Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

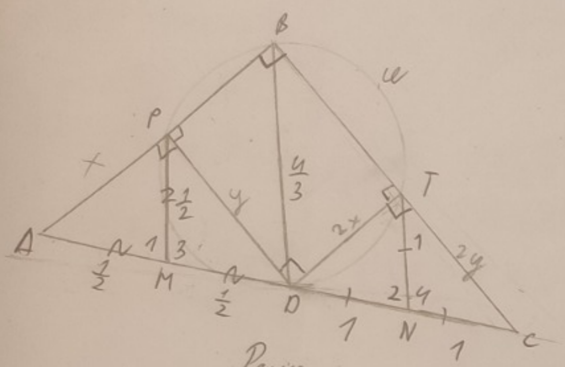
Шифр: **211005979**

ID профиля: **198411**

Вариант 12

$ax^2+4a^2-x-a\ldots$ $x \geq -1$ $\ldots+3=2\sqrt{4+3x-x^2}$

№1



Дано:

$\triangle ABC$, ω

$D \in AC$, $MP \parallel NT$

BD – диаметр ω

$\omega \cap AB = P$

$\omega \cap BC = T$

$MP = \frac{1}{2}$

$NT = 1$

$BD = \frac{4}{3}$

M – середина AD

N – середина DC

Найти:

$\angle ABC$ – ?

$S_{\triangle ABC}$

Решение:

1) т.к. $P, T \in \omega$, $\angle DPB$ и $\angle DTB$ опираются на BD, BD – диаметр $\Rightarrow \angle DPB = \angle DTB = 90°$, $\angle APD = 180° - \angle DPB = 180° - \angle DTB = \angle DTC \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle APD = \angle DTC = 90°$

2) т.к. $MP \parallel TN$ $\Rightarrow \angle 1 = \angle 2$, $\angle 4 = \angle 3$ как соответственные при секущей MN, $\angle 1 + \angle 3 = 180° \Rightarrow \angle 1 = \angle 2 = 180° - \angle 3 = 180° - \angle 4$

3) т.к. $\angle APD = \angle DTC = 90° \Rightarrow \triangle APD$ и $\triangle DTC$ – прямоугольный, PM и TN – медианы (т.к. M – середина AD, N – середина NC), ~~опущенные~~ из прямого угла $\Rightarrow PM = \frac{1}{2}AD = AM = MD$ $TN = \frac{1}{2}DC = DN = NC \Rightarrow \triangle PM$ и $\triangle DTN$ – равнобедренные $\Rightarrow \angle MDP = \frac{180° - \angle 3}{2}$, $\angle NDT = \frac{180° - \angle 2}{2} =$
$= \frac{180° - \angle 1}{2} = \frac{180° - (180° - \angle 3)}{2} = \frac{\angle 3}{2} = \angle TCN$

4) $\angle PDT + \angle MDP + \angle NDT = 180° \Rightarrow \angle PDT = 180° - \left(\frac{180° - \angle 3}{2} + \frac{\angle 3}{2}\right) = 90°$

4) т.к. $DPBT$ – вписанный $\Rightarrow \angle PDT + \angle ABC = 180°$ как противоположные во вписанном четырёхугольнике $\Rightarrow \angle ABC = 180° - PDT = 90°$

5) $AD = 2PM = 1$, $DC = 2TN = 2$ (т.к. $PM = \frac{1}{2}$, $NT = 1$), $\angle APD = \angle DTC = 90°$, $\angle PAM = 90° - \angle MDP =$
$= 90° - \frac{180° - \angle 3}{2} = \frac{\angle 3}{2} = \angle TNC \Rightarrow \triangle APD \sim \triangle DTC$ $\frac{AP}{DT} = \frac{PD}{TC} = \frac{AD}{DC} = \frac{1}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow DT = 2AP$, $TC = 2PD$,

~~6) По теореме Пифагора $AP^2 + PD^2 = 1 = AD^2$~~
~~$DT^2 + TC^2 = 4AP^2 + 4PD^2 = 4 = DC^2$~~
~~$DT^2 + PD^2 = 4AP^2 + PD^2 = \frac{16}{9} = BD^2 \Rightarrow 3PD^2 = \frac{4 \cdot 9 - 16}{9} = \frac{20}{27} \Rightarrow PD^2 = \frac{20}{27} \Rightarrow PD = \frac{2\sqrt{15}}{9}$~~

6) По теореме Пифагора:

$$\left.\begin{aligned} DT^2 + TC^2 &= DC^2 \\ AP^2 + PD^2 &= AD^2 \\ PD^2 + DT^2 &= BD^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} 4AP^2 + 4PD^2 &= 4 \\ AP^2 + PD^2 &= 1 \\ 4AP^2 + PD^2 &= \frac{16}{9} \end{aligned}$$

$3AP^2 = 4 - \frac{16}{9} = \frac{36-16}{9} = \frac{20}{9}$

$AP^2 = \frac{20}{27} \Rightarrow AP = \frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{15}}{9}$

$PD^2 = 1 - \frac{20}{27} = \frac{7}{27} \Rightarrow PD = \frac{\sqrt{21}}{9}$

$S_{PDTB} = PD \cdot DT = 2PD \cdot AP = \frac{4\sqrt{5 \cdot 7 \cdot 9}}{9 \cdot 9} = \frac{4 \cdot 3\sqrt{35}}{9 \cdot 9} = \frac{4}{27}\sqrt{35}$

$S_{APD} = \frac{AP \cdot PD}{2} = \frac{2\sqrt{15}}{2 \cdot 9} \cdot \frac{\sqrt{21}}{9} = \frac{3\sqrt{35}}{81} = \frac{\sqrt{35}}{27}$

$S_{DTC} = \frac{2AP \cdot 2PD}{2} = 2AP \cdot PD = \frac{4\sqrt{35}}{27}$

$S_{ABC} = S_{PDTB} + S_{APD} + S_{DTC} = \frac{9\sqrt{35}}{27} = \frac{\sqrt{35}}{3}$

Ответ: $\angle ABC = 90°$ $S_{ABC} = \frac{\sqrt{35}}{3}$

211005979 (U198411 M1277252)

№2.

№2

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$ $\boxed{4 \geqslant x \geqslant -1}$

$5 - 2\sqrt{(x+1)(4-x)} + (\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x}) - 2 = 0$

$\sqrt{x+1}^2 + \sqrt{4-x}^2 - 2\sqrt{(x+1)(4-x)} + (\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x}) - 2 = 0$

$(\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x})^2 + (\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x}) - 2 = 0$

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} = t$

$t^2 + t - 2 = 0$

$(t+2)(t-1) = 0$

$t = -2$

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} = -2$ $\quad \sqrt{x+1} < \sqrt{4-x}$

$5 - 2\sqrt{4+3x-x^2} = 4$ $\quad x+1 < 4-x$

$\sqrt{4+3x-x^2} = \frac{1}{2}$ $\quad 2x < 3$

$\quad x < 1{,}5$

$4 + 3x - x^2 = \frac{1}{4}$

$16 + 12x - 4x^2 = 1$

$15 + 12x - 4x^2 = 0$

$4x^2 - 12x - 15 = 0$

$D/_4 = 36 + 60 = 96 = (4\sqrt{6})^2$

$x = \frac{6 + 4\sqrt{6}}{4} = \frac{3 + 2\sqrt{6}}{2} > \frac{3 + \cancel{2\sqrt{6,25}}}{2} > 1{,}5 \Rightarrow$ не подход

$x = \frac{6 - 4\sqrt{6}}{4} = \frac{3 - 2\sqrt{6}}{2} > \frac{3 - 2\sqrt{6{,}25}}{2} = \frac{5 - 5}{2} = -1 \Rightarrow$ подход

$t = 1$

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} = 1$

$5 - 2\sqrt{4+3x-x^2} = 1$

$\sqrt{x+1} > \sqrt{4-x}$ $\quad \sqrt{4+3x-x^2} = 2$

$x+1 > 4-x$ $\quad 4 + 3x - x^2 = 4$

$2x > 3$ $\quad 3x - x^2 = 0$

$x > 1{,}5$ $\quad x(3-x) = 0$

$\begin{cases} x=0 \quad x=3 \\ x > 1{,}5 \end{cases} \Rightarrow x = 3$

Ответ: $x = 3 \quad x = \frac{3 - 2\sqrt{6}}{2}$.

211005979 (U198411 M1277252)

№3.

$2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0$

$ax^2+4a^2-x-ay+4a^3+2=0$

~~1) рассмотрим случай когда $x+y>3 \Rightarrow y>x-3$~~

$2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0$

$(a^2-2ax+x^2)+(a^2-6ay+9y^2)-4y^2+2xy=0$

$(3y-a)^2-4y^2+2xy-\frac{x^2}{4}+\frac{5x^2}{4}-2ax+a^2=0$

$(3y-a)^2-(2y-\frac{x}{2})^2+\frac{5x^2}{4}-2ax+a^2=0$

$(3y-a-2y+\frac{x}{2})(3y-a+2y-\frac{x}{2})+\frac{5x^2}{4}-2ax+a^2=0$

$(y-a+\frac{x}{2})(5y-a-\frac{x}{2})+\frac{5x^2}{4}-2ax+a^2=0$

чем больше y тем больше это произведение ~~во~~ наоборот $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ т.к. $y>3-x$

$(3-x-a+\frac{x}{2})(5(3-x)-a-\frac{x}{2})+\frac{5x^2}{4}-2ax+a^2<0$

~~$(3-a-\frac{x}{2})(15-\frac{11x}{2}-a)+\frac{5x^2-8ax+4a^2}{4}<0$~~

~~$\frac{(6-2a-x)(30-11x-2a)}{4}+5x^2-8ax+4a<0$~~

$2a^2-2ax+6a(3-x)+x^2+2x(3-x)+5(3-x)^2=0$

$2a^2-2ax+18a-6ax+x^2+6x-2x^2+5(9-6x+x^2)=0$

$2a^2+18a-8a-8x-x^2+45-30x+5x^2=0$

$4x^2-(8(3+a))x+2a^2+18a+45=0$

$2a^2+12a+18+6a+27$

$2(a+3)^2+3(2a+9)$

$D=8^2(3+a)^2-32(a+3)^2-48(2a+9)=32(3+a)^2+96a$

№3

$2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0$

~~$ax^2+4a^2x-ay+4a^3+2=0$~~

$2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0$

~~$2(a^2-2ax+x^2)+(a^2-6ay+9y^2)-4y^2+2xy=0$~~

~~$(x-a)^2+(3y-a)^2-2y(2y$~~

$y>3-x$

$2a^2-2ax-6a(3-x)+x^2+2x(3-x)+5(3-x)^2<0$

$2a^2-2ax-18a+6ax+x^2+6x-2x^2+5(9-6x+x^2)<0$

$2a^2-2ax-16a+6a+x^2+6x-2x^2+3$

$\times \frac{16}{3}$

4

211005979 (U198411 M1277252)

Часть 2

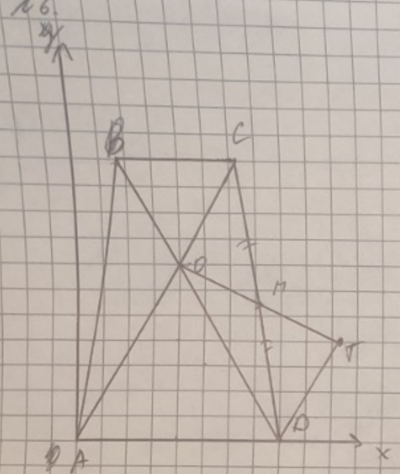
Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211005979**

ID профиля: **198411**

Вариант 12

№6.



Дано:

ABCD - выпуклый четырёхугольник

~~ΔABD~~ M - середина CD

AC и BD - диагонали

$AC \cap BD = O$

T - симметрична O относительно M

ΔBOC и ΔAOD - правильные

Док-ать:

ΔBT - правильный

Найти:

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$

$BC = 2$

$AD = 4$

Решение:

1) т.к. ΔBOC и AOD - правильные $\angle OAD = \angle BCO = 60°$, $AO = OD = AD = a$, $BO = OC = CB = b$ =>

BC ∥ AD т.к. ~~BO~~ AD и ∠BCO - накрест лежащие при секущей AC

2) Введём систему координат с началом в точке A и осью X проходящей через AD, и осью $y \perp AD$

3) т.к. BC ∥ AD, AD ∈ оси Oy => $y_A = y_D = 0$, $y_B = y_C$

4) ~~AC~~ AD = 60° (т.к. ΔAOD - правильный; ~~BD~~), X_C = проекция AC на ось X,

y_C = проекция AC на ось y => $X_C = (AO+OC) \cdot \cos 60° = \frac{a+b}{2}$

$y_B = y_C = (AO+OC) \cdot \sin 60° = \frac{(a+b)\sqrt{3}}{2}$

$BC = \sqrt{(x_c - x_b)^2 + (y_c - y_b)^2} = \sqrt{(x_c - x_b)^2} = x_c - x_b = \frac{a+b}{2} - x_b$

$b = \frac{a+b}{2} - x_B \Rightarrow x_B = \frac{a-b}{2}$

~~X_B~~ $AD = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2} = x_D - x_A = x_D$

$x_D = a$

$y_O = AO \cdot \sin OAD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$x_O = AO \cdot \cos OAD = \frac{a}{2}$

~~5) получаем~~

5) т.к. M - середина CD => $x_M = \frac{x_D + x_C}{2} = \frac{3a+b}{4}$

$y_M = \frac{y_D + y_C}{2} = \frac{(a+b)\sqrt{3}}{4}$

6) получаем

$A(0;0)$ $\quad O\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$

$B\left(\frac{a-b}{2}; \frac{(a+b)\sqrt{3}}{2}\right)$

$C\left(\frac{a+b}{2}; \frac{(a+b)\sqrt{3}}{2}\right)$

$D(a;0)$

$M\left(\frac{3a+b}{4}; \frac{(a+b)\sqrt{3}}{4}\right)$

7) т.к. T - симметрична O относительно M =>

M - середина OT => $X_M = \frac{x_O + x_T}{2}$ $\quad y_M = \frac{y_O + y_T}{2}$

$X_T = 2X_M - X_O = \frac{3a+b}{2} - \frac{a}{2} = \frac{2a+b}{2}$

$y_T = 2y_M - y_O = \frac{b\sqrt{3}}{2}$

$AB = \sqrt{\frac{(a-b)^2}{4} + \frac{(a+b)^2 \cdot 3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab + 3a^2 + 3b^2 + 6ab} =$

$= \sqrt{a^2 + b^2 + ab}$

$BT = \sqrt{(x_B - x_T)^2 + (y_B - y_T)^2} = \sqrt{\left(\frac{a+2b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$

$= \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4ab + 4b^2 + 3a^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + ab}$

$AT = \sqrt{(x_A - x_T)^2 + (y_A - y_T)^2} = \sqrt{\left(\frac{2a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$

$= \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + 4ab + b^2 + 3b^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + ab}$

$\sqrt{a^2 + b^2 + ab} = AB = BT = AT \Rightarrow$ ΔABT - равносторонний =>

=> ΔABT - правильный ч.т.д.

4) BC ∥ AD ~~AB~~ $\xRightarrow{AB \times CD}$ ABCD - трапеция =>

=> $S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2} \cdot h = \frac{AD+BC}{2} \cdot y_C = \frac{AD+BC}{2} \cdot (AO+OC) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{(AD+BC)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{36\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$

$S_{ABT} = \frac{AB \cdot h_{ABT}}{2} = AB \cdot \frac{AT \cdot \sin BAT}{2} = \frac{AB \cdot AB\sqrt{3}}{4} =$

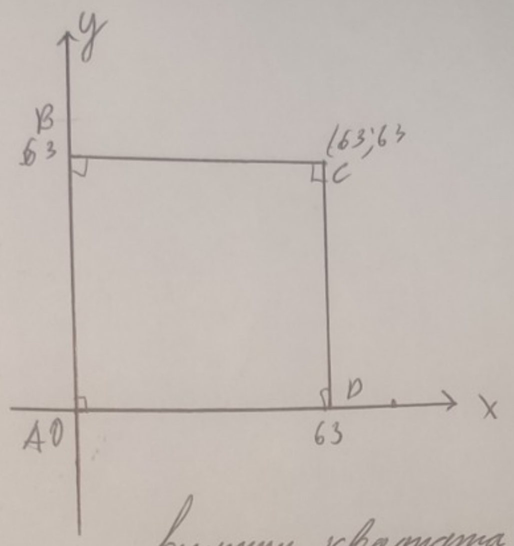
$= \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(a^2+b^2+ab)\sqrt{3}}{4} = \frac{(AD^2 + BC^2 + AD \cdot BC)\sqrt{3}}{4} =$

$= \frac{(16+4+8)\sqrt{3}}{4} = (4+1+2)\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{7\sqrt{3}}{9\sqrt{3}} = \frac{7}{9}$

Ответ: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{7}{9}$

№5.



внутри квадрата 62 вертикальных линий сетки и 62 горизонтальных $\Rightarrow$ кол-во узлов $= 62 \cdot 62 = 3844$

2) проведём ~~прямую~~ прямую $y = x$ заметим, что она проходит через точки A и C и совпадает с диагональю квадрата $\Rightarrow$ т.к. диагональ квадрата проходит через точки с координатами $(x; x)$, таких в квадрате всего 62 $\Rightarrow$ она проходит через 62 узла сетки

3) аналогично 2) проведём прямую $y = 63 - x$, она совпадёт с BD и тоже будет пересекать 62 узла сетки

4) заметим, что диагонали BD и AC не пересекаются в узлах, т.к $(63 - x = x) \Rightarrow x = 31{,}5$ а линии сетки проходят только через целые x

5) посчитаем кол-во комбинаций, когда 1 точка лежит на AC а вторая ни на AC и ни на BD

$$K_1 = 62 \cdot (3844 - 2 \cdot 62 - (62-2) \cdot 2) = 62(3844 - 2 \cdot 122) =$$
$$= 62(3844 - 244) = 62 \cdot 3600$$

(т.к. по вертикали и горизонтали исключается одинаковое кол-во узлов, при этом в каждой вертикали и горизонтали один узел уже исключен из-за исключения BD и один из-за исключения первой точки)

6) Аналогично 5) кол-во комбинаций когда первая точка лежит на BD, а вторая ни на BD и ни на AC равно $K_2 = 62 \cdot 3600$

7) Когда ~~обе~~ точки лежат на одной из диагоналей BD и AC $\Rightarrow$

$$K_3 \frac{124 \cdot (123 - 2)}{2} = 62 \cdot 121$$

(т.к. 2 точки исключаются по вертикали/горизонтали)

Ответ: $K = 62 \cdot 3600 \cdot 2 + 62 \cdot 121 = 38~~44~~00 + 7502 = 391902$

№4.

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2}+x^2y^2=\frac{5}{4} \\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2=\frac{9}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2}+x^2y^2=\frac{5}{4} \\ 2(x^4+y^4+2x^2y^2)+x^2y^2=\frac{9}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2}+x^2y^2=\frac{5}{4} \quad (2) \\ 2(x^2+y^2)^2+x^2y^2=\frac{9}{4} \quad (1) \end{cases}$$

$$(1)-(2) \Rightarrow 2(x^2+y^2)^2-\frac{1}{x^2+y^2}=1$$

$x^2+y^2=t \quad t>0$

$t=1$ – является решением

$$2t^2-\frac{1}{t}=1$$

$$2t^2-t-1=0$$

$$(t-1)(2t^2+2t+1)=0$$

$D=4-8<0 \Rightarrow 2t^2+2t+1>0$ при $\forall t$

$$\begin{array}{l|l} 2t^3+0t^2-t-1 & t-1 \\ \hline -\,2t^3-2t^2 & 2t^2+2t+1 \\ \quad 2t^2-t & \\ \quad -\,2t^2-2t & \\ \qquad t-1 & \\ \qquad -\,t-1 & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$t=1$

$x^2+y^2=1 \; (3)$

$\Downarrow$

$$\frac{1}{x^2+y^2}+x^2y^2=1+x^2y^2=\frac{5}{4}$$

$$x^2y^2=\frac{1}{4}$$

① $xy=\frac{1}{2}$

$x^2+y^2-2xy=0$

$(x-y)^2=0$

$x=y$

$(3) \Rightarrow x^2+y^2=1$

$2x^2=1$

$x^2=\frac{1}{2}$

$x=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$y=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

② $xy=-\frac{1}{2}$

$x^2+y^2+2xy=0$

$(x+y)^2=0$

$x=-y$

$(3) \Rightarrow x^2+y^2=1$

$2x^2=1$

$x^2=\frac{1}{2}$

$x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$y=\mp\frac{\sqrt{2}}{2}$

Ответ: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$