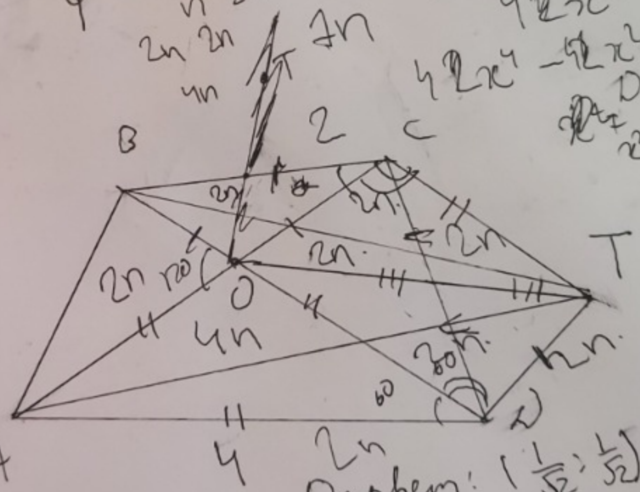
$x^2 + \frac{1}{4x^2} = 1$

$4x^4 - 4x^2 + 1$

$D = 16 - 16 = 0$

$x^2 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$y^2 = \frac{1}{2}$



$\frac{7}{9}$

Ответ: $\left(\frac{1}{\sqrt2}; \frac{1}{\sqrt2}\right)$; $\left(-\frac{1}{\sqrt2}; -\frac{1}{\sqrt2}\right)$; $\left(-\frac{1}{\sqrt2}; \frac{1}{\sqrt2}\right)$; $\left(\frac{1}{\sqrt2}; -\frac{1}{\sqrt2}\right)$

Чистовик.

№4. Вар.12

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2}+x^2y^2=\frac{5}{4} \\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2=\frac{9}{4} \end{cases}$$

$$2(x^2+y^2)^2+x^2y^2=\frac{9}{4}$$

$$\frac{1}{x^2+y^2}+x^2y^2=\frac{5}{4}$$

$$2(x^2+y^2)^2-\frac{1}{x^2+y^2}=1$$

$$\frac{2(x^2+y^2)^3-1}{x^2+y^2}=1$$

$$2(x^2+y^2)^3-1=x^2+y^2 \quad ; \quad x^2+y^2=t$$

$$2t^3-1=t$$

$$2t^3-t-1=0$$

$$t=1.$$

при $t \neq 1$

$$2t^3-t-1=(t-1)(2t^2+2t+1)=0$$

$$t\neq 1 \Rightarrow 2t^2+2t+1=0$$

$$D=4-8<0.$$

$\Rightarrow$ решений нет

$\Rightarrow t=1$ - единств решение.

$$1+x^2y^2=\frac{5}{4}$$

$$\begin{cases} x^2y^2=\frac{1}{4} \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Rightarrow \quad x^2+\frac{1}{4x^2}=1$$

$$4x^4+1=4x^2$$

$$4x^4-4x^2+1$$

$$D=0$$

$$\Rightarrow x^2=\frac{1}{2}=\frac{4}{8}$$

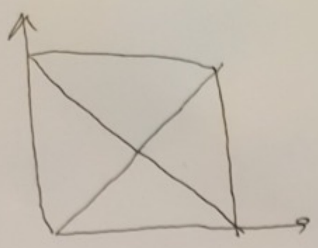
1

$$x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \quad y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y^2=\frac{1}{2}$$

Ответ: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Вар. 12

Чистовик



№5 Всего узлов внутри сетки 61^2

Заметим, что прямые $y = x$ и $y = 63 - x$ — диагонали квадрата, они пересекаются не в узле сетки т.к. ($63 - x = x \Rightarrow x = 31{,}5$ — не целое).

Тогда точек на диагоналях — $61 \cdot 2 = 122$.

Если две точки выбирать такие, чтобы обе лежали на диагоналях $\Rightarrow$ таких вариантов

$\frac{\overset{\text{выбрать 1-ую}}{122} \cdot 119}{2}$ выбрать 2-ую (кроме уже выбранной и ~~лежащие~~ образующие прямые т.к. можно выбрать сначала n-ую потом ∥-ые осям (их 2). О-ил. m-ую, или сначала m-ую, потом n-ую.

Если только одна точка лежит на диагонали

$\Rightarrow \overset{\text{выбрать 1-ую}}{122} \cdot (\underset{\text{все точки}}{61^2} - \underset{\text{т.к. вторая не лежит на диагонали}}{122} - \underset{\text{точки образующие прямые ∥-ые осям.}}{59 \cdot 2}) = 122 \cdot (59 \cdot 61 - 59 \cdot 2) = 122 \cdot 59^2$

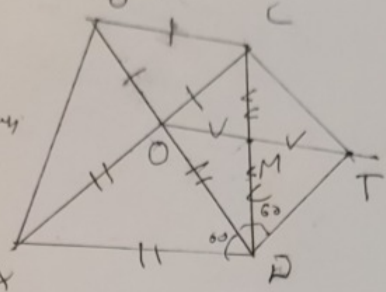
$\Rightarrow$ Всего вариантов: $122 \cdot 59^2 + \frac{122 \cdot 119}{2}$

Ответ: $122 \cdot 59^2 + \frac{122 \cdot 119}{2}$

(2)

Чистовик №6 Вар. 12.

1) M – середина CD
$OM = OT$
$CM = MD$ $\Big\} \Rightarrow CODT$ – ‖-м



$\angle BCD = \angle ODA = 60°$
$\angle COD = \angle OAD + \angle ODA = 120°$; $\Rightarrow \angle ODT = 180 - 120 = 60°$ по ‖-сти.
$\angle COD = \angle BOA$

$OC = BO = DT$.
$AD = OD = CT$.
$\angle ADT = \angle ODA + \angle ODT = 120 = \angle BOA = \angle BCT$ т.к $\angle OCT = \angle ODT$ по ‖-му
$\Rightarrow \triangle BOA = \triangle ADT = \triangle BCT$
$\Rightarrow AB = AT = BT \Rightarrow ABT$ – правильный т.к у

2) $S_{\triangle BCO} = n$.
$\Rightarrow S_{\triangle} ABO$ (т.к $AO = 2OC$) $= 2n = S_{\triangle} COD =$
т.к $BO = \frac{1}{2}OD \Rightarrow SAOD = \underline{= S_{\triangle} ADT = S_{\triangle} BCT} = S_{\triangle} CTD$, т.к $\triangle OCD = \triangle CTD$ по ‖-му
$SAOD = 4n$.

$S_{ABCTD} = n + 2n + 4n + 2n + 2n = 11n$

$S_{ABT} = S_{ABCTD} - S_{\triangle ADT} - S_{\triangle BCT} = 7n$

$S_{ABCD} = n + 2n + 2n + 4n = 9n$

$\Rightarrow \dfrac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \dfrac{7n}{9n} = \dfrac{7}{9}$

Ответ: $\frac{7}{9}$.

3

211006006 (U373150 M1277367)