Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211005760**

ID профиля: **812372**

Вариант 12

10 класс №2 вариант 12 часть 1

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$, $x+1 \geq 0$

$4-x \geq 0$

$-x^2+3x+4 = -(x+1)(x-4) = (x+1)(4-x)$ $(x+1)(4-x) \geq 0$

замена переменных $a = x+1$

$b = 4-x$

$\sqrt{a} - \sqrt{b} + 3 = 2\sqrt{ab}$

$\sqrt{a} - \sqrt{b} = 2\sqrt{ab} - 3$

$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = (2\sqrt{ab} - 3)^2$

$a + b - 2\sqrt{ab} = 4ab + 9 - 2 \cdot 2\sqrt{ab} \cdot 3$

$(x+1) + (4-x) - 9 = 4ab - 12\sqrt{ab} + 2\sqrt{ab}$

$-4 = 4ab - 10\sqrt{ab}$

$4ab - 10\sqrt{ab} + 4 = 0$

$2ab - 5\sqrt{ab} + 2 = 0$

замена переменных $t = \sqrt{ab}$

$2t^2 - 5t + 2 = 0$

$D = b^2 - 4ac = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9$

$t = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm 3}{4} = 2; \frac{1}{2}$

1) $\sqrt{ab} = 2$ или 2) $\sqrt{ab} = \frac{1}{2}$

$ab = 4$ или $ab = \frac{1}{4}$

$-x^2+3x+4 = 4$

$x(x-3) = 0$

$x = 0; 3$

$-x^2+3x+4 = \frac{1}{4}$

$x^2 - 3x - \frac{15}{4} = 0$

$D = 9 - 4\left(-\frac{15}{4}\right) = 24$

$x = \frac{3 \pm \sqrt{24}}{2} = \frac{3 \pm 2\sqrt{6}}{2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{6}$

$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \\ (x+1)(4-x) \geq 0 \end{cases}$

$\Updownarrow$

$\begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 4 \end{cases} \Rightarrow x \in [-1; 4] \Rightarrow \begin{cases} x = 0; 3; \frac{3}{2} \pm \sqrt{6} \\ x \in [-1; 4] \end{cases}$

$\frac{3}{2} + \sqrt{6} \vee 4 \quad \left| -\frac{3}{2} \right.$

$\Updownarrow$

$\sqrt{6} \vee \frac{5}{2}$

$\Updownarrow$

$6 < \frac{25}{4} \Rightarrow \frac{3}{2} + \sqrt{6}$ — подходит

$\frac{3}{2} - \sqrt{6} \vee -1 \quad \left| +\sqrt{6} + 1 \right.$

$\Updownarrow$

$\frac{5}{2} \vee \sqrt{6}$

$\Updownarrow$

$\frac{5}{2} > \sqrt{6} \Rightarrow \frac{3}{2} - \sqrt{6}$ — подходит

Ответ: $x = 0; 3; \frac{3}{2} \pm \sqrt{6}$

211005760 (U812372 M1277054)

№1 вариант 12 часть 1

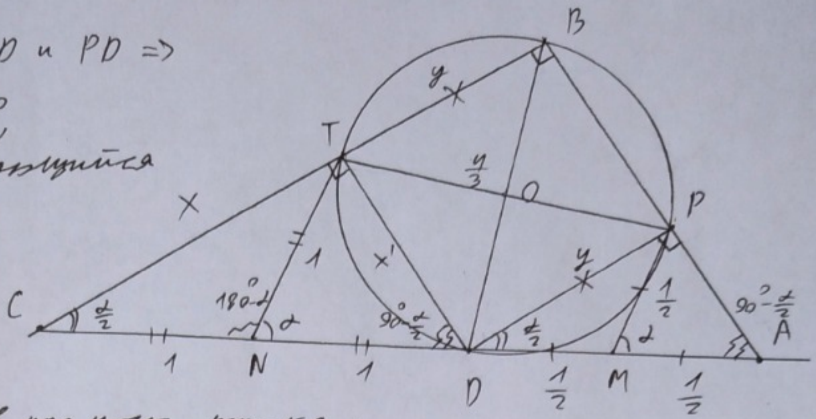
$MP \parallel NT \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle TND = \angle PMA = \alpha$

проведём отрезки TD и PD $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BPD = \angle BTD = 90^\circ$, как впис. угол, опирающийся на диаметр

$\Rightarrow \triangle DTC$ и $\triangle DPA$ – прямоугольные



$\Rightarrow$ по св-ву медианы в прямоуг тр-ке:

1) $\triangle DTC$: $TN = DN = CN$

2) $\triangle DPA$: $PM = DM = AM$

~~[illegible]~~

$\Rightarrow \angle NDT = \angle MAP = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow (TD) \parallel (PA)$

$\left.\begin{array}{l}(TD) \perp (TB) \\ (TD) \parallel (PA)\end{array}\right\} \Rightarrow (TB) \perp (PA) \Rightarrow \angle ABC = 90^\circ$

(б): $MP = \frac{1}{2}$ $NT = 1$ $BD = \frac{4}{3}$

$\left.\begin{array}{l}\angle DTC = \angle APD = 90^\circ \\ \angle CDT = \angle DAP = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle CTD \sim \triangle DPA$

$k = \frac{CD}{DA} = \frac{2NT}{2MP} = \frac{2}{1} = 2$

в четыр-ке $DPBT$ три угла прямые $\Rightarrow \angle TDP$ тоже равен 90°

$(\angle DTB = \angle TBP = \angle BPD = 90^\circ)$

$\Rightarrow DPBT$ – прямоугольник $\Rightarrow TP = BD = \frac{4}{3}$ (как диагональ)

$TD = x'$

пусть $CT = x$, тогда $x = 2y$ (т.к. тр-ки подобны $[\triangle CTD$ и $\triangle DPA$, $k=2]$)

$DP = y$

по т Пифагора в 1) $\triangle CTD$: $x^2 + x'^2 = 2^2$ $\quad x'^2 = 4 - x^2$

2) $\triangle TDP$: $x'^2 + y^2 = \frac{4}{3}^2$

$4 - x^2 + y^2 = \frac{16}{9} \Leftrightarrow 3y^2 = 4 - \frac{16}{9} = \frac{36-16}{9} = \frac{20}{9}$

$y = \frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{15}}{9}$

$\triangle ABC \sim \triangle APD$ (по двум углам) $k = \cancel{[illegible]} = \frac{BC}{PD} = \frac{CT + TB}{y} = \frac{x+y}{y} = \frac{3y}{y} = 3$

$\Rightarrow S_{ABC} = k^2 S_{APD} = k^2 \frac{1}{2} PD \cdot AP = k^2 \frac{1}{2} y \cdot AP = k^2 \frac{\sqrt{15}}{9} AP = \sqrt{15}\, AP$

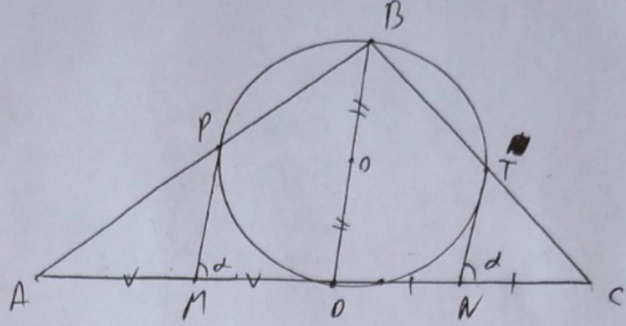
по т Пифагора в $\triangle APD$: $y^2 + AP^2 = 1^2 \Leftrightarrow AP = \sqrt{y^2+1}$

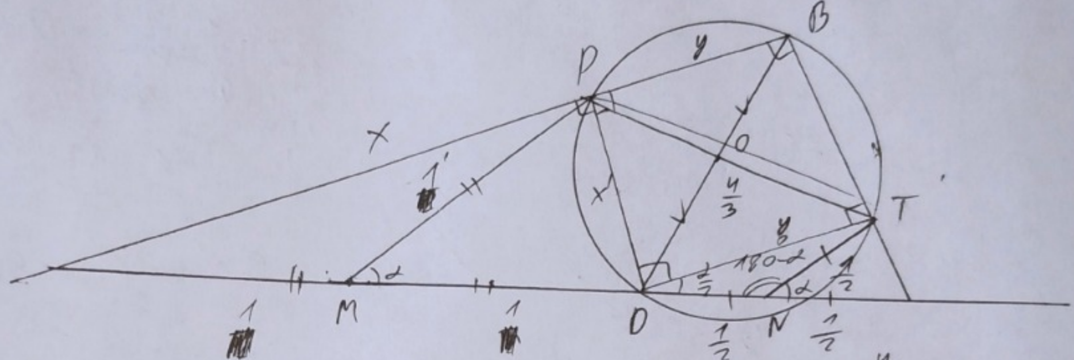
$S_{ABC} = \cancel{[illegible]} = \sqrt{15}\sqrt{\frac{4 \cdot 15}{81} + 1} = \frac{\sqrt{141}\sqrt{15}}{9} = \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}\sqrt{41}}{9} =$

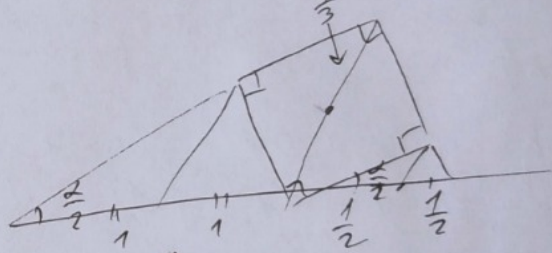
$= \frac{\sqrt{5}\sqrt{41}}{3}$

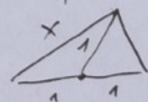
Ответ: а) 90° б) $S_{ABC} = \frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{41}}{3}$

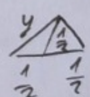
черновик











$x'^2 = 2^2 - x^2$

$4 - x^2 + y^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2$

$4 - 4y^2 + y^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2$

$4 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = 3y^2$

$4 - \frac{16}{9}$

$\frac{36-16}{9} = 3y^2$

$20 = 27y^2$

$\frac{20}{27} = y^2$

$\frac{2\sqrt{5}\sqrt{3}}{9}$ $\frac{2\sqrt{15}}{9}$

$\frac{x}{y} = 2$

$x = 2y$

$\frac{16}{9}$

$60 + 81$

$\frac{141}{81}$

47

120 21

37 - 3

141

12

21

9021

черновик

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$

$\sqrt{a} - \sqrt{b} + 3 = 2\sqrt{ab}$

$\sqrt{a} - \sqrt{b} = 2\sqrt{ab} - 3$

$a + b - 2\sqrt{ab} = 4ab - 12\sqrt{ab} + 9$

$\underbrace{a+b}_{5} - 4ab + 10\sqrt{ab} = 9$

$\sqrt{a} + 3 = 2\sqrt{ab} + \sqrt{b}$

$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 =$

$a - b = 2ab - 3$

~~$a+3 = b(2a+1)$~~

$a - ab = ab + b + 3$

$a(1-b) = b(a+1)$

$5 + 4(x-4)(x+1) - 9$

$4(x^2 - 3x - 4) - 4$

$4x^2 - 12x - 20$

$a+b =$
$= x+1+4-x =$
$= 5$

$x^2 - 3x - 4$

$-4ab + 10\sqrt{ab} = 4\,9$ $\quad 9 - 4\cdot(-4) = 25$

$c = \sqrt{a}$

$4ab - 10$ $d = \sqrt{b}$

$x = \frac{3 \pm 5}{2} = 4; -1$

$4ab - 10\sqrt{ab} + 4 = 0$

$-(x+1)(x-4)$

$100 - 4\cdot 4\cdot(-4) =$

$a = x+1$

$b = 4-x$

$\sqrt{ab} = \frac{10 \pm 6\sqrt{5}}{8}$

$\sqrt{a} - \sqrt{b} + 3 = 2\sqrt{ab}$

$2a^2 - 2ax - 6ay + x^2 + 2xy + 5y^2 = 0$

~~$x^2 + 2xy + 4y^2 \quad 14y^2 - 6ay$~~

~~$+2ax$~~

$ax^2 + 4a^2x - ay + 4a^3 + 2 = 0$

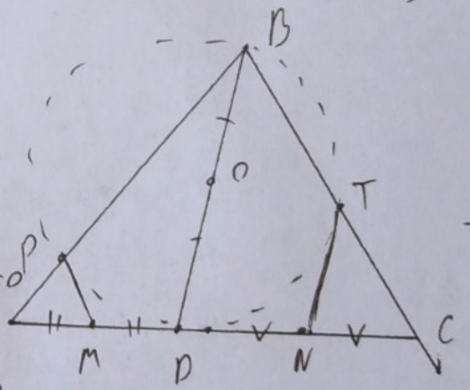
64

$x+1$

$a^2 - 2ax + x^2 = (a-x)^2$

$a^2 - 6ay + 9y^2 = (a-3y)^2$

$+\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^2 + 2xy - 4y^2 = \frac{1}{4}x^2 - \left(\frac{1}{2}x - 2y\right)^2$



$3\frac{3}{4}$

$\frac{15}{4}$

$-4ab + 10\sqrt{ab} - 4 = 0$

$+2ab - 5\sqrt{ab} + 2 = 0$

$a + b = 5$

$D = 25 - 4\cdot 2\cdot(+2) = 9$

$4 \cdot 6$

PM || TN

$\sqrt{ab} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{1}{2}; 2$

$2t^2 - 5t + 2 = 0$

$2\left(t^2 - \frac{5}{2}t + 1\right) = 0$

$|a| + |b|$

ab

$\frac{25}{4} =$

6

$\frac{24\cdot 4}{4} = 6$

$x + 1 \geq 0$

$x \geq -1$

$4 - x \geq 0$

$x \leq 4$

$D = 9 - 4\cdot\frac{15}{4}$

$\frac{3}{2} - \sqrt{6}$

$\frac{3}{2} + \sqrt{6} \vee 4$

$\sqrt{6} \vee \frac{5}{2}$

$36 \times \frac{25}{4}$

$\frac{3}{2}$

$\frac{25}{2}$

211005760 (U812372 M1277054)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211005760**

ID профиля: **812372**

Вариант 12

Чистовик

№ 4 часть 2

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \dfrac{5}{4} \\ 2x^4 + 2y^4 + 5x^2y^2 = \dfrac{9}{4} \end{cases}$$

$$2x^4 + 2y^4 + 5x^2y^2 - \frac{1}{x^2+y^2} - x^2y^2 = \frac{9}{4} - \frac{5}{4}$$

$$2x^4 + 2y^4 + 4x^2y^2 - \frac{1}{x^2+y^2} = 1$$

$$2(x^2+y^2)^2 - \frac{1}{x^2+y^2} = 1$$

т.к. $x = y = 0$ не подходит (иначе $\frac{1}{x^2+y^2}$ - не определено),

то $x^2+y^2 > 0$

замена переменных $t = x^2+y^2 > 0$

$$2t^2 - \frac{1}{t} = 1 \quad \Big| \cdot t \neq 0$$

$$2t^3 - 1 - t = 0$$

$$t^3 - 1 + t^3 - t = 0$$

$$(t-1)(t^2+t+1) + t(t^2-1) = 0$$

$$(t-1)(t^2+t+1) + (t-1)t(t+1) = 0$$

$$(t-1)(t^2+t+1+t^2+t) = 0$$

$$(t-1)(t^2+(t+1)^2) = 0,$$

т.к. $t^2 \geq 0$ и $(t+1)^2 \geq 0$

и $t^2 = 0$ при $x = 0$,

а $(t+1)^2 = 0$ при $x = -1$,

то $t^2 + (t+1)^2 > 0$

$$\Rightarrow t - 1 = 0$$

$x^2+y^2 = 1$ - ур-е окружности с центром в точке $(0;0)$ и радиусом 1

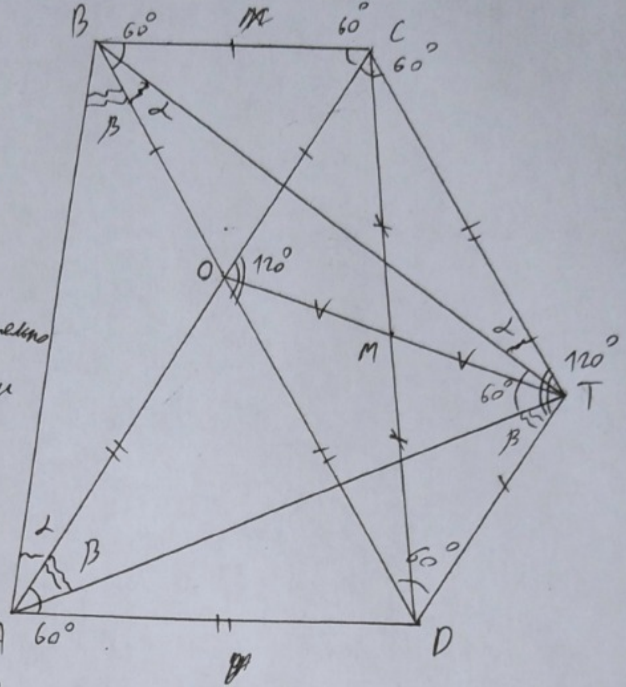
$$y = \sqrt{1-x^2}$$

Ответ: решения ~~ур-я~~ системы - точки, принадлежащие окружности с центром в т. $(0;0)$ и радиусом 1

Чистовик

№6 часть 2

т.к. $\triangle OBC$ и $\triangle ODA$ – правильные, то их углы равны 60° и при гомотетии с центром в точке O и $k = -\frac{AD}{BC}$



$\triangle BOC \to \triangle DOC \Rightarrow$

$\Rightarrow BC \parallel AD.$

$\angle COD = 180^\circ - \angle BOC = 120^\circ$

т.к. T симм. точке O относительно центра CD, то $OCTD$ – пар-м

$\Rightarrow$ 1) $\angle COD = \angle CTD = 120^\circ$

2) $OC = DT$ и $OD = CT$

$\Rightarrow BCTD$ – ~~[illegible]~~ равнобедр. трапеция

(~~[illegible]~~)

($CT \parallel BD$, т.к. $CT \parallel OD$, как противолежащие стороны пар-ма)

$BC = TD$, т.к. $BC = OC = TD$

$\angle BDT = \angle DBC = 60^\circ$.

$\Rightarrow \angle BCT = \angle DTC = 120^\circ \Rightarrow \angle OCT = 120^\circ - \angle BCO = 60^\circ$

пусть $\angle DBT = \alpha$, тогда $\angle BTC = 180^\circ - \angle TBC - \angle TCB =$

$\angle CAT = \beta$ $\quad = 180^\circ - (60^\circ - \alpha) - 120^\circ = \alpha$

аналогично $\angle ATD = \beta$

$\triangle DBT = \triangle CAB$ (по 2 сторонам и углу между)

1. $\angle BDT = \angle ACB = 60^\circ$

2. $AC = BD$ 3. $TD = BC$

$\Rightarrow \angle BAC = \angle DBT = \alpha$ аналогично $\angle ABD = \angle TAC = \beta$

т.к. $BC \parallel AD$, то для секущей AB: $\angle ABC + \angle DAB = 180^\circ$ *

* $\angle ABC + \angle DAB = \beta + 60^\circ + \alpha + 60^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 60^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ABT = \angle TAB = 60^\circ \Rightarrow \angle ATB = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABT$ – правильный

$BC = 2$, $AD = 4$ из $\triangle COB$: т. косинусов: $CD^2 = OC^2 + OD^2 - 2\,OC \cdot OD \cdot \cos 120^\circ =$

$= 2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 4 + 8 + 16 = 28 \Rightarrow CD = 2\sqrt{7}$

т.к. 1) $\angle AOB = \angle COD = 120^\circ$ 2) $BO = CO$ 3) $AO = DO$, то $\triangle AOB = \triangle DOC \Rightarrow AB = CD = 2\sqrt{7}$

$S_{ABT} = \frac{1}{2} AB \cdot AT \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 28 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 7\sqrt{3}$

$S_{ABCD} = S_{BOC} + S_{AOD} + 2 \cdot S_{BOA} = \frac{1}{2} \sin 60^\circ \cdot 2 \cdot 2 + \frac{1}{2} \sin 60^\circ \cdot 4 \cdot 4 + 2 \cdot \frac{1}{2} \sin 120^\circ \cdot 2 \cdot 4 =$

$= \sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 9\sqrt{3} \Rightarrow \frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{7\sqrt{3}}{9\sqrt{3}} = \frac{7}{9}$ Ответ: б) $\frac{7}{9}$

Чистовик

№5 часть 2

1) Случай — одна выбранная ~~т~~. точка лежит на ~~[illegible]~~ прямой $y = x$ или $y = 63 - x$, (эти прямые — диагонали квадрата $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ ~~[illegible]~~ узлов внутри квадрата на каждой прямой по $n-1$ и ~~[illegible]~~ прямые не перес. по узлам, т.к. от 0 до 63 четное кол-во узлов)

а другая не лежит,

пусть $n = 63$

тогда есть $2\cdot(n-1) = 2n-2$ варианта выбора первого узла (на прямых ~~•~~ $2n-2$ узла внутри квадр)

~~•~~ всего клеток внутри квадрата: $(n-1)^2$ ~~•~~,

тогда вариантов выбора 2-го узла есть

$$(n-1)^2 - (2n-2) - 2\cdot(n-3) = n^2 - 2n + 1 - 2n + 2 - 2n + 6 = n^2 - 6n + 9 = (n-3)^2$$

количество узлов, не лежащих на прямой и находящихся внутри квадрата, и ~~[illegible]~~ лежащих в одном столбце или строке с первым выбр. узлом

(из $n-1$ в столбце/строке 2 будут лежать на диагонали (т.к. диагонали не перес. по узлам), а все остальные будут параллельны одной из осей координат вместе с перв. выбр. узлом)

(заметим, что параллельны оси коорд. только узлы лежащие в одной строке/столбце)

2) Случай когда оба узла на диагонали,

тогда ~~[illegible]~~ вариантов выбрать первый: $(2n-2)$,

а второй: $(2n-2) - 3$, т.к. первый заблокировал свой и 2 узла в его столбце и строке $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ всего вариантов $\dfrac{(2n-2)(2n-5)}{2} = (n-1)(2n-5)$

делим на 2, т.к. мы посчитали как способы взять первый и 2-й, так и наоборот

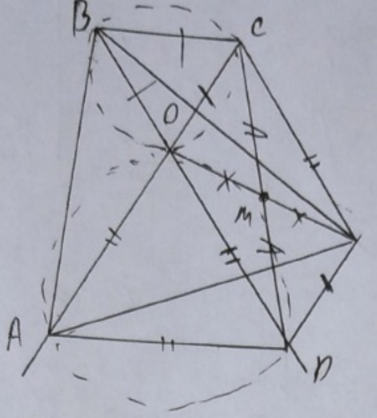
$\Rightarrow$ всего ~~[illegible]~~ способов: $(n-3)^2 + (n-1)(2n-5) = 60^2 + 62\cdot 121 =$

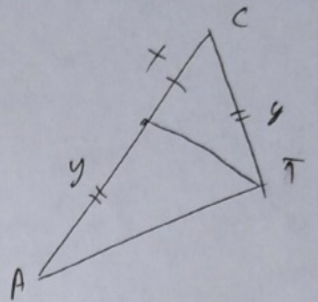
$= 3600 + 7502 = 11102$

Ответ: $(n-3)^2 + (n-1)(2n-5) = 11102$ способа

211005760 (U812372 M1277055)

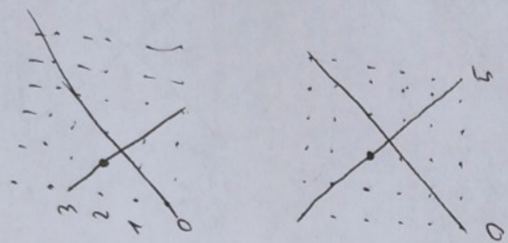
Черновик





35 + 75

110



n - 3

62

121

62

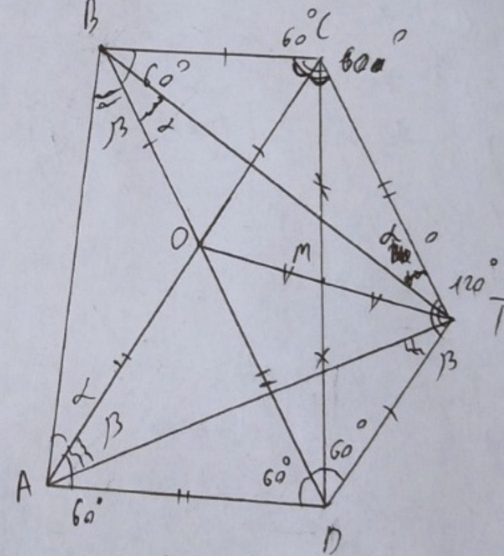
124

62

$n^2 - 6n + 9$

$2n^2 - 2n - 5n$

$3n^2 - 13n +$



$180° - 120° - (60° - \alpha)$

α

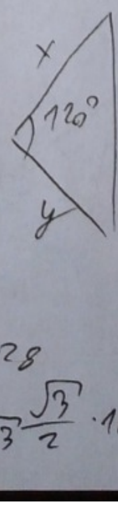
63 · 2

126

3600

$180° = \alpha + \beta + 120° - \alpha - \beta +$

+



$\sqrt{x^2 + y^2 - 2\cos 120° \times y}$

$2^2 + 4^2 + 2 \cdot \cancel{\frac{1}{2}} \cancel{2} \cdot 4$

$\cdot \frac{1}{2}$

$4 + 16 + 8$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 28 $\frac{2\sqrt{7}}{9\sqrt{3}}$ $\frac{2\sqrt{21}}{21}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$8\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 16^4 \cdot 7$ 28 14 $7\sqrt{3}$

Черновик

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{a+b} + ab = \frac{5}{4} \\ 2a^2+2b^2+5ab = \frac{9}{4} \end{cases} \quad |\cdot a+b>0 \quad a=b=0 \frac{1}{a+b}$$

$$\cancel{1 + 2a^2b + 2ab^2 = \frac{5}{4}a + \frac{5}{4}b}$$

$$2x^4+2y^2+5x^2y^2 - x^2y^2 - \frac{1}{x^2+y^2} = \frac{9}{4} - \frac{5}{4} = 1$$

$$2(x^2+y^2)^2 - \frac{1}{x^2+y^2} = 1$$

$$t = x^2+y^2$$

$$2t^2 - \frac{1}{t} = 1 \quad |\cdot t>0$$

$$2t^3 - t - 1 = 0$$

$$t^3 - t + t^3 - 1 = 0$$

$$t(t^2-1) + (t-1)(t^2+t+1) = 0$$

1) a)

$$(t-1)(t(t+1) + t^2+t+1) = 0$$

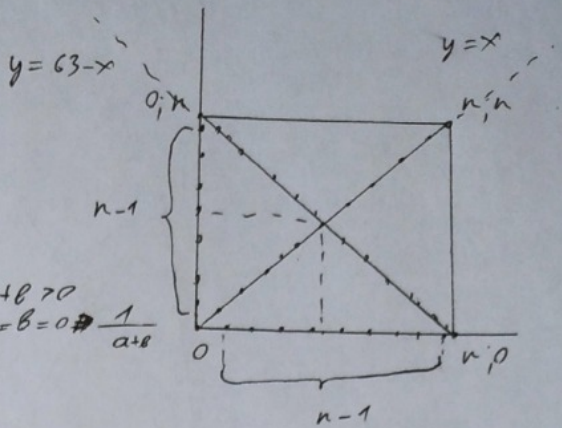
$$(t-1)(t^2+t+t^2+t+1) = 0$$

$$(t-1)(2t^2+2t+1) = 0$$

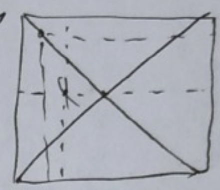
$$(t-1)(t^2+(t+1)^2) = 0$$

$$t-1=0 \qquad x^2+y^2=1$$

$$y = \sqrt{1-x^2}$$



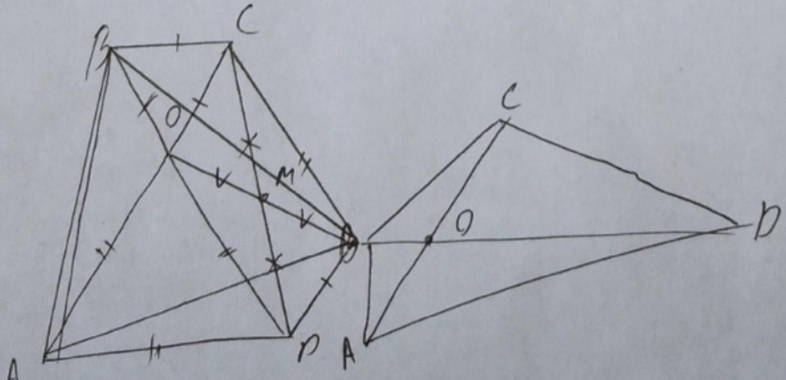
всего мест для помещ.
1-го узла $(n-1)+(n-1)-1$
всего на внутри $(n-1)^2$ $2n-3$

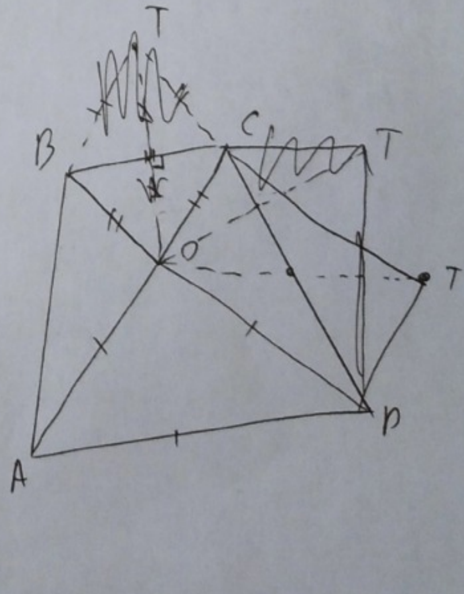


1) случай, когда ① - на прямой ② - нет

2) случай, когда ① и ② - на прямых

(2n-4 точки)





211005760 (U812372 M1277055)