Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211005930**

ID профиля: **92363**

Вариант 12

2. $\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} = 2\sqrt{4+3x-x^2} - 3$

$(x+1) - 2\sqrt{(x+1)(4-x)} + (4-x) = 4(4+3x-x^2) - 12\sqrt{4-3x-x^2} + 9$

$10\sqrt{-x^2+3x+4} = 4(-x^2+3x+5)$

Замена: $\sqrt{-x^2+3x+4} = t$

$5t = 2(t^2+1)$

$2t^2 - 5t + 2 = 0$

$\left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = \frac{1}{2} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \sqrt{-x^2+3x+4} = 2 \\ \sqrt{-x^2+3x+4} = \frac{1}{2} \end{array}\right.$

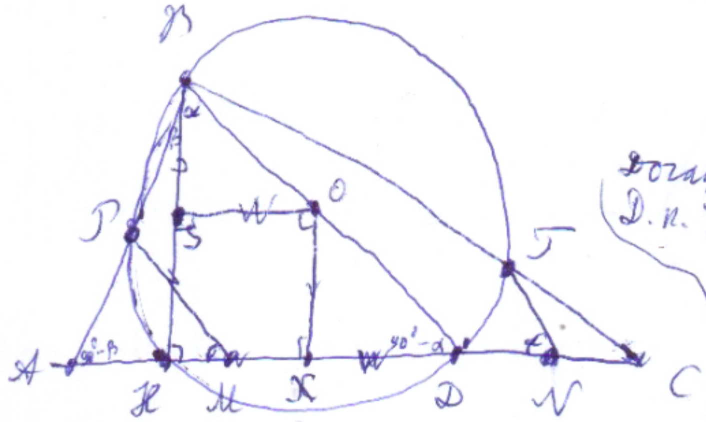
$\left[\begin{array}{l} -x^2+3x=0 \\ -x^2+3x+\frac{15}{4}=0 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x=0 \text{ - пост. корень} \\ x=3 \\ x=\frac{-3+2\sqrt{6}}{-2} \\ x=\frac{-3-2\sqrt{6}}{-2} \text{ пост. корень} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=\cancel{\frac{+3+2\sqrt{6}}{2}}\ \frac{3-2\sqrt{6}}{2} \end{array}\right.$

Ответ: 3; $\cancel{\frac{+3+2\sqrt{6}}{2}}$ $\frac{3-2\sqrt{6}}{2}$

211005930 (U92363 M1274190)



$PM \parallel TN$

~~Догадки:~~

Д.п.: BH – высота

$H \in$ окр-ти

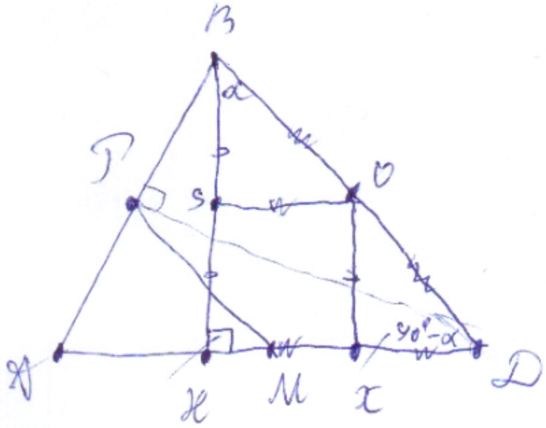
SO – сер. перп. в H

XO – сер. перп. HD

$HPOX$ – ~~квадрат~~ пр/угольник

$OX = \frac{BH}{2}$, $OX \parallel BH$

(OX – ср. л. $\triangle BHD$)



$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$

$\cancel{\sqrt{x+1} + 3 = \sqrt{4-x} + 2\sqrt{4-3x-x^2}}$

$x+1 - 2\sqrt{(x+1)(4-x)} + 4 - x = 4(4+3x-x^2) - 12\sqrt{4-3x-x^2} + 9$

$1 - 2\sqrt{-x^2+4+3x} + 4 = 16 + 12x - 4x^2 + 9 - 12\sqrt{-x^2+4+3x}$

$12\sqrt{-x^2+4+3x} - 2\sqrt{-x^2+4+3x} = -4x^2 + 12x + 20$

$\overset{5}{\cancel{10}}\sqrt{-x^2+3x+4} = \overset{2}{\cancel{4}}(-x^2+3x+5)$

$5t = 2(t^2+1)$

$2t^2 - 5t + 2 \qquad D = 25 - 4\cdot 4 = 9$

$t = \frac{5+3}{4} = 2, \; t = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$

$\sqrt{-x^2+3x+4} = 2, \; \sqrt{-x^2+3x+4} = \frac{1}{2}$

$-x^2+3x = 0 \quad , -x^2+3x+\frac{15}{4} = 0$

$(x=0), x = 3,$

$D = 9+15 = 24$

$\cancel{x = \frac{-3+5}{-2} = -1}$

$\cancel{x = \frac{-3-5}{-2} = 4}$

$x = \frac{-3+2\sqrt{6}}{-2} \approx -1$

$x = \frac{-3-2\sqrt{6}}{-2} \approx 4$

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} = 2\sqrt{4+3x-x^2} - 3$

1	2	2·2
2	1	2·2
0	$-\sqrt{5}$	2·0
$\sqrt{5}$	0	

$x^2 - 3x - \frac{15}{4} = 0$

$a + b = 3$

$ab = -\frac{15}{4}$

$4x^2 - 12x - 15 = 0$

$D = 144 + 240 = 384$

211005930 (U92363 M1274190)

стр. 2
(черновик)

$2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0$

$(x^2-2ax+a^2)+(5y^2-6ay+a^2)=0$??

$3x=\sqrt{5}\times x$

211005930 (U92363 M1274190)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211005930**

ID профиля: **92363**

Вариант 12

4. $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \dfrac{5}{4} \\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2 = \dfrac{9}{4} \end{cases}$

Замена: $u = x^2+y^2$, $v = x^2y^2$

$\begin{cases} \dfrac{1}{u} + v = \dfrac{5}{4} \\ 2u^2+v = \dfrac{9}{4} \end{cases}$

$\begin{cases} v = \dfrac{5}{4} - \dfrac{1}{u} \\ 2u^2 - \dfrac{1}{u} = 1 \end{cases}$

$2u^2 - \dfrac{1}{u} = 1$

$2u^3 - u - 1 = 0$

$$\begin{array}{l|l} 2u^3+0u^2-u-1 & u-1 \\ \hline 2u^3-2u^2 & 2u^2+2u+1 \\ \quad 2u^2-u & \\ \quad 2u^2-2u & \\ \qquad u-1 & \\ \qquad u-1 & \\ \qquad\ 0 & \end{array}$$

$\left[\begin{array}{l} u=1 \\ 2u^2+2u+1=0 \end{array}\right.$

$u = 1$

$\begin{cases} v = \dfrac{1}{4} \\ u = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ x^2y^2 = \dfrac{1}{4} \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 = \dfrac{1}{2} \\ y^2 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

~~Ответ: $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.~~

$\begin{cases} x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

Ответ: $\left(\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

211005930 (U92363 M1274191)

5. Всего есть 5 случаев для 2 точек A и B:

1. $A \in y=x$; $B \in y = 63-x \rightarrow \underset{\text{для т. } A}{62} \cdot \underset{\text{для т. } B\text{, 2 точки исключены}}{60}$

2. $A \in y=x \rightarrow \underset{\text{т. } A}{62} \cdot (\underset{\substack{\text{т. } B \\ \text{все, кроме:}}}{62^2} - (\underset{\substack{\text{диагонали} \\ y=x}}{62} + \underset{\text{горизонтали}}{61} + \underset{\text{вертикали}}{61} + \underset{\substack{\text{диагонали} \\ y=63-x\text{,} \\ \text{2 т. уже посчитаны}}}{60}))$

3. $A \in y=63-x \rightarrow 62 \cdot (62^2 - 61 \cdot 4)$ ← аналогично

4. $A \in y=x$, $B \in y=x \rightarrow \frac{62 \cdot 61}{2}$ ← C из 62 по 2

5. $A \in y=63-x$, $B \in y=63-x \rightarrow \frac{62 \cdot 61}{2}$ ← аналог.

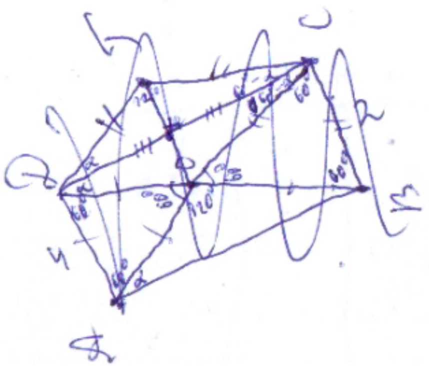
Итого: $\frac{62 \cdot 61}{2} \cdot 2 + 62 \cdot 60 + 2 \cdot 62 \cdot (62^2 - 4 \cdot 61) =$

$= 62 \cdot 121 + 124 \cdot (62^2 - 244) = 62 \cdot 121 + 124 \cdot 3600 =$

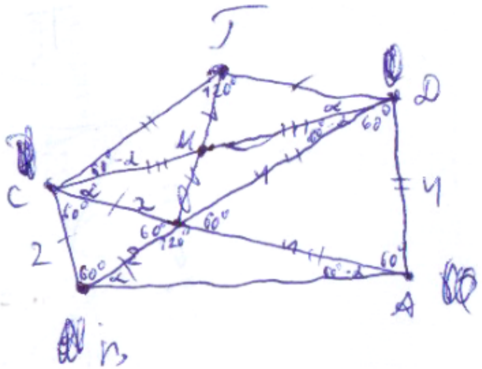
$= 7502 + 446400 = 453902$

стр. 5

т.к. T симм. отн. O сер. CD,
OM = MT, CM = MD → CTDO-паралл.
∠TDC = ∠DCA, ∠TCD = ∠CDB.



6.



1. ABCD - впис., т.к. ∠ADB = ∠ACB = 60°, как опир. на одну хорду
T ∈ окр. опис. около ABCD, т.к. ∠DAC = 60°, ∠DTC = 120°, ∠DAC + ∠DTC = 180°, лежат по разные стороны от DC.

Рассм. △ATB: ∠ATB = ∠ACB = 60°
∠TAB = ∠TDB = 60°

→ △ATB - правильный, ч.т.д.

2. $CD = BA = \sqrt{2^2+4^2-2\cdot 2\cdot 4\cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{4+16+8} = 2\sqrt{7}$

$p = \frac{2+4+2\sqrt{7}+2\sqrt{7}}{2} = 3+2\sqrt{7}$

$S_{ABCD} = \sqrt{(3+2\sqrt{7}-2)(3+2\sqrt{7}-4)(3+2\sqrt{7}-2\sqrt{7})\cdot(3+2\sqrt{7}-2\sqrt{7})} = \sqrt{(2\sqrt{7}+1)(2\sqrt{7}-1)\cdot 3\cdot 3} = 3\cdot 3\cdot\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$

$S_{ABT} = \frac{(2\sqrt{7})^2\sqrt{3}}{4} = 7\sqrt{3}$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{7\sqrt{3}}{9\sqrt{3}} = \frac{7}{9}$

211005930 (U92363 M1274191)

$$\frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4}$$
$$2x^4 + 2y^4 + 5x^2y^2 = \frac{9}{4}$$

$x^2 = a$

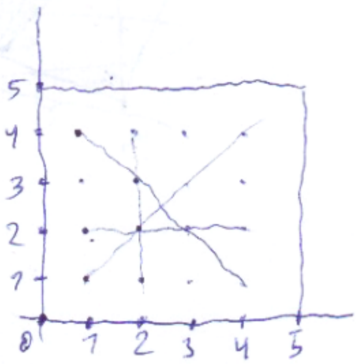
$y^2 = b$

$$\begin{cases} \frac{1}{a+b} + ab - \frac{5}{4} = 0 \\ 2a^2 + 5ab + 2b^2 - \frac{9}{4} = 0 \end{cases}$$

$$(2a+b)(2b+a) = \frac{9}{4}$$

$u = a+b,\ v = ab$

$$\frac{1}{u} + v = \frac{5}{4}$$
$$2u^2 + v = \frac{9}{4}$$



$$2u^2 - \frac{1}{u} = 1$$

$$2u^3 - u - 1 = 0$$

$2u^3 + 0u^2 - u - 1 \mid u-1$

$2u^3 - 2u^2 \qquad 2u^2+2u+1$

$2u^2 - u$

$2u^2 - 2u$

$u - 1$

$u - 1$

0

$1: x$

$2: \varnothing$

$\cancel{62 \cdot (62^2 - 3 \cdot 61)}$

$4 \longleftrightarrow 62$

$(2u^2+2u+1)(u-1)$

1. $A \in x;\ B \in 63-x \ \to\ 62 \cdot 60$
2. $A \in x;\ B \in \varnothing \ \to\ 62 \cdot (62^2 - (1+61+61+60+61))$
3. $A \in 63-x;\ B \in \varnothing \ \to\ 62 \cdot (62^2 - (1+61+61+60+61))$
4. $A \in x;\ B \in x \ \to\ \frac{62 \cdot 61}{2}$
5. $A \in 63-x;\ B \in x \ \to\ \frac{62 \cdot 61}{2}$

$$= 62 \cdot 61 + 62 \cdot 60 + 2 \cdot 62 \cdot (62^2 - 4 \cdot 61) =$$
$$= 62 \cdot 121 + 124 \cdot (62^2 - 244)$$

62×62: 124, 3720, 3844

$3844 - 244 = 3600$

121×62: 242, 7260, 7502

124×3600: 744, 3720, 446400

$446400 + 7502 = 453902$