Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211005865**

ID профиля: **869238**

Вариант 12

Иистовин

(1)

№2

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$

ОДЗ: $x \in [1;4]$

т.к. $x+1 \geq 0$ и $4-x \geq 0$

Заметим, что

$\sqrt{4+3x-x^2} = \sqrt{x-4} \cdot \sqrt{x+1}$

~~Т~~акие,

$(-\sqrt{4-x} + \sqrt{x+1})^2 = x+1+4-x-2\sqrt{x+1}\sqrt{4-x} = 5-2\sqrt{x+1}\sqrt{4-x}$

~~Т~~огда

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + \overset{3}{\cancel{6}} - 2\sqrt{4+3x-x^2} = 0$

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 5 - 2\sqrt{4-x}\sqrt{x+1} = 2$

$(\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x}) + (\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x})^2 = 2$

Сделаем замену: пусть $\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} = y$

~~Т~~огда имеем:

$y^2 + y - 2 = 0$

$D = 1+8 = 9$

$y_1 = \frac{-1+3}{2} = 1$

$y_2 = \frac{-1-3}{2} = -2$

1) $y = 1$, тогда $\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} = 1$

$\sqrt{x+1} = 1 + \sqrt{4-x}$ возведём в квадрат

$x+1 = 1+4-x+2\sqrt{4-x}$

$2x-4 = 2\sqrt{4-x}$

$x-2 = \sqrt{4-x}$ возведём в квадрат

$x^2-4x+4 = 4-x$

$x^2-3x = 0$

$x(x-3) = 0$

~~Тогда~~ имеем: Чистовик (2)

$$\left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=0 \end{array}\right.$$

Сделаем проверку:

а) $x=3$

$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}=\sqrt{4}-\sqrt{1}=1$

б) $x=0$

$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}=\sqrt{1}-\sqrt{4}\neq 1$

Откуда, $x=3$ ~~единственное~~ решение

2) $\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}=-2$

$\sqrt{x+1}+2=\sqrt{4-x}$ ~~(откуда~~ возведем в квадрат

$x+1+4+4\sqrt{x+1}=4-x$

$-(2x+1)=4\sqrt{x+1}$, откуда следует, что $2x+1\leq 0$ (т.к. $4\sqrt{x+1}\geq 0$)

$x\leq -\frac{1}{2}$

· возведём в квадрат:

$4x^2+4x+1=16x+16$

$4x^2-12x-15=0$

$\frac{D}{4}=36+60=96=16\cdot 6$

$x_1=\frac{6+4\sqrt{6}}{4}=\frac{3+2\sqrt{6}}{2}$

$x_2=\frac{6-4\sqrt{6}}{4}=\frac{3-2\sqrt{6}}{2}$

x_1 не удовл. т.к. $x_1>0$ $\left(\frac{3+2\sqrt{6}}{2}>0\right)$

Проверим x_2:

$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}=\sqrt{\frac{3-2\sqrt{6}+2}{2}}-\sqrt{\frac{8-(3-2\sqrt{6})}{2}}=\sqrt{\frac{5-2\sqrt{6}}{2}}-\sqrt{\frac{5+2\sqrt{6}}{2}}=\sqrt{\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{2}}-$

$-\sqrt{\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{2}}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=-2$

Откуда, $x=\frac{3-2\sqrt{6}}{2}$ – решение.

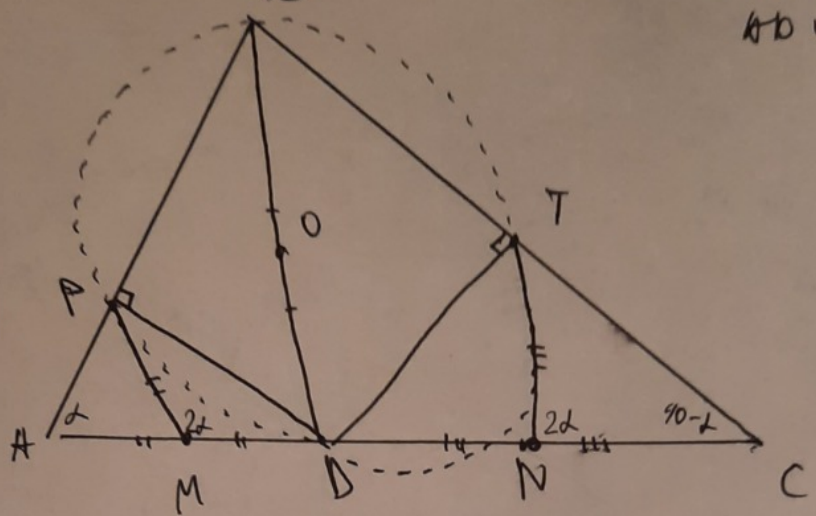
Ответ: $3;\ \frac{3-2\sqrt{6}}{2}$

Игнатович

№1

Дано: $\triangle ABC$, $\omega(O; OB)$, M, N - середины AD и DC соотв.

а)



Решение

$\angle BPD = \angle BTD = 90°$, т.к. $\angle BPD$ и $\angle BTD$ вписанные и опирающиеся на диаметр BD.

Пусть $\angle TNC = 2\alpha$, тогда $\angle PMD = 2\alpha$, т.к. $TN \parallel PM$ и $\angle TNC$ и $\angle PMD$ при одной секущей CA.

Т.к. $\triangle DTC$ прямоугольный и TN медиана провед. к гипотенузе, то $TN = NC$.

Аналогично $PM = MA$, т.к. $\triangle PAD$ прямоуг. и PM-медиана к гипотенузе.

~~$\angle CAT =$~~ т.к. $\triangle CNT$ равнобедренный, $\angle TCN = \angle CTN =$
$$= \frac{180° - \angle TNC}{2} = 90° - \frac{2\alpha}{2} = 90° - \alpha$$

т.к. $\triangle PMA$ равнобедренный, ~~так~~ а PMD - внешний угол вершины, то ~~$\angle PAM$~~ $\angle MPA = \angle PAM = \frac{\angle PMD}{2} = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$

$\angle ABC = 180° - \angle TCN - \angle PAM = 180° - (90 - \alpha) - \alpha = 90°$

Ответ: $90°$

Чистовик

(1)

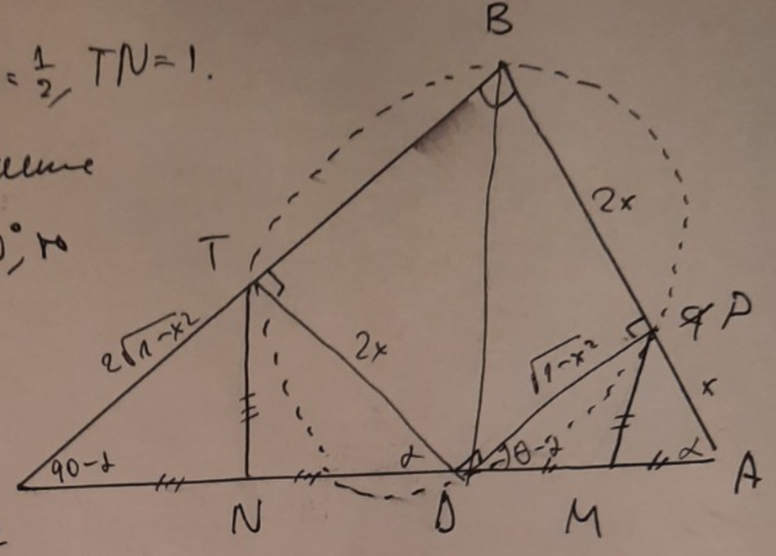
№1

б) ~~Ответ.~~

~~Пусть~~ если $BD = \frac{4}{3}$, $PM = \frac{1}{2}$, $TN = 1$.

Решение.

Т.к. в четырёхугольнике $BTPD$ 3 угла по 90°, то $\angle PDT$ тоже 90°, т.о. $BPDT$ – прямоугольник.



Тогда $TD = BP$ и $PD = BT$.

$\triangle CTD \sim \triangle DPA$ по 3-м углам, тогда

$$\frac{CD}{DA} = \frac{CT}{PD} = \frac{TD}{PA} = \frac{2\cdot TN}{2\cdot PM} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{1}.$$

Пусть $PA = x$. Тогда $PD = \sqrt{1-x^2}$, т.к. по т. обратной т. Пифагора в $\triangle PAD$: $PA^2 + PD^2 = AD^2$

$x^2 + PD^2 = \left(2\cdot\frac{1}{2}\right)^2$

$PD^2 = 1 - x^2$.

Тогда $TC = 2PD = 2\sqrt{1-x^2}$ ~~(из подобия)~~ и $TD = 2PA = 2x$ (из подобия $\triangle CTD$ и $\triangle DPA$).

Рассмотрим $\triangle BPD$. $BP = TD = 2x$, т.к. $BPDT$ прямоугольник, $PD = \sqrt{1-x^2}$ и $\angle BPD = 90^\circ$, также по условию $BD = \frac{4}{3}$. Тогда по т. Пифагора:

Чистовик

⑤

$BD^2 = BP^2 + PD^2$

$\left(\frac{4}{3}\right)^2 = 4x^2 + 1 - x^2$

$3x^2 = \frac{16}{9} - 1$

$x^2 = \frac{7}{27}$

$x^2 = \frac{21}{81}$

$x = \frac{\sqrt{21}}{9}$

~~Тогда~~ $S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot BA = \frac{1}{2} \cdot (BP + PC)(BP + PA) =$

$= \frac{1}{2}(PD + PC)(PD + PA) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1-x^2} + 2\sqrt{1-x^2}\right)(2x + x) =$

$= \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot \sqrt{1-x^2} \cdot x = \frac{9}{2} \cdot \frac{\sqrt{21}}{9} \cdot \sqrt{1 - \frac{21}{81}} = \frac{\sqrt{21}}{2} \cdot \frac{\sqrt{81-21}}{9} = \frac{\sqrt{21} \cdot \sqrt{60}}{18} =$

$= \frac{\sqrt{7 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 3}}{18} = \frac{6\sqrt{35}}{18} = \frac{\sqrt{35}}{3}$

Ответ: $\frac{\sqrt{36}}{3}$

211005865 (U869238 M1276752)

Чистовик

(6)

№3

$ax^2+4a^2x-ay+4a^3+2=0$

~~иначе~~

$ay=ax^2+4a^2x+4a^3+2$

$a\neq0$, иначе имеем: $0=2$ – неверно.
т.к. $a\neq0$, поделим всё на a,

$y=x^2+4ax+4a^2+\frac{2}{a}$

$y=(x+2a)^2+\frac{2}{a}$

Тогда $x_b=-2a$, $y_b=\frac{2}{a}$, следовательно $B(-2a;\frac{2}{a})$

Теперь рассмотрим первое ур-ние:

$2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+6y^2=0$

Рассмотрим его, как квадратное относительно x.
Т.к. у точки А координаты определяются этим ур-нием, то хотя бы 1 решение (когда мы воспринимаем его, как квадратное относительно x) существует. ~~Тогда~~:

$\frac{D}{4}=(y-a)^2-1\cdot(2a^2-6ay+6y^2)=y^2-2ay+a^2-2a^2+6ay-6y^2=$
$=-a^2+4ay-4y^2=-(a-2y)^2\geq0$

Единственное решение даного нер-ва – ($a=2y$).
Иначе $(a-2y)^2>0$ и $-(a-2y)^2<0$.

~~Теперь~~ аналогично рассмотрим ур-ние:

$2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+6y^2=0$

~~относительно~~ как квадратное, относительно y.

Чистовик

Ответ нет, т.к. координата т. A по y определяется этим ур-нием, то хотя бы 1 решение существует.

~~Когда~~

$$\frac{D}{4} = (x-3a)^2 - 5(2a^2 - 2ax + x^2) = x^2 + 9a^2 - 6ax - 5x^2 - 10a^2 + 10ax =$$

$$= -4x^2 - a^2 + 4ax = -(2x-a)^2 \geq 0$$

Единственное решение данного нер-ва — $(2x = a)$. Иначе квадрат разности будет больше 0, а минус квадрат разности строго меньше 0.

Т.о. $\begin{cases} 2x = a \\ 2y = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{2} \\ y = \frac{a}{2} \end{cases}$

Тогда координаты точки A: $\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$

~~Т~~еперь определим, когда обе точки находятся в одной полуплоскости относительно прямой $x+y=3$.

Очевидно, что ~~ур-ние~~ нер-во $x+y>3$ ~~определяет~~ задаёт полуплоскость выше прямой $x+y=3$. Тогда если точки A и B лежат выше данной прямой, то они лежат и в полуплоскости выше прямой, т.е.

$$\begin{cases} \frac{a}{2} + \frac{a}{2} > 3 \\ -2a + \frac{2}{a} > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 3 \\ 0 > \frac{3a + 2a^2 - 2}{a} \end{cases}$$

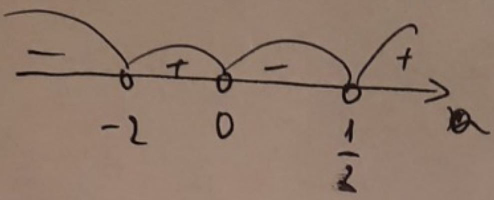
Решим 2-ое нер-во системы:

Чистовик

$$0 > \frac{2a^2+3a-2}{a}$$

$$0 > \frac{(2a-1)(a+2)}{a}$$

Методом интервалов:



нули в точках $-2; 0; \frac{1}{2}$

Тогда $a \in (-\infty; -2) \cup (0; \frac{1}{2})$

Тогда возвратимся к системе:

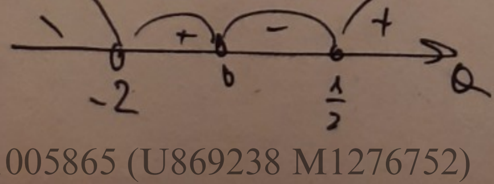
$$\begin{cases} a > 3 \\ a \in (-\infty; -2) \cup (0; \frac{1}{2}) \end{cases}$$

данная система не имеет решений.

Теперь рассмотрим нер-во $x+y<3$. Оно задает полуплоскость ниже прямой $x+y=3$, а значит условие, что точки A и B лежат ниже прямой эквивалентно следующей системе:

$$\begin{cases} \frac{a}{2} + \frac{a}{2} < 3 \\ -2a + \frac{2}{a} < 3 \end{cases} \iff \begin{cases} a < 3 \\ 0 < \frac{3a+2a^2-2}{a} \end{cases}$$

Решим второе нер-во системы методом интервалов: $0 < \frac{(2a-1)(a+2)}{a}$, нули в точках $-2; 0; \frac{1}{2}$



Чистовик

(9)

Тогда $a \in (-2; 0) \cup (\frac{1}{2}; +\infty)$

вернёмся к системе:

$$\begin{cases} a < 3 \\ a \in (-2; 0) \cup (\frac{1}{2}; +\infty) \end{cases}$$

Решением данной системы является следующее:

$a \in (-2; 0) \cup (\frac{1}{2}; 3)$

Ответ: $a \in (-2; 0) \cup (\frac{1}{2}; 3)$

Черновик

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2} = 2\sqrt{4-x}\sqrt{x+1}$

ОДЗ $x \in [-1; 4]$

$4+3x-x^2 \geq 0$

$0 \geq x^2-3x-4$

$D = 9+4\cdot 4 = 25$

$x = \frac{3\pm 5}{2} = 4$

$= -1$

$x^2-3x-4 = (x+1)(x-4)$

~~a−b+3=2ab~~

$4-x+x+1=5$

$4-x+x+1+2\sqrt{\ }\sqrt{\ } = (\sqrt{4-x}+\sqrt{x+1})^2$

$(\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}) + (\sqrt{4-x}-\sqrt{x+1})^2 = 2$

$-\sqrt{4-x}+\sqrt{x+1} = y$

$y^2+y-2=0$

$D = 1+4\cdot 2 = 9$

$y = \frac{-1\pm 3}{2} = 1$

$= -2$

1) $\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} = 1$

$\sqrt{x+1}^2 = 1+\sqrt{4-x}$

$x+1 = 1+4-x+2\sqrt{4-x}$

$2x-4 = 2\sqrt{4-x}$

$x-2 = \sqrt{4-x}$ $\cancel{(x\geq 2)}$

$x^2-4x+4 = 4-x$

$x^2-3x=0$

$x(x-3)=0$

$x=3$ или $x=0$

проверка:

$x=3$

$\sqrt{4}-\sqrt{1}=1$ +

$x=0$

$\sqrt{1}-\sqrt{4}=1$ −

2) $\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}=-2$

$\sqrt{x+1}+2=\sqrt{4-x}$

$x+1+4+4\sqrt{x+1}=4-x$

$2x+1+4\sqrt{x+1}=0$

$4\sqrt{x+1}=-1-2x$

$16x+16=1+4x^2+4x$

$4x^2-8x-15=0$

$\frac{D}{4}=16+15\cdot 4=76=4\cdot 19$

$\cancel{\sqrt{x+1}\geq 0}$

$\cancel{\sqrt{4-x}\leq\sqrt{5}}$

$x=\frac{4\pm 2\sqrt{19}}{4} = \cancel{2} 1\pm\frac{\sqrt{19}}{2}$

Проверка: $x=1+\frac{\sqrt{19}}{2}$, $\sqrt{2+\frac{\sqrt{19}}{2}}-\sqrt{\ }$

~~$\sqrt{x+}$~~ $\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}=-2$ Черновик (2)

$\sqrt{x+1}+2=\sqrt{4-x} \Rightarrow \sqrt{4-x}\geq 2$

$4-x\geq 4$

$0\geq x$

$x+1+4+4\sqrt{x+1}=4-x$

$2x+1+4\sqrt{x+1}=0$

$4\sqrt{x+1}=-1-2x$, $-1-2x\geq 0$

$-\frac{1}{2}\geq x$

$16x+16=1+4x^2+4x$

$4x^2$ ~~-8~~ $-12x-15=0$

$\frac{D}{4}=36+15\cdot 4=96=4\cdot 24=16\cdot 6$

$x=\frac{6\pm 4\sqrt{6}}{4}=\frac{3\pm 2\sqrt{6}}{2}$, $\frac{3+2\sqrt{6}}{2}$ — т.к. >0

1) ~~$3+2$~~

~~$x+1$~~

$x=\frac{3-2\sqrt{6}}{2}$

$\frac{3-2\sqrt{6}}{2}\leq -\frac{1}{2}$?

$4\leq 2\sqrt{6}$ +

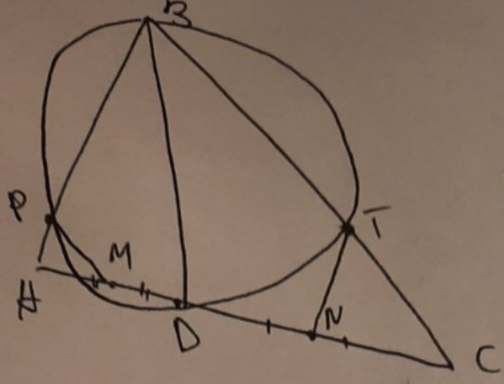
$\sqrt{x+1}=\sqrt{\frac{5-2\sqrt{6}}{2}}=\sqrt{\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{2}}$

$\sqrt{4-x}=\sqrt{\frac{8-3+2\sqrt{6}}{2}}=\sqrt{\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{2}}$

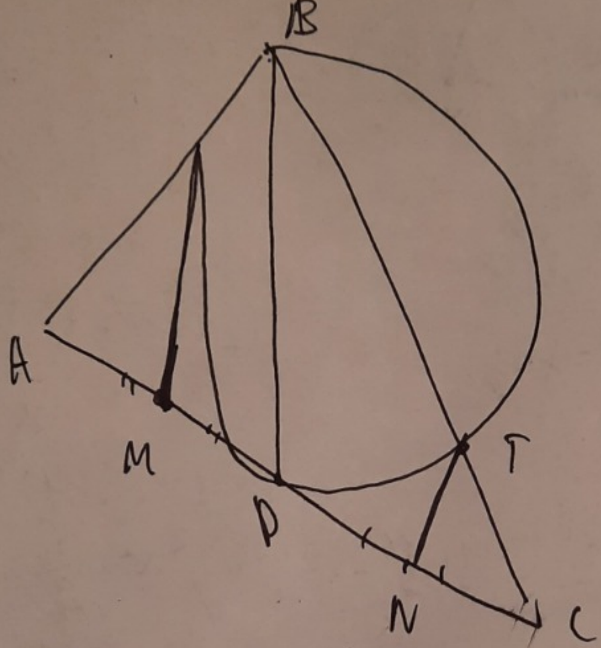
$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ +

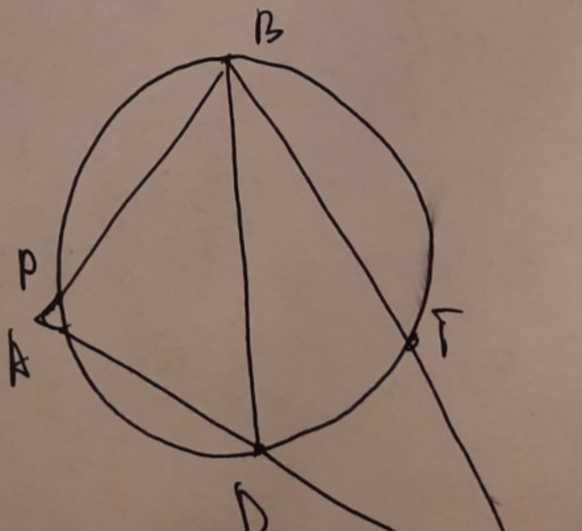
211005865 (U869238 M1276752)

Черновик

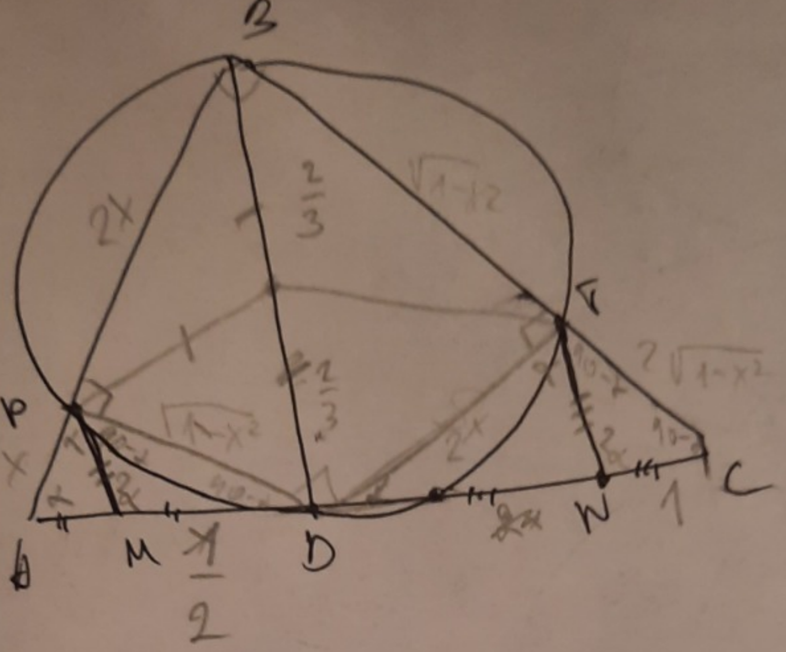


$PM \parallel TN$

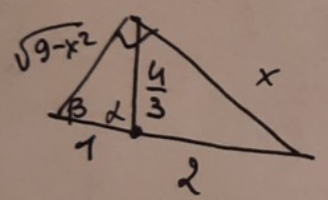




Черновик 4



S_{ABC}



$9 = x^2 + y^2$

$$\cos\alpha = \frac{\frac{16}{9} + 1 - 9 + x^2}{\frac{8}{3}} = \frac{4 + \frac{16}{9} - x^2}{\frac{16}{3}}$$

$$\left(\frac{16}{9} + 1 - 9 + x^2\right) 2 = 4 + \frac{16}{9} - x^2$$

$$\frac{16}{9} \cdot 2 - 16 + 2x^2$$

$$3x^2 + \frac{16}{9} - 20 = 0$$

$$27x^2 + 16 - 180 = 0$$

$$\frac{\sqrt{9-x^2}}{\sin\alpha} = \frac{\frac{4}{3}}{\sin\beta}$$

$$\cancel{\left(\frac{3x}{2\sqrt{2x}}\right)^2 + \left(3\sqrt{1-x^2}\right) = 9}$$

$$1 - x^2 + 4x^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$$

$$3x^2 = \frac{7}{9}$$

$$x = \frac{\sqrt{21}}{9}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot 3\sqrt{1-x^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{21}}{8} \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{81-21}}{9} =$$

$$= \frac{\sqrt{21} \cdot \sqrt{60}}{18}$$

211005865 (U869238 M1276752)

Черновик

5.

№3.

$2a^2 - 2ax - 6ay + x^2 + 2xy + 5y^2 = 0$ — координаты точки A

$ax^2 + 4a^2x - ay + 4a^3 + 2 = 0$ — парабола с вершиной B

все значения параметра a, что A и B по одну сторону от $x+y=3$

$x_B = \cancel{\ldots}$

$ay = ax^2 + 4a^2x + 4a^3 + 2$ $\quad a \neq 0$ иначе не парабола.

$y = x^2 + 4ax + 4a^2 + \frac{2}{a} = (x+2a)^2 + \frac{2}{a}$

$x_B = -2a, \quad B(-2a; \frac{2}{a})$

$2a^2 - 2ax - 6ay + x^2 + 2xy + 5y^2 = 0$

$(a-x)^2 + (a-3y)^2 + 2xy - 4y^2$

$D = (\frac{2y-2a}{4})^2 - (2a^2 - 6ay + 5y^2) =$

$= y^2 + a^2 - 2ay - 2a^2 + 6ay - 5y^2 =$

$= -a^2 - 4y^2 + 4ay = -(a-2y)^2 \geq 0$

$\frac{D}{4} = (x-3a)^2 - 5(2a^2 - 2ax + x^2) = x^2 + 9a^2 - 6ax - 10a^2 + 10ax - 5x^2 = -4x^2 - a^2 + 4ax = -(a-2x)^2 \geq 0$

$a = 2y$ и $a = 2x \Rightarrow x = y = \frac{a}{2}$ $\quad A(\frac{a}{2}; \frac{a}{2})$

211005865 (U869238 M1276752)

Черновик

6.

$A(\frac{a}{2}; \frac{a}{2})$

$B(-2a; \frac{2}{a})$

$x+y=3$

$y=3-x$

1) $\begin{cases} x_a+y_a<3 \\ x_b+y_b<3 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_a+y_a>3 \\ x_b+y_b>3 \end{cases}$

1) $\frac{a}{2}+\frac{a}{2}=a<3$

$-2a+\frac{a}{2}=\frac{a-4a}{2}=-\frac{3a}{2}<3 \Rightarrow \cancel{-3a<6}$

$-a<2$

$a>-2$

$a\in(-2;3)$

2) $a>3$

$-\frac{3a}{2}>3$

$-a>2$

$a<-2$ нет р.

1) $\frac{a}{2}+\frac{a}{2}=a>3$

$-2a+\frac{2}{a}>3$

$\cancel{-2a^2}$

$0>\frac{3a-2+2a^2}{a}$

$0>\frac{2(a+2)(a-\frac{1}{2})}{a}$

$0>\frac{(a+2)(2a-1)}{a}$

$2a^2+3a-2$

$-2=\frac{-4}{2}; \frac{1}{2}$

$-\quad -2 \quad + \quad 0 \quad - \quad \frac{1}{2} \quad +$

$a\in(-\infty;-2)\cup(0;\frac{1}{2})$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211005865**

ID профиля: **869238**

Вариант 12

Чистовик

1

№4

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} = \frac{5}{4} - x^2y^2 \\ 2(x^2+y^2)^2 - 1 = \frac{5}{4} - x^2y^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x^2+y^2} = 2(x^2+y^2)^2 - 1$$

пусть $x^2+y^2 = a$, тогда $(a \neq 0)$

$$\frac{1}{a} = 2a^2 - 1$$

$$2a^3 - a - 1 = 0$$

$$(a-1)(2a^2+2a+1) = 0$$

$2a^2+2a+1 > 0$ т.к.

$D = 4 - 4\cdot 2 < 0$ и коэф. при a^2 положительный,

значит единственное решение — $(a=1)$

Тогда

$1 = a = x^2+y^2$

имеем:

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 1 - x^2 \\ \frac{1}{1} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 1 - x^2 \\ x^2y^2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Значит $x^2(1-x^2) = \frac{1}{4}$

$$x^4 - x^2 + \frac{1}{4} = 0$$

$$\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

$$x^2 = \frac{1}{2}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

т.к. $y^2 = 1 - x^2$, то $y^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

Ответ: $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}; \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$; $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}; -\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$; $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}; \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$; $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}; -\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$

Чистовик

№ 6

~~Заметим~~ Т.к. рассматривать границы не надо, будем решать задачу для квадрата 62×62, в котором можно выбирать все узлы.

Заметим, что прямые $y = x$ и $y = 63 - x$ являются диагоналями как исходного, так и нового квадрата.

Заметим также, что во всех строках и столбцах, а также в ~~диаг~~ главных диагоналях, заданных данными прямыми по 62 узла (у диагоналей нет общего узла в точке пересечения т.к. если $x = 63 - x$, то $x = \frac{63}{2}$, т.е. у точки пересечения диагоналей нецелый x, а значит это не узел сетки).

~~Т~~еперь посчитаем кол-во способов выбрать 2 узла так, чтобы только 1 узел принадлежал какой-нибудь 1 диагонали, а 2 не принадлежал ни одной у них. (K)

Рассмотрим любую точку на диагонали, ~~точку~~ узел A. Количество ~~точек~~ узлов не принадлежащих ни одной диагонали равно $62^2 - 2 \cdot 62$.

Т.к. 2 узла не могут лежать на ~~ор~~ прямой параллельной оси, то вместе с ~~точкой~~ узлом A

Чистовик (3)

нельзя выбрать $(62-1)\cdot 2$ ~~точек~~ узлов, лежащих с узлом А в одной строке или в одном столбце.

Заметим, что из этих $(62-1)\cdot 2$ ~~точек~~ узлов ровно 2 лежат на диагоналях (т.к. любая прямая параллельная осям координат пересекает либо 2 диагонали, либо ни одну из них, если лежит вне квадрата).

Тогда для узла А, кол-во ~~точек~~ узлов, которые ~~можно выбрать~~ не лежат ни на одной из диагоналей и не лежат на прямой параллельной осям равно:

$$\underbrace{62^2-2\cdot 62}_{1}-\big(\underbrace{(62-1)\cdot 2}_{2}-2\big).$$ в части 2 надо откинуть 2,

иначе 2 ~~точки~~ узла, лежащие с А на одной ~~верти~~ прямой параллельной оси, и принадлежащие диагонали посчитаны и в части 1 и в части 2.

$(\underbrace{\quad}_{1})$ $(\underbrace{\quad}_{2})$

Т.к. точек на диагоналях $62\cdot 2$, то

$$K=\big(62^2-2\cdot 62-\big((62-1)\cdot 2-2\big)\big)\cdot 62\cdot 2.$$

Ни одну пару мы не посчитали дважды, т.к. каждая пара включает только 1 узел диагонали и каждый раз узлы разные.

Чистовик

~~Т~~еперь посчитаем T – кол-во пар узлов таких, что оба лежат на диагоналях.

Пусть T_1 – кол-во пар узлов, лежащих на одной диагонали. Тогда

$$T_1 = C_{62}^{2} \cdot 2 \text{ (т.к. 2 диагонали по 62 узла)}$$

$$T_1 = \frac{62 \cdot 61}{2} \cdot 2 = 62 \cdot 61$$

Пусть T_2 – кол-во пар узлов, лежащих на разных диагоналях.

$$T_2 = 62 \cdot (62-2)$$

(проходя по каждому узлу диагонали $y=x$ (не нарушая общности), получим, что для каждого из них кол-во ~~точек~~ узлов, образующих пару равно $62-2$ (62 ~~точки~~ узла другой диагонали минус 2 узла в одной вертикали или горизонтали ~~с данной~~ с данным узлом))

Также ни одна пара не посчитана дважды, т.к. каждый раз ~~точка~~ узел диагонали $y=x$ менялся; ~~ни одной~~ посчитаны все пары, т.к. просмотрены все ~~точки~~ узлы диагонали, а ~~их~~ все пары с 2-мя ~~точками~~ узлами на разных диагоналях содержат ровно 1 узел диагонали $y=x$.

Тогда $T = T_1 + T_2 = 62 \cdot 61 + 62 \cdot (62-2)$

Чистовик (5)

Тогда общее кол-во пар равно

$$k+T=\cancel{62^3}\cdot\left(62^2-2\cdot62-((62-1)\cdot2-2)\right)\cdot62\cdot2+$$

$$+62\cdot61+62(62-2)=2\cdot62^3-4\cdot62^2-4\cdot62(62-1)+4\cdot62+$$

$$+62\cdot61+62^2-2\cdot62=2\cdot62^3-3\cdot62^2+62\cdot63-4\cdot62^2+4\cdot62=$$

$$=2\cdot62^3-7\cdot62^2+62\cdot67$$

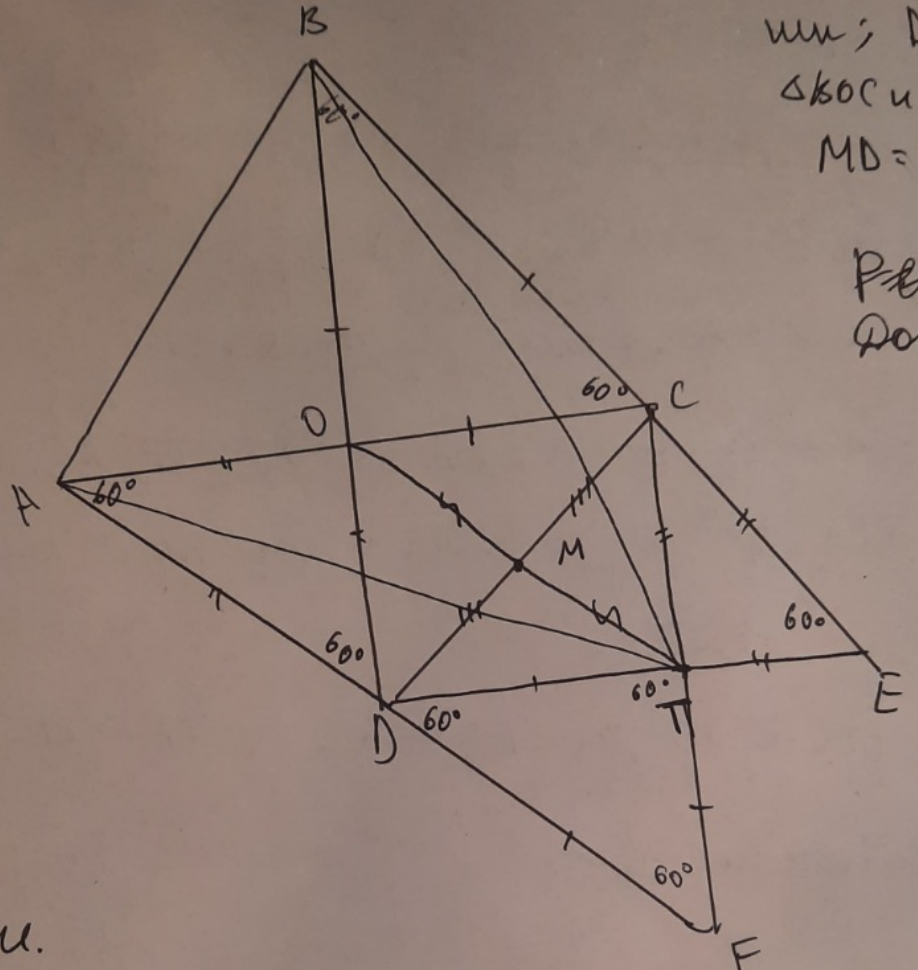
Ответ: $2\cdot62^3-7\cdot62^2+62\cdot67$

Чистовик

6

№6

б)



Дано: ABCD - четырёхугольник; $DB \cap CA = O$; $\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ - правильные; $MD = MC$; $OM = MT$.

~~Решение~~

Доказать: $\triangle ABT$ - правильный

Решение.

Заметим, что OCTD - параллелограмм, т.к. OCTD - четырехугольник, у которого диагонали в точке пересечения делятся пополам. Т.о. $CT = OD$, $DT = OC$, $CA \parallel TD$, $CT \parallel BD$.

Также, можно определить углы этого параллелограмма. $\angle COD = 180° - \angle COB = 180° - 60° = 120°$, тогда $\angle OCT = \angle ODT = 180° - \angle COD = 60°$.

Продлим CT и AD до пересечения в точке F.

$\angle DTF = \angle ACF = 60°$ и $\angle TDF = \angle CAF = 60°$ (т.к. $TD \parallel AC$).

Тогда, $\triangle DTF$ - равносторонний (все углы по 60°). Тогда $TF = DT = DF$ ~~= 60~~.

Чистовик (7)

Аналогично продлим BC и DT до пересечения в точке E. Тогда $\angle CTE = \angle BDT = 60°$ и $\angle TCE = \angle DBE = 60°$ (т.к. $CT \parallel DB$).

Тогда $\triangle ETC$ - равносторонний (3 угла по 60°).

$\triangle ADB = \triangle TEB$ т.к. $AD = TE$, $BD = BE$ и $\angle BDA = \angle BET = 60°$; тогда из равенства треугольников следует, что $AB = BT$.

Аналогично, $\triangle BCA = \triangle TFA$ т.к. $BC = TF$, $AC = AF$ и $\angle BCA = \angle TFA = 60°$; из равенства треугольников следует, что $AB = TA$.

Т.о. доказано, что $AB = BT$ и $AB = TA \Rightarrow AB = BT = TA$ и $\triangle ABT$ - равносторонний.

Ч.Т.Д.

б) $BC = 2$, $AD = 4$. $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$ - ?

$S_{ABCD} = S_{ABO} + S_{BOC} + S_{COB} + S_{AOD} = \cancel{\frac{1}{2} \cdot AD^2 \cdot \sin 60°} +$

$= \frac{1}{2} \cdot \sin 120° \cdot AD \cdot BC + \frac{1}{2} \cdot \sin 60° \cdot BC^2 + \frac{1}{2} \cdot \sin 120° \cdot AD \cdot BC + \frac{1}{2} \cdot \sin 60° \cdot AD^2 =$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}(8 + 4 + 8 + 16) = \sqrt{3} \cdot 9$

Найдём BT из $\triangle BCT$ по т. косинусов:

$BT^2 = BC^2 + CT^2 - 2BC \cdot CT \cdot \cos 120° = 4 + 16 - 2 \cdot \overset{2 \cdot 4}{\cancel{4 \cdot 16}}\left(-\frac{1}{2}\right) = 20 + 8 = 28$

$BT = 2\sqrt{7}$

Тогда $S_{ABT} = \frac{BT^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 7\sqrt{3}$.

Чернови ①

~~$\frac{5}{x^2+y^2}$~~

$\frac{5}{4} - x^2y^2 = \frac{1}{x^2+y^2} = 2(x^2+y^2)^2 - 1$

$x^2+y^2 = a \quad , a \neq 0$

$2a^3 - a - 1 = 0$

$2a^3 - a - 1 \,|\, a-1$

$-2a^3 - 2a^2 \quad | \, 2a^2 + 2a + 1$

$2a^2 - a$

$-2a^2 - 2a$

$a - 1$

$(a-1)(2a^2+2a+1) = 0$

$D = 4 - 8 < 0$ нева

$a = 1 \Rightarrow x^2+y^2 = 1$

$\frac{1}{1} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow x^2y^2 = \frac{1}{4}$

$y^2 = 1 - x^2$

$x^2(1-x^2) = \frac{1}{4}$

$x^2 - x^4$

$4x^4 - 4x^2 + 1 = 0$

$(2x^2-1)^2 = 0$

$2x^2 = 1$

$x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

$\frac{1}{16} \cdot 4 = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{1} + \frac{1}{}$ ~~$\frac{1}{4} \cdot 4 = 1$~~

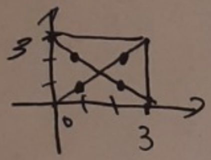
211005865 (U869238 M1276753)

Черновик 2.

$(0;0)$ $(0;63)$ $(63;63)$ $(63;0)$

лучше $\perp$ $y=x$ или $y=63-x$

оба упомянено —— ил |



2. $y=3-x$

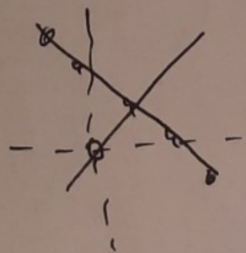
62^2 точек.

вряду 62

$62^2-62-61=$

$4-2-1=1$

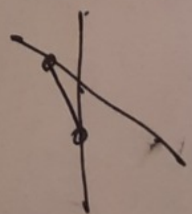
$$\frac{(62^2-\cancel{62}-123)\cdot 62}{2}\cdot 2-$$



$-62\cdot 62=$

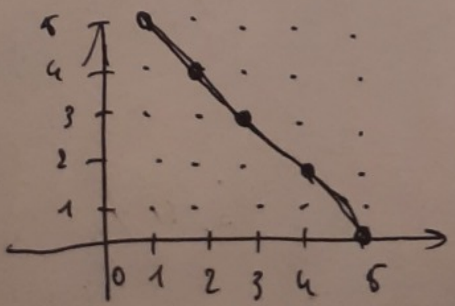
$=62^3-62^2-61\cdot 62-62^2=$

$=62(62^2-61-2\cdot 62)$



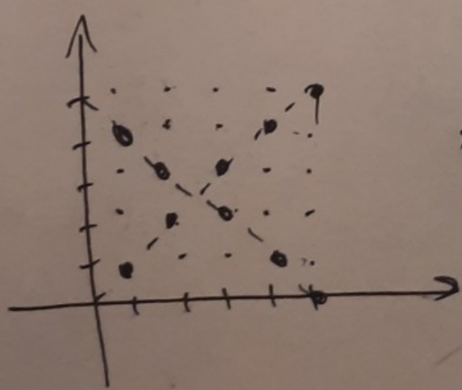
$4(16-3-\underset{}{\overset{8}{2\cdot 4}})=$

$=4\cdot 5=20$



$16-\cancel{8}=\cancel{4}\,8$

$3\cdot 2=6$



Б.

$4+4+4+4+$

$+$

$C_4^2=\frac{4\cdot 3}{2}=6$

$4\cdot 2=8$

Черновик

3.

~~$\times\times\times$~~

63

62×62

$$(62^2 - 1 - 61 - 61 + 2 - 62 - 61) \cdot 62 \cdot 2 +$$

$$+ C_{62}^2 \cdot 2 + 62 \cdot (62 - 2)$$

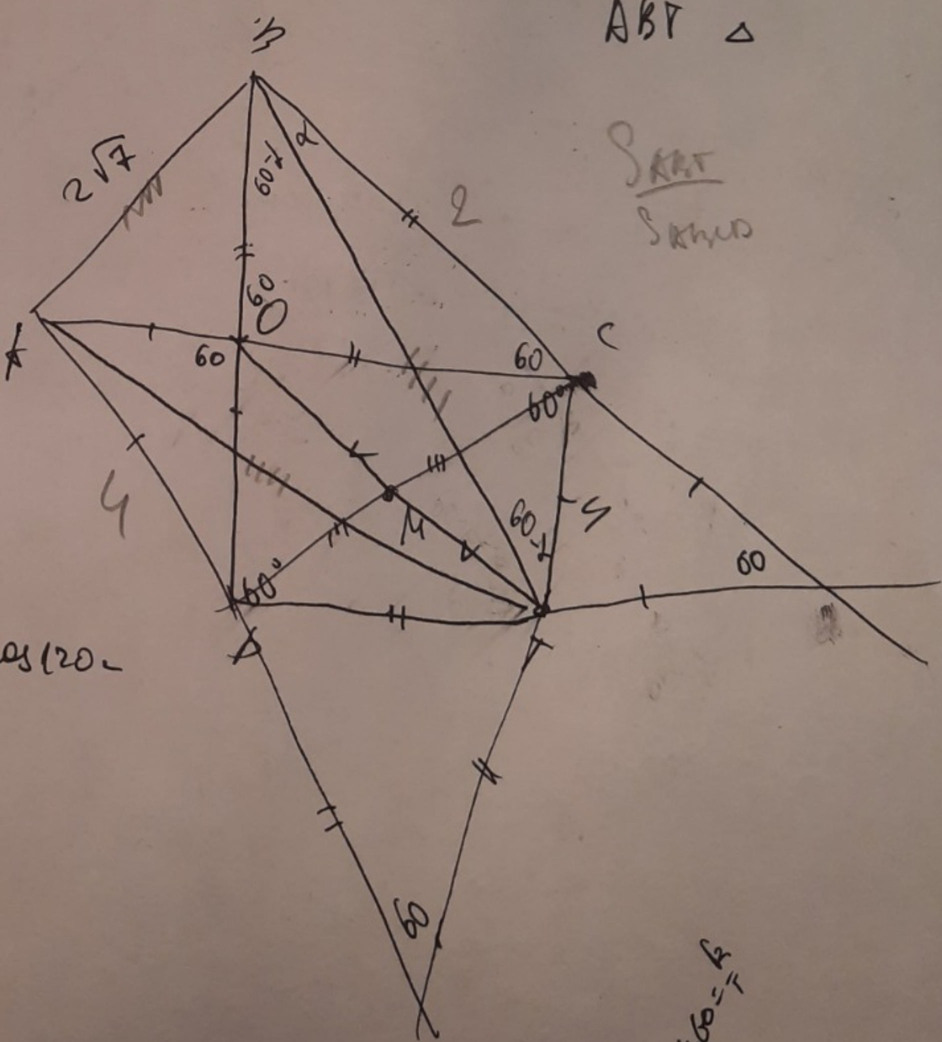
$16 - 1 - 3 - 3 + 2 - 4 - 3 =$

$= 16 - 12 = 4.$

ABГ △

№ 6.

$\frac{S_{ABГ}}{S_{ABCD}}$



$BГ = 16 + 4 - 2 \cdot 4 \cdot 2 \cos 120 =$

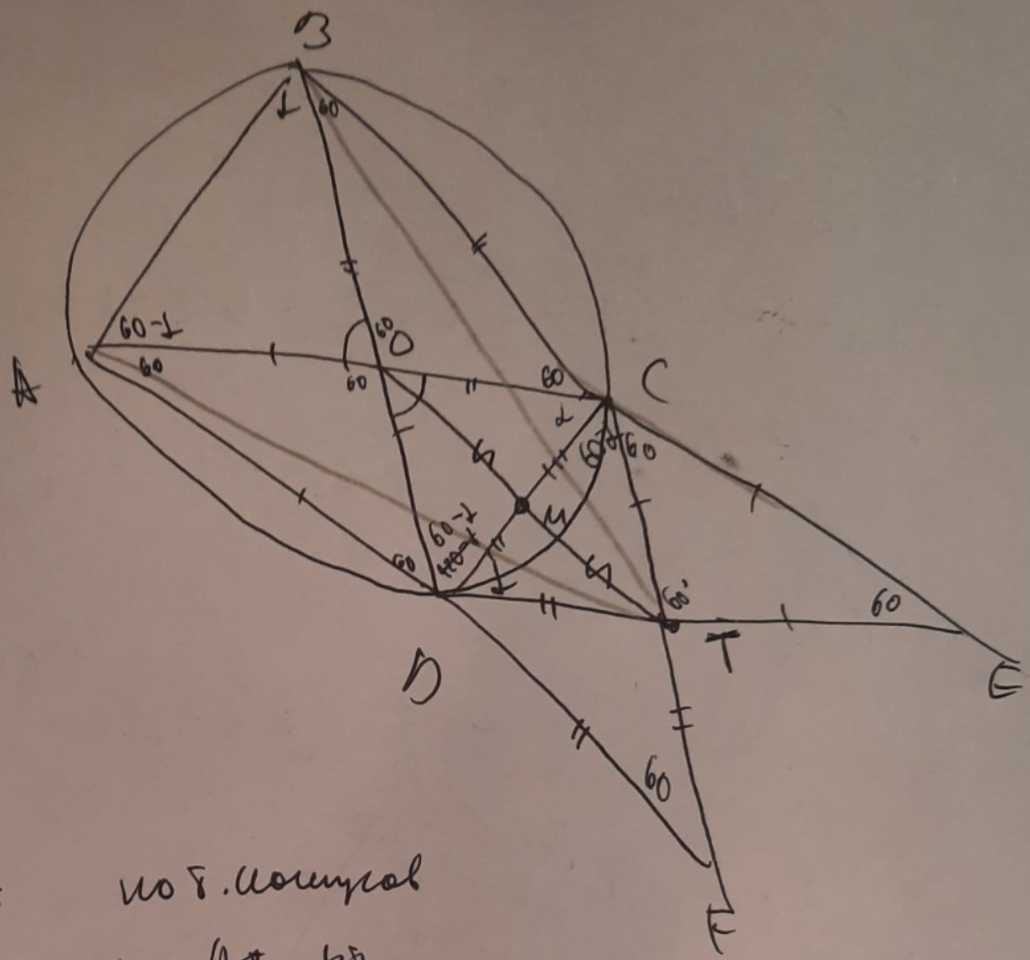
$= 20 + 8 = 28$

$S_{ABГ}.$

$\sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{36}{4} = 9$

Черновик (4)



~~x<y~~

~~$x^2 - x \cdot t = y^2 - y \cdot t$~~ по т. о секущих

~~$(x-y)(x+y) = t(x-y)$~~ $AT = BT$.

$BC = 2$

$AD = 4$

$$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$$

211005865 (U869238 M1276753)

Чистовик (8)

Тогда $\frac{S_{AKBT}}{S_{AKCD}} = \frac{7\sqrt{3}}{9\sqrt{3}} = \frac{7}{9}$

Ответ: $\frac{7}{9}$.