Часть 1

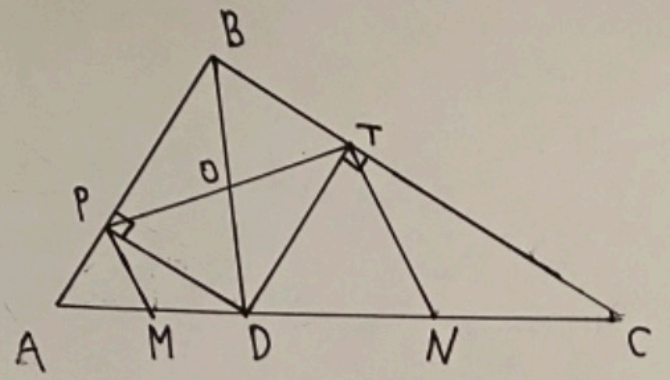
Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211005997**

ID профиля: **813492**

Вариант 12

№1. Чистовик



Дано: $\triangle ABC$

окр. $\omega(O; BO = OD)$

$\omega \cap AB = P$, $\omega \cap BC = T$

$AM = MD$

$DN = NC$

$PM \parallel TN$

Найти:

а) $\angle ABC$ - ?

б) S_{ABC} - ?, если $MP = \frac{1}{2}$, $NT = 1$, $BD = \frac{4}{3}$

Решение:

Т.к. BD - диаметр $\Rightarrow \angle BPD = \angle BTD = 90° \Rightarrow \angle APD = \angle DTC = 90°$, а

т.к. $AM = MD$ и $DN = NC \Rightarrow AM = DM = PM$, $DN = CN = TN$.

Пусть $\angle PMA = 2\alpha$, то т.к. $PM \parallel TN \Rightarrow \angle TND = 2\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle PMD = \angle TNC = 180° - 2\alpha$, а т.к. $PM = MD$ и $TN = NC \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle MPD = \angle MDP = \angle NTC = \angle NCT = \frac{180° - 180° + 2\alpha}{2} = \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle PAD = \angle TDC = 90° - \alpha$, т.к. $\triangle APD$ и $\triangle DTC$ - прям. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ABC = 180° - \angle BAC - \angle BCA = 180° - 90° + \alpha - \alpha = 90°$

Т.к. $\angle PBT = 90°$, а также $\angle BPD = \angle BTD = 90° \Rightarrow$

$\Rightarrow BPDT$ - прямоугольник $\Rightarrow P, O, T \in$ одной прямой и

и $PT = BD = \frac{4}{3}$. Т.к. $AM = PM = DM = \frac{1}{2} \Rightarrow AD = 1$ и

$DN = TN = CN = 1 \Rightarrow DC = 2$. Т.к. $\angle ADP = \alpha \Rightarrow DP = BT = AD\cos\alpha =$

$= \cos\alpha$ и т.к. $\angle DCT = \alpha \Rightarrow DT = BP = DC\sin\alpha = 2\sin\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow$ т-ма Пифагора для $\triangle PBT$:

$BP^2 + BT^2 = PT^2$

$4\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{16}{9}$

$\cancel{4+}(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + 3\sin^2\alpha = \frac{16}{9}$

$1 + 3\sin^2\alpha = \frac{16}{9}$

$3\sin^2\alpha = \frac{7}{9}$

$\sin^2\alpha = \frac{7}{27} \Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{\frac{7}{27}}$

$\Downarrow$

$\cos^2\alpha = \frac{20}{27} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{20}{27}}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot AC \sin\alpha \cdot AC \cos\alpha = \frac{(AD+DC)^2}{2} \sin\alpha \cos\alpha =$ Черновик

$= \frac{(1+2)^2}{2} \cdot \sqrt{\frac{7}{27}} \cdot \sqrt{\frac{20}{27}} = \frac{9}{2} \cdot \frac{\sqrt{140}}{27} = \frac{2\sqrt{35}}{2 \cdot 3} = \frac{\sqrt{35}}{3}$

Ответ: $\angle ABC = 90^\circ$, $S_{ABC} = \frac{\sqrt{35}}{3}$

211005997 (U813492 M1274184)

№ 2. Чистовик

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} = 2\sqrt{-x^2-x+4x+4} - 3$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} = 2\sqrt{-x(x+1)+4(x+1)} - 3$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} = 2\sqrt{(x+1)(4-x)} - 3$$

Возведём в квадрат

$$x+1+4-x-2\sqrt{(x+1)(4-x)} = 4(x+1)(4-x) - 12\sqrt{(x+1)(4-x)} + 9$$

$$4(x+1)(4-x) - 10\sqrt{(x+1)(4-x)} + 4 = 0$$

$$2(x+1)(4-x) - 5\sqrt{(x+1)(4-x)} + 2 = 0$$

$$\exists \sqrt{(x+1)(4-x)} = k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2k^2 - 5k + 2 = 0$$

$$k = \frac{5 \pm \sqrt{25-4\cdot 2\cdot 2}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} = \frac{1}{2}; 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{(x+1)(4-x)} = \frac{1}{2} \\ \sqrt{(x+1)(4-x)} = 2 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \left(\sqrt{4+3x-x^2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ \left(\sqrt{4+3x-x^2}\right)^2 = (2)^2 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 4+3x-x^2 = \frac{1}{4} \\ 4+3x-x^2 = 4 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2-3x-\frac{15}{4} = 0 \mid \cdot 4 \\ x^2-3x = 0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 4x^2-12x-15 = 0 \\ x(x-3) = 0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{12 \pm \sqrt{144-4\cdot 4(-15)}}{8} \\ x = 0 \\ x = 3 \end{array}\right.$$

Ответ:

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{12 \pm 8\sqrt{6}}{8} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{6} \\ x = 0 \\ x = 3 \end{array}\right.$$

Чистовик

№3.

~~$2a^2-2ax-6ax$~~

$$2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0$$

$$x^2+2x(y-a)+2a^2-6ay+5y^2=0$$

$$D=4y^2-8ay+4a^2-8a^2+24ay-20y^2=-4a^2+16ay-16y^2=$$

$$=-4(a^2-4ay+4y^2)=-4(a-2y)^2\le 0$$

Т.к. $D\ge 0$ (решение есть) $\Rightarrow -4(a-2y)^2=0$

$$a=2y$$

$$y=\frac{a}{2}\Rightarrow y_A=\frac{a}{2}$$

Подставим $y=\frac{a}{2}$:

$$2a^2-2ax-3a^2+x^2+\overset{ax}{\cancel{xy}}+\frac{5\overset{a}{\cancel{y}}^2}{4}=0$$

$$x^2-a^2-ax+\frac{5a^2}{4}=0\,|\cdot 4$$

$$4x^2-4a^2-4ax+5a^2=0$$

$$4x^2-4ax+a^2=0$$

$$(a-2x)^2=0$$

$$a=2x$$

$$x=\frac{a}{2}\Rightarrow x_A=\frac{a}{2}=y_A\Rightarrow y_A=x_A$$

$$ax^2+4a^2x-ay+4a^3+2=0\ (a\ne 0,\text{ т.к. иначе } 2=0)$$

$$ay=ax^2+4a^2x+4a^3+2$$

$$y=x^2+4ax+4a^2+\frac{2}{a}$$

$$x \text{ вершины} = x_B=\frac{-4a}{2}=-2a$$

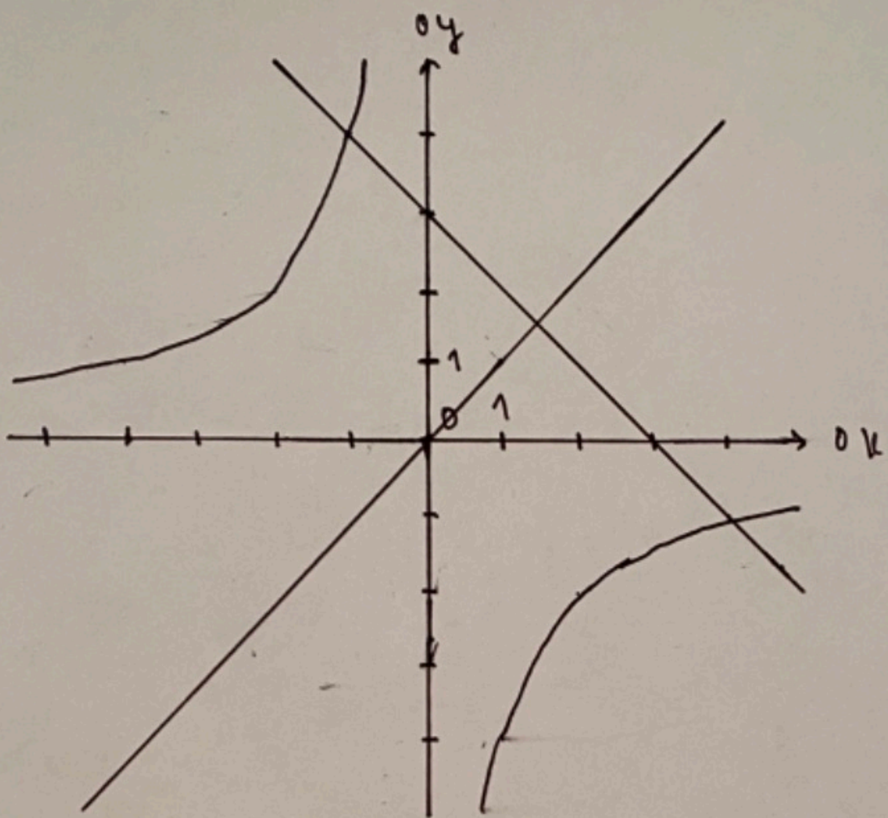
Подставим $x=-2a$:

$$y_B=4a^2-8a^2+4a^2+\frac{2}{a}=\frac{2}{a}\Rightarrow x_By_B=-2a\cdot\frac{2}{a}=-4\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_A=\frac{a}{2}\\ y_A=\frac{a}{2}\end{cases}\qquad\begin{cases}x_B=-2a\\ y_B=\frac{2}{a}\end{cases}$$

Чистовик

Нарисуем графики $y=3-x$,
$y=x$,
$xy=-1$



Т.к. графики $y=x$ и $y=3-x$ пересекаются в точке $(1,5;1,5)$ => 1° при $x_A<1,5$ => $\frac{a}{2}<1,5$, $a<3$ =>

=> $\begin{cases} x_B=-2a<-6 \\ y_B=\frac{2}{a}>\frac{2}{3} \end{cases}$ => нет решений, т.к. $y_B>1$ при $x_B\in(-1;+\infty)$

2°. при $x_A>1,5$ => $\frac{a}{2}>1,5$ => $a>3$

~~xA =>~~ $\begin{cases} x_B=-2a>-6 \\ y_B=\frac{2}{a}<\frac{2}{3} \end{cases}$ => нет решений, т.к. $y_B<\frac{2}{3}<1<3-x$ =>

=> на одной стороне никогда

Ответ: ни при каких a.

~~Черновик~~. Черновик

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$$

$4+3x-x^2 = -x^2 - x + 4x + 4 = -x(x+1) + 4(x+1) =$

$= (x+1)(4-x)$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{(x+1)(4-x)}$$

$\sqrt{x+1} = a$

$\sqrt{4-x} = b$

$a - b + 3 = ab$

$x+1 = a^2$

$4-x = b^2$

$a^2 + b^2 = 5$

$\cancel{a^2 b^2 = a^2 - 3ab + b^2}$

$384 : 16 = 24^2$

-32

64

$= 4 \cdot 6$

318

384

16×16

90

16

240

64×6

~~$x+1+4-x+$~~

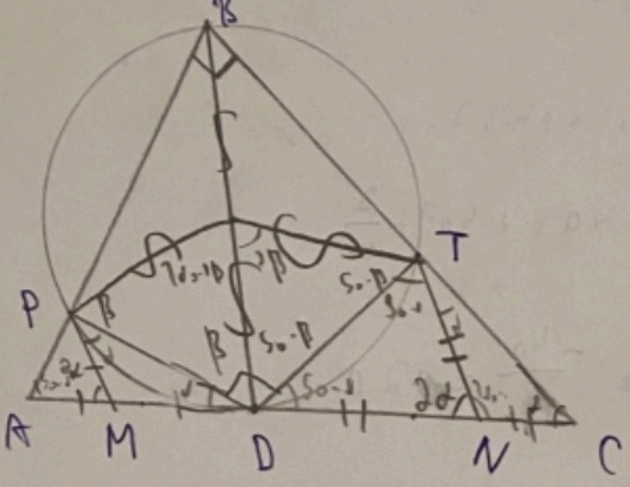
$x+1+4-x-2\sqrt{(x+1)(4-x)} = 4(x+1)(4-x) - 12\sqrt{(x+1)(4-x)} + 9$

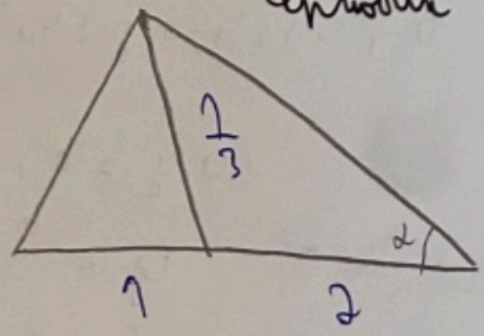
$4(x+1)(4-x) - 10\sqrt{(x+1)(4-x)} + 4 = 0$

$2(x+1)(4-x) - 5\sqrt{(x+1)(4-x)} + 2 = 0$

211005997 (U813492 M1274184)

Черновик





$\frac{1}{2}\cdot 3\cdot BC\sin\alpha =$

$=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\cos\alpha\sin\alpha$

$=\frac{9}{4}\sin 2\alpha$

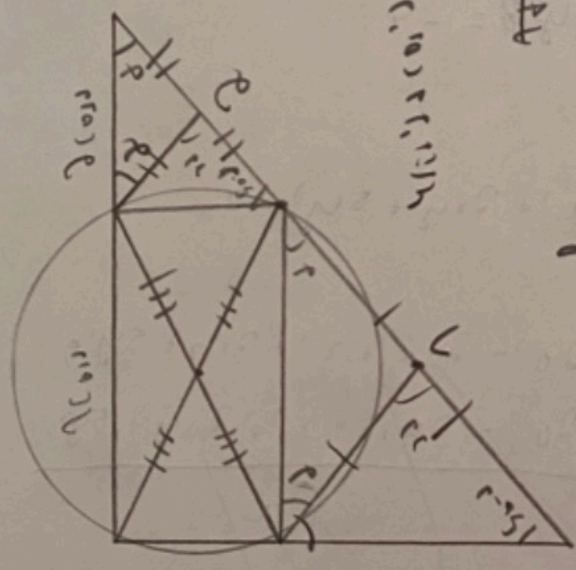
$MP=\frac{1}{2}$

$NT=1$

$BD=\frac{1}{3}$

$AD=1$

$DC=2$



Черновик

$ax^2+4a^2x-ay+4a^3+2=0$

$ay=ax^2+4a^2x+4a^3+2$

$y=x^2+4ax+4a^2+\frac{2}{a}$

$x_B=\frac{-4a}{2}=-2a$

$y=4a^2-8a^2+4a^2+\frac{2}{a}$

$y=\frac{2}{a}$

$y=3-x$

$x_B y_B=-4$

$2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0$

$6ay=2a^2-2ax+x^2+2xy+5y^2$

$y=\frac{2a^2-2ax+x^2+2xy+5y^2}{6a}=$

$x^2+2xy-2ax$

$5y^2+2xy+x^2$

$2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0$ Черновик

$x^2+2x(y-a)+5y^2-6ay+2a^2=0$

$D=4y^2-8ay+4a^2-20y^2+24ay-8a^2=$

$=-16y^2+16ay-4a^2=$

$=-4(a^2-4ay+4y^2)$

$=-4(a-2y)^2$

$y=\frac{a}{2}$

$2a^2-2ax-3a^2+x^2+x\cancel{y}^{a}+\frac{5a^2}{4}=0$

$-a^2-ax+x^2+\frac{5a^2}{4}=0 \mid \cdot 4$

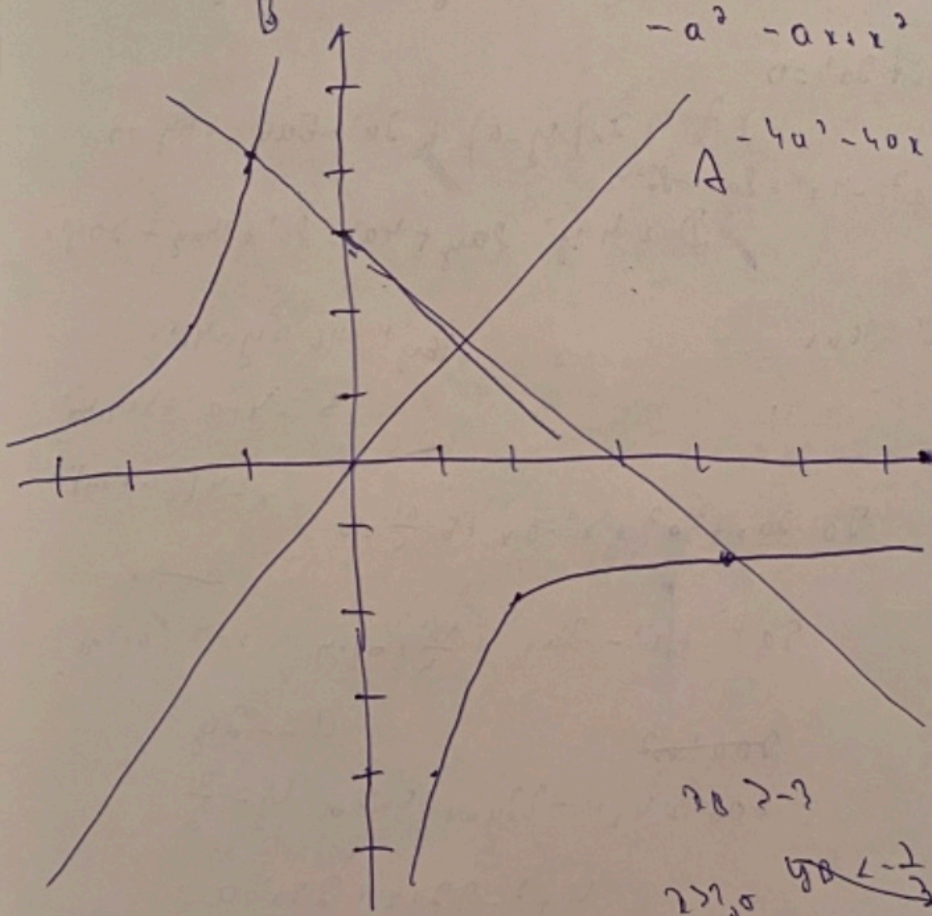
$-4a^2-4ax+4x^2+5a^2=0$

$a^2-4ax+4x^2=$

$a=2x$

$x=\frac{a}{2}$

$y=x$



~~$y_B\ x_B=1$~~

$y_A y_B = 1$

$x_B > -3$

$x > 1{,}0$ $y_B < -\frac{1}{3}$

$\frac{x_A}{x_B}=-4$

$x_B <$ $y=x=3 \cdot x$

$x>\frac{3}{3}$ $x\ 2\ 1{,}0$ $x_B < -6$

Б

$x<1$ ~~$x_B=-1$~~ $x<1{,}0$

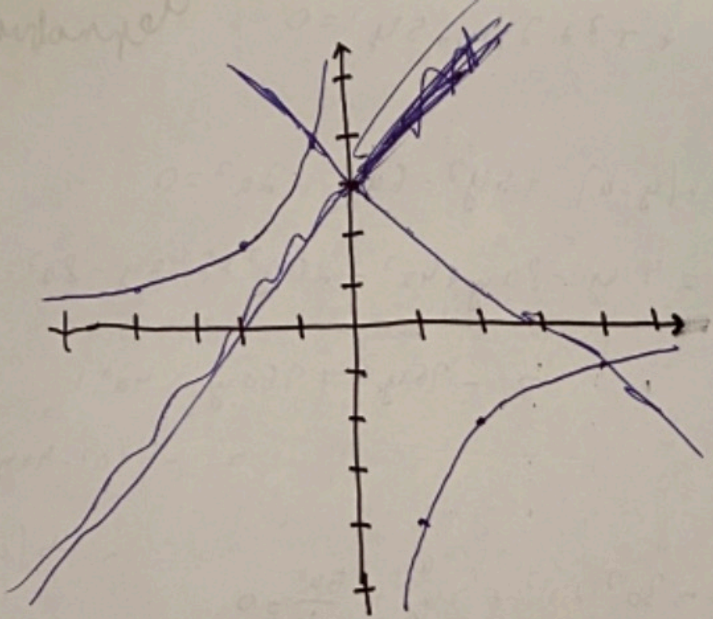
$a<3$ $\frac{a}{2}<1{,}0$

$y_B > \frac{2}{3}$ $-x<1$ $a<3$

~~$a<-2$~~ $a>-\frac{1}{2}$

211005997 (U813492 M1274184)

Черновик



$$2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0$$

$5y^2+2y(x-3a)+x^2-2ax+2a^2=0$

$x^2+2x(y-a)+2a^2-6ay+5y^2=0$

$D=4x^2-24ax+36a^2-4x^2+8ax-8a^2=$

$D=4y^2-8ay+4a^2-8a^2+24ay-20y^2=$

$=28a^2-16ax$

$=-16y^2-16ay-4a^2=$

$=-4(a^2+4ay+4y^2)$

$=-4(a+2y)^2=$

$2a^2-2ax+3a^2+x^2-ax+5\cdot\frac{a^2}{4}=0$

$\cancel{=4a}$

$5a^2+x^2-3ax+\frac{5a^2}{4}=0 \,|\cdot 4$

$=-4(a+2y)^2$

$\cancel{20a^2+2}$

$a=-2y$

$20a^2+4x^2-12ax+5a^2=0$

$y=-\frac{a}{2}$

$4x^2-12ax+25a^2=0$

$4x^2-12ax+20a^2$

$4x^2-12ax+9a^2+16a^2=0$

$x=\frac{12a\pm\sqrt{144a^2-4\cdot4\cdot20a^2}}{8}$

$(2x-3a)^2+(4a)^2=0$

$x=0$

$a=0$

$y=0$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211005997**

ID профиля: **813492**

Вариант 12

N4(1) Чистовик

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x^2+y^2}+x^2y^2=\dfrac{5}{4}\\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2=\dfrac{9}{4}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x^2+y^2}+x^2y^2=\dfrac{5}{4}\\ 2x^4+2y^4+4x^2y^2+x^2y^2=\dfrac{9}{4}\end{cases}$$

$$-\begin{cases}\dfrac{1}{x^2+y^2}+x^2y^2=\dfrac{5}{4}\\ 2(x^2+y^2)^2+x^2y^2=\dfrac{9}{4}\end{cases}$$

$$\frac{1}{x^2+y^2}-2(x^2+y^2)^2=-1$$

$$2(x^2+y^2)^2-\frac{1}{x^2+y^2}=1$$

$\exists\ x^2+y^2=k \Rightarrow$

$\Rightarrow 2k^2-\dfrac{1}{k}=1 \ |\cdot k$

$$2k^3-1=k$$

$$2k^3-k-1=0$$

$$k^3-k+k^3-1=0$$

$$k(k^2-1)+(k-1)(k^2+k+1)=0$$

$$(k-1)(k^2+k)+(k-1)(k^2+k+1)=0$$

$$(k-1)(2k^2+2k+1)=0$$

$$\left[\begin{array}{l}k=1\\ 2k^2+2k+1=0\end{array}\right.$$

$k=1$

$k=\dfrac{-2\pm\sqrt{4-4\cdot 2\cdot 1}}{2} \Rightarrow \varnothing$

$\Downarrow$

$k=1,\ x^2+y^2=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{1} + x^2y^2 = \frac{5}{4}$ N4(2) Чистовик

$$x^2y^2 = \frac{1}{4}$$

$$\left[\begin{array}{l} xy = \frac{1}{2} \\ xy = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

1°. $xy = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2x}$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + \left(\frac{1}{2x}\right)^2 = 1$$

$$x^2 + \frac{1}{4x^2} = 1 \quad \Big| \cdot 4x^2$$

$$4x^4 + 1 = 4x^2$$

$$4x^4 - 4x^2 + 1 = 0$$

$$(2x^2 - 1)^2 = 0$$

$$2x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$y^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

2°. $xy = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2x}$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + \left(-\frac{1}{2x}\right)^2 = 1$$

$$x^2 + \frac{1}{4x^2} = 1 \quad \Big| \cdot 4x^2$$

$$4x^4 + 1 = 4x^2$$

$$4x^4 - 4x^2 + 1 = 0$$

$\boxed{2}$

$$(2x^2 - 1)^2 = 0$$

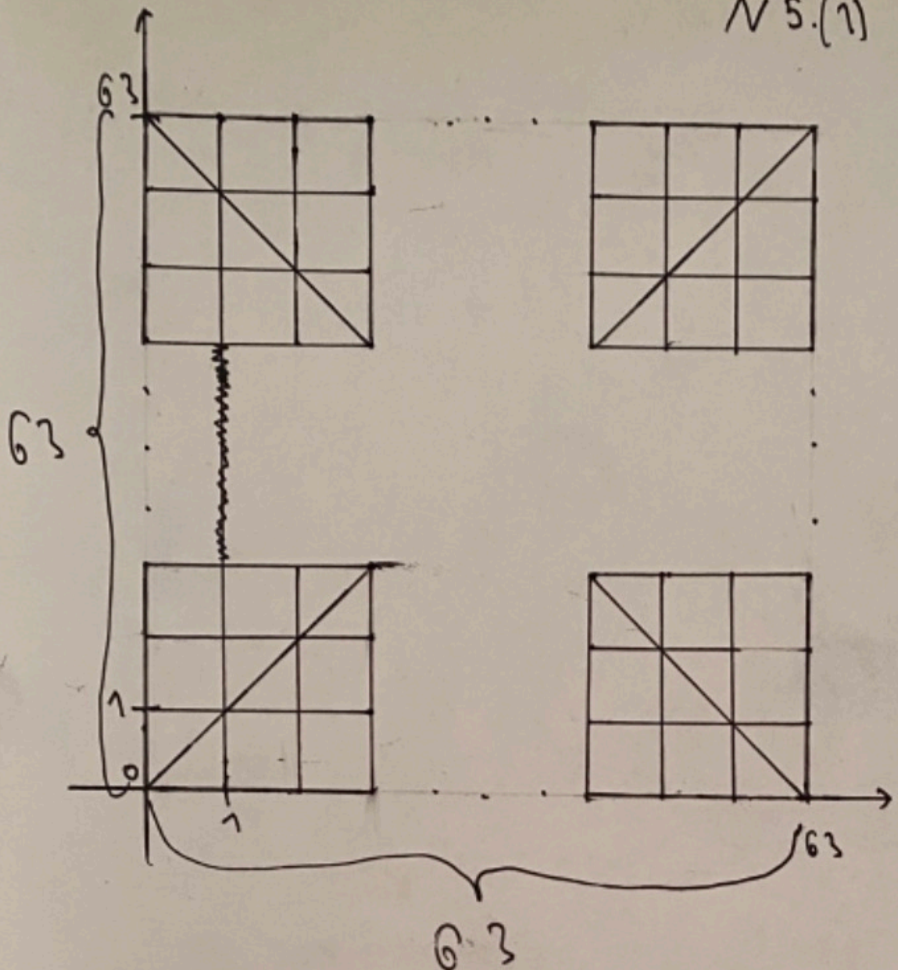
$$2x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}, \; y^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \mp\sqrt{\frac{1}{2}}$$

№4(3) чистовик

Ответ: $$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \sqrt{\frac{7}{2}} \\ y = \sqrt{\frac{7}{2}} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \sqrt{\frac{7}{2}} \\ y = -\sqrt{\frac{7}{2}} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\sqrt{\frac{7}{2}} \\ y = \sqrt{\frac{7}{2}} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\sqrt{\frac{7}{2}} \\ y = -\sqrt{\frac{7}{2}} \end{cases} \end{array}\right.$$

N 5.(1) Чистовик



Возьмём какой-либо из узлов сетки, лежащий на $y=x$ или $y=63-x$, т.к. 2 узла не могут лежать на одной вертикальной или горизонтальной линии, то кол-во способов взять 2 узла, если 1 уже находится на диагонали квадрата равен кол-во узлов в квадрате, т.е. $\cancel{64\cdot 64=2^{12}}$ $63\cdot 63=63^2$ отнять кол-во узлов в одной вертикали и горизонтали, т.е. $63^2+63^2+1=\cancel{127}$, а т.к. узлов всего, $62\cdot 2+1=127 \Rightarrow$ кол-во способов взять 2 узла по условию равно $\cancel{127(63^2-127)}$

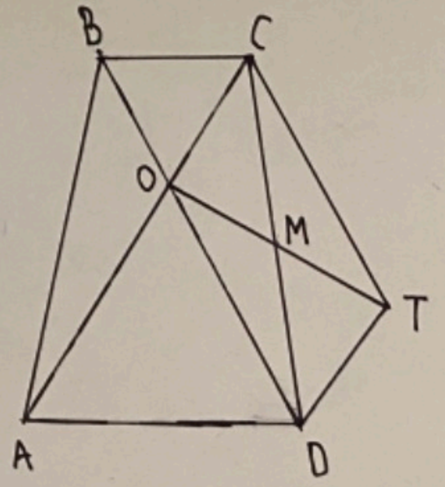
$125(63^2-125)$

N 5(2) Чистовик

Возьмём какой-нибудь узел сетки, лежащий на $y = x$ или $y = 63 - x$, т.к. 2 узла не могут лежать на одной вертикальной или горизонтальной прямой, то кол-во способов взять второй узел, если первый уже находится на диагонали квадрата, равно кол-во ~~способов~~ узлов в квадрате, т.е. $62 \cdot 62 = 62^2$ (не включая границу), отнять кол-во узлов в одной вертикали и горизонтали, т.е. ~~62+6~~ $61+61+1 = 123$, а т.к. узлов всего по $y = x$ и $y = 63 - x$ $61 \cdot 2 + 1 = 123 \Rightarrow$ кол-во способов взять 2 узла по условию равно $123(62^2 - 123)$

Ответ: $123(62^2 - 123)$

N 6(1) Чистовик



Дано: ABCD – четыр.
$\triangle AOD$, $\triangle BOC$ – прав.
$CM = MD$, $OM = MT$
Д-ть:
$\triangle ABT$ – прав.
Найти:
$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$, если $BC = 2$, $AD = 4$

Д-во:
Пусть $AO = OD = AD = a$, $BO = OC = CB = b$. Т.к. $OM = MT$ и $CM = MD$ =>
=> OCTD – параллелограмм => $OC = DT$, $CT = OD$ =>
=> $OC = b$, $CT = a$. ~~△~~ $\triangle AOB = \triangle DOC$ по I признаку ($BO = OC$, $AO = OD$,
$\angle AOB = \angle DOC$) => $AB = CD$
Рассмотрим ~~четыр~~ четыр. BCTD. В нём $CT \parallel BD$, т.к.
$CT \parallel OD$, $BC = TD = b$ => BCTD – р/б трапеция => диагонали
BT и CD равны.
Рассмотрим четыр. ~~CD~~ CTDA. В нём $TD \parallel CA$, т.к.
$TD \parallel CO$, $AD = TC = a$ => CTDA – р/б трапеция => диагонали
~~CT и AD равны~~ AT и CD равны => $AT = BT = CD$, но
т.к. $AB = CD$ => $AT = BT = AB$ => ~~△ABC~~ $\triangle ABT$ – прав.

Решение:
~~Найдем S_{ABT}. По теор. косинусов из $\triangle AOB$:~~
~~$AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2 \cdot AO \cdot BO \cos\angle AOB$~~
~~$AB^2 = 4^2 + 2^2 - 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \cos 120^\circ$~~
~~$AB^2 = 16 + 4 - 8\left(-\frac{1}{2}\right) = \cancel{16}\ 24 \Rightarrow AB = 2\sqrt{6}$~~

~~$AB = 4 \Rightarrow S_{ABT} = \cancel{AB}\ \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AB \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$~~

~~Т.к. $AB = AD$ => $\angle BAD = \angle BDA = 60^\circ$ => $\angle ABC = 120^\circ$ =>~~
~~=> $\angle BAD = 60^\circ$ =>~~

$\boxed{6}$

№6(2) Чистовик

Решение:

Найдём S_{ABT}. По теор. косинусов △ AOB

$$AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2\cdot AO\cdot BO \cos\angle AOB$$

$$AB^2 = 4^2 + 2^2 - 2\cdot 4\cdot 2\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$AB^2 = 16 + 4 - 16\left(-\frac{1}{2}\right) = 20 + 8 = 28$$

$$AB = 2\sqrt{7}$$

$$S_{ABT} = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot AB\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AB^2\cdot\sqrt{3}}{4} = \frac{28\sqrt{3}}{4} = 7\sqrt{3}$$

Найдём $\cos\angle BAD$ из теор. косинусов △ BAD:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2\cdot AB\cdot AD\cos\angle BAD$$

$$(BO+OD)^2 = 28 + 16 - 2\cdot 2\sqrt{7}\cdot 4\cos\angle BAD$$

$$(2+4)^2 = 44 - 16\sqrt{7}\cos\angle BAD$$

$$36 = 44 - 16\sqrt{7}\cos\angle BAD$$

$$16\sqrt{7}\cos\angle BAD = 8$$

$$\cos\angle BAD = \frac{1}{2\sqrt{7}} \Rightarrow \sin^2\angle BAD = 1 - \left(\frac{1}{2\sqrt{7}}\right)^2 =$$

$$= 1 - \frac{1}{28} = \frac{27}{28} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin\angle BAD = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{7}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ~~высота~~ $\Rightarrow$ высота трапеции равна $AB\sin\angle BAD =$

$$= 2\sqrt{7}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{7}} = 3\sqrt{3} \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{3}\,(BC+AD) = \frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot 6 = 9\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{7\sqrt{3}}{9\sqrt{3}} = \frac{7}{9}$$

Ответ: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{7}{9}$

Черновик

$$\frac{1}{x^2+y^2}+x^2y^2=\frac{5}{4}$$

$$2x^4+2y^4+5x^2y^2=\frac{9}{4}$$

$\cancel{2x^4}$ $2x^4+2y^4+5x^2y^2=0$

$D=25-4\cdot4=9$

$x^2=\frac{-5y^2\pm3y^2}{4}=-2y^2;\ -\frac{1}{2}y^2$

$2(x^2+2y^2)(x^2+\frac{1}{2}y^2)=$

$=(x^2+2y^2)(2x^2+y^2)=$

$=((x^2+y^2)+y^2)((x^2+y^2)+x^2)$

$(x^2+y^2)^2+y^2(x^2+y^2)+x^2(x^2+y^2)+x^2y^2=\frac{9}{4}$

$-\begin{cases}2(x^2+y^2)^2+x^2y^2=\frac{9}{4}\\ \frac{1}{x^2+y^2}+x^2y^2=\frac{5}{4}\end{cases}$

$2(x^2+y^2)^2-\frac{1}{x^2+y^2}=1$

$x^2+y^2=k$

$2k^2-\frac{1}{k}=1$

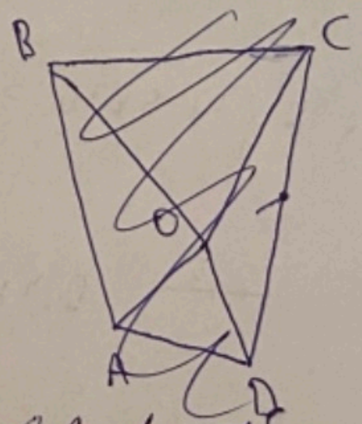
$2k^3-1=k$

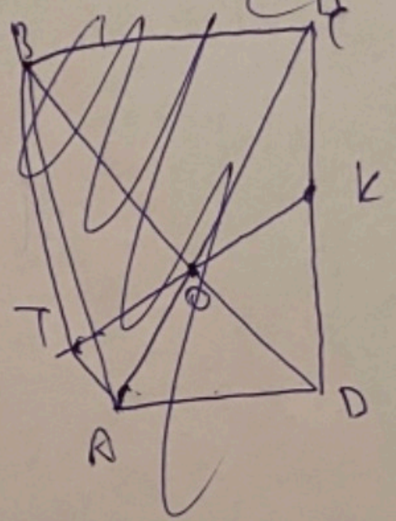
$2k^3-k-1=0$

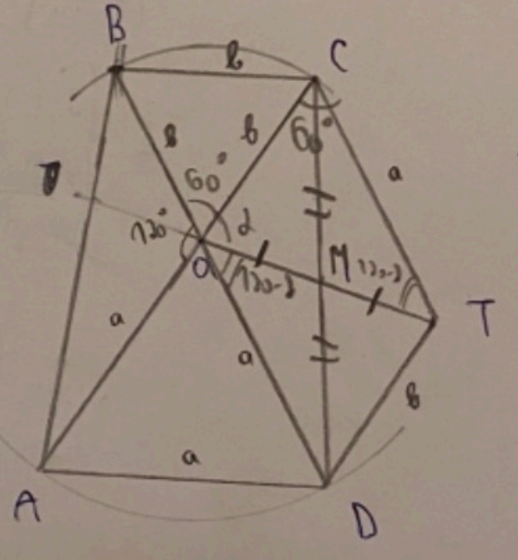
$k^3-k+k^3-1=0$

211005997 (U813492 M1274185)

Черновик







$AB^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 120°$

$= a^2 + b^2 + ab$

$OT^2 = a^2 + b^2 - ab$

$CD^2 = a^2 + b^2 + ab$

$BC = 2,\ AD = 4$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot AB\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{24\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3}$ Черновик

Найдём $\cos\angle BAD$ из теор. косинусов $\triangle BAD$:

$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2\,AB\,AD\cos\angle BAD$

$(BO+OD)^2 = 24 + 16 - 2\cdot 2\sqrt{6}\cdot 4\cos\angle BAD$

$36 = 40 - 16\sqrt{6}\cos\angle BAD$

$16\sqrt{6}\cos\angle BAD = 4$

$\cos\angle BAD = \frac{1}{2\sqrt{6}} \Rightarrow \sin^2\angle BAD = 1 - \left(\frac{1}{2\sqrt{6}}\right)^2 = 1 - \frac{1}{24} = \frac{23}{24} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin\angle BAD = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{23}{6}}$

$36 = 24 + 16 - 2\cdot 2\sqrt{6}\cdot 4\cos\angle BAD$

$16\sqrt{6}\cos\angle BAD = 4$

$\cos\angle BAD = \frac{1}{4\sqrt{6}} \Rightarrow \sin^2\angle BAD = 1 - \left(\frac{1}{4\sqrt{6}}\right)^2 = 1 - \frac{1}{96} = \frac{95}{96}$

$\sin\angle BAD$