Часть 1

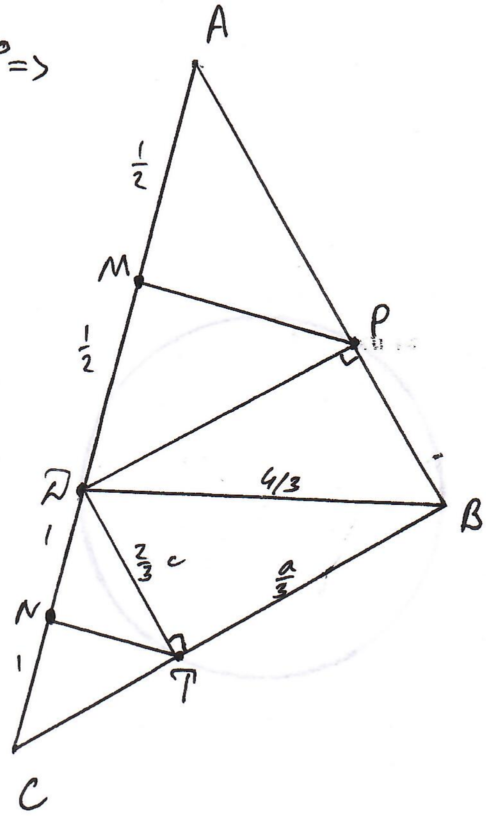
Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211005641**

ID профиля: **847642**

Вариант 12

№ 1



а) Т.к. BD - диаметр, то $\angle DPB = \angle DTB = 90^\circ \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle APD = \angle DTC = 90^\circ$; PM и TN - медианы в прямоугольных треугольниках $\Rightarrow$
$\Rightarrow PM = AM = MD$ и $TN = DN = NC$.
Т.к. $PM \parallel TN$, то ~~∠TNC~~ $\angle TNC = \angle PMD$
и $\frac{PM}{NT} = \frac{MD}{NC} \Rightarrow \triangle PMD \sim \triangle TNC$.
Пусть $\angle CAB = \alpha$, $\angle ACB = \gamma$, тогда $\angle ADP = \angle MDP = \gamma$, а т.к. $\triangle APD$ - прямоугольный, то $\alpha + \gamma = 90^\circ \Rightarrow$
$\angle ABC = \beta = 180 - (\alpha + \gamma) = 90^\circ$

б) Пусть $AB = c$, $BC = a$, из решения пункта а $AM = MD = MP = \frac{1}{2}$, $DN = NC = NT = 1 \Rightarrow AC = 3$. Т.к. $DP \parallel BC$ ($\angle ABC = \angle APD = 90^\circ$), то $\frac{AP}{AB} = \frac{AD}{DC} = \frac{1}{3} \Rightarrow PB = \frac{2}{3}c$, аналогично $DT \parallel AB \Rightarrow \frac{CA}{CD} = \frac{CB}{CT} = \frac{3}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow BT = \frac{a}{3}$. $BPDT$ - прямоугольник $\Rightarrow DT = BP = \frac{2}{3}c$

По Th Пифагора имеем:

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 9 \quad (\text{из } \triangle ABC) \\ \frac{a^2}{9} + \frac{4}{9}c^2 = \frac{16}{9} \quad (\text{из } \triangle BTD) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3c^2 = 7 \\ a^2 + c^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = \sqrt{\frac{7}{3}} \\ a = \sqrt{\frac{20}{3}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{a \cdot c}{2} = \frac{\sqrt{140}}{3 \cdot 2} = \frac{\sqrt{35}}{3}$$

Ответ: ~~Sa~~ а) $\angle ABC = 90^\circ$; б) $S = \frac{\sqrt{35}}{3}$

№2. $2\sqrt{4+3x-x^2} = 2\sqrt{(4-x)(x+1)} = \left(\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x}\right)^2 - \left(\sqrt{x+1}\right)^2 - \left(\sqrt{4-x}\right)^2\right)$

$= -\left(\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x}\right)^2 - x - 1 - 4 + x\right) = -\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x}\right)^2 + 5$

ОДЗ: $x \in [-1; 4]$

Обозначим $\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} = t$, тогда исходное уравнение будет иметь вид: $t+3 = -t^2+5 \Leftrightarrow t^2+t-2=0$

Решая относительно t получим: $t_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

$t_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} = \cancel{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}\ t$

Обозначим

$a = x - \frac{3}{2}$, тогда получим: $a \in \left[-\frac{5}{2}; \frac{5}{2}\right]$

$\sqrt{a+\frac{5}{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}-a} + t$, т.к. левая часть неотрицательна, возведём в квадрат:

$a + \frac{5}{2} = \frac{5}{2} - a + 2\sqrt{\frac{5}{2}-a}\cdot t + t^2$

$\Updownarrow$

$2\sqrt{\frac{5}{2}-a}\cdot t = 2a - t^2$

1) $t = -\frac{1-\sqrt{5}}{2}$: $\quad 2\sqrt{\frac{5}{2}-a}\cdot\frac{(1+\sqrt{5})}{2} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 2a$, левая часть неотрицательна, возведём в квадрат:

$\left(\frac{5}{2}-a\right)\left(1+\sqrt{5}\right)^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^4 - 4a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + 4a^2$

$\Updownarrow$

$4a^2 = 10 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^4$

$a^2 = \frac{5}{2} - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^4 = \frac{5}{2} - \left(\frac{\sqrt{5}+3}{2}\right)^2 = \frac{5}{2} - \left(\frac{5+\sqrt{5}\cdot 6+9}{4}\right) = \cancel{\frac{5}{2} - \left(\frac{7+\sqrt{5}\cdot 3}{2}\right)} =$

$\cancel{\frac{3\cdot\sqrt{5}}{8} + \frac{7}{2} = \frac{28+3\sqrt{5}}{8} < \left(\frac{5}{2}\right)^2 \Rightarrow a = \pm\sqrt{\frac{28+3\sqrt{5}}{8}}}$

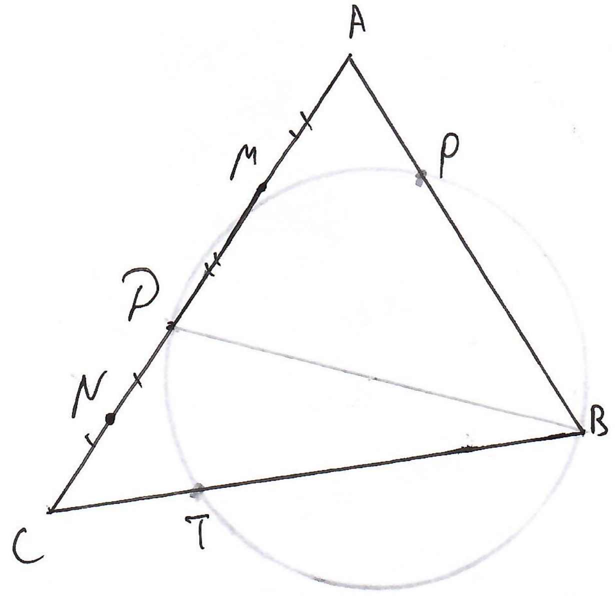
$\cancel{x = \pm\sqrt{\frac{28+3\sqrt{5}}{8}} + \frac{3}{2}} = -1 - \frac{3-\sqrt{5}}{2} < 0$ – противоречие.

2) $t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$: $\quad 2\sqrt{\frac{5}{2}-a}\cdot t = 2a - t^2$, левая часть ≥ 0, возведём в квадрат:

$4\left(\frac{5}{2}-a\right)\cdot t^2 = 4a^2 - 4at^2 + t^4 \Leftrightarrow 10 = 4a^2 + t^4 \Rightarrow 4a^2 = 10 - t^4 \Rightarrow$

$a^2 = \frac{5}{2} -$

7

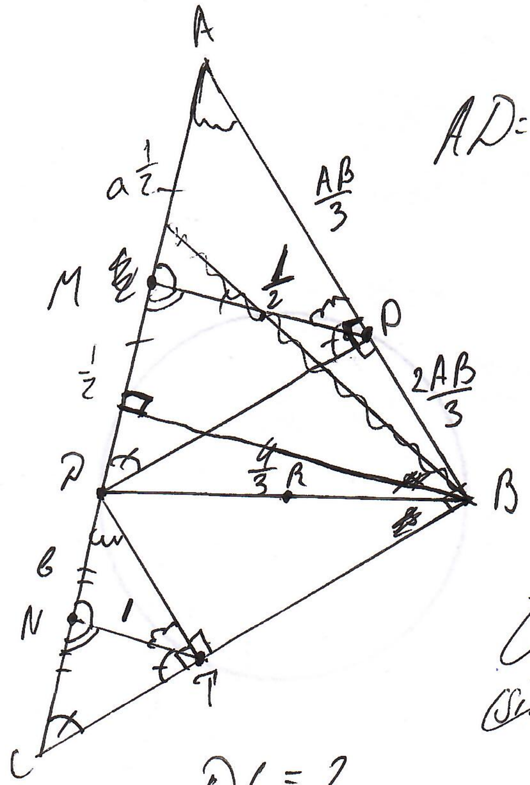


$AB = c \Rightarrow$

$DP = \sqrt{\frac{16}{9} - \frac{4c^2}{9}} =$

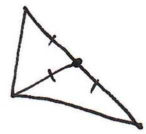
$\sqrt{\frac{12}{9}(1-c^2)}$

$PM \parallel TN$



$AD = 1$ $AM = MD = PM$

$DN = NC = NT$



$\triangle AMP \sim \triangle DNT$

$\cancel{\frac{DP}{\sin\alpha} = 2R}$, $\cancel{\frac{DT}{\sin\beta} = 2R}$

$\cancel{\sin\alpha = \frac{DP}{2R}}$

$DC = 2$

$R = \frac{2}{3}$

$\cancel{\frac{DP}{\sin\alpha} = \frac{4}{3}}$

$\cancel{\frac{DT}{\sin\beta} = \frac{4}{3}}$

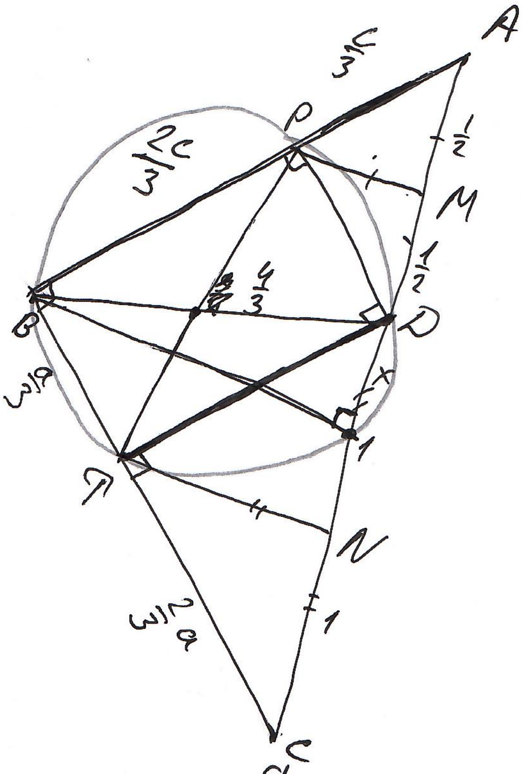
$$c^2 + a^2 = 9$$

$$\frac{a^2}{\cancel{2}} + \frac{4c^2}{\cancel{2}} = \frac{16}{\cancel{2}}$$

$$a^2 + c^2 = 9$$

$$a^2 + 4c^2 = 16$$

$$3c^2 = 7$$



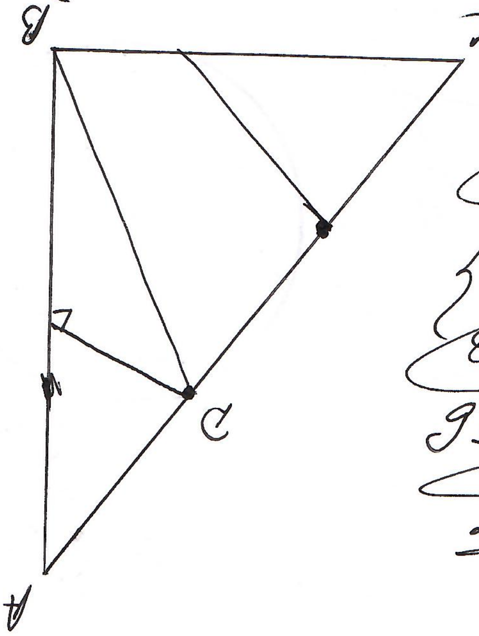
$$\frac{2}{3}a^2 = (2-x)$$

$$a^2 = 6-3x$$

$$c^2 = 9-a^2$$

$$\frac{c^2}{3} = 1+x$$

$$9-a^2 = 3+3x$$



$$\frac{20}{11} = 5$$

$$9 - \frac{7}{3} = \frac{27}{3} = \frac{20}{3}$$

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} = t$

$x+1 - 2\sqrt{(x+1)(4-x)} + 4 - x = t^2$

$2\sqrt{(x+1)(4-x)} = 5 - t^2$

$4(-x^2+3x+4) = 25 - 10t^2 + t^4$

$-4x^2 + 12x + 16 = 25 - 10t^2 + t^4$

$\sqrt{a+\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{5}{2}-a} = -\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$\sqrt{a+\frac{5}{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}-a} - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

$a + \frac{5}{2} = \frac{5}{2} - a - 2\sqrt{\frac{5}{2}-a}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{\sqrt{5}+3}{2}$

$2\sqrt{\frac{5}{2}-a}\left(\underbrace{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}_{=t}\right) = -2a + t^2$

$4\left(\frac{5}{2}-a\right)t^2 = t^4 - 4at^2 + 4a^2$

$10 - \cancel{4at^2} = t^4 - \cancel{4at^2} + 4a^2$

$4a^2 = 10 - t^4$

$x+1 - 2\sqrt{(x+1)(4-x)} + 4 - x = t^2$

$\frac{5 - 2\sqrt{5} + 1}{4} = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{9 - 6\sqrt{5} + 5}{4} =$

$\frac{5}{2} - \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{5}}{2} =$

$-3\sqrt{5}$

$a^2 \le \frac{25}{4} \le 7$

$\frac{7}{2} + \frac{3-\sqrt{5}}{8}$

$\frac{28+3\sqrt{5}}{8} \le \frac{28+12}{8} = \frac{40}{8}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211005641**

ID профиля: **847642**

Вариант 12

Чистовик

№4. $\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2 = \frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \\ 2(x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = \frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x^2+y^2)^2 - \frac{1}{x^2+y^2} = 1 \quad (1) \\ \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \end{cases}$

(1): Пусть $x^2+y^2 = t > 0$, тогда имеем:

$2t^2 - \frac{1}{t} = 1 \quad | \cdot t$

$2t^3 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(2t^2+2t+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ 2t^2+2t+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

не выполняется, т.к. $D = 4-8 = -4 < 0$

$\Leftrightarrow t = 1$, т.е. $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1-y^2 \\ 1+(1-y^2)y^2 = 5/4 \quad (2) \end{cases}$

(2): Пусть $y^2 = b \geq 0$, тогда $(2) \Leftrightarrow b^2 - b + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow b = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$, и $x^2 = 1 - b = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$

Ответ: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Чистовик

№ ~~7~~5 Всего узлов сетки не на границе 62^2.

На прямой $y=x$ ровно 62 подходящих узла сетки, как и на прямой $y=63-x$, при этом каждая из этих 124 точек лежит ровно на одной из этих прямых, т.к. абсцисса их точки пересечения $x_0=\frac{63}{2}\notin\mathbb{Z}$.

1-й случай: 2 выбранных узла лежат на $y=x$, т.е. выбираем 2 точки из $62 \to C_{62}^2=\frac{62\cdot61}{2}$ способами

2-й случай: ровно одна выбранная точка лежит на прямой $y=x$. Выбираем 1 из 62, далее удаляем оставшиеся узлы решётки на прямой $y=x$ (61 шт.), а также узлы решётки с такой же абсциссой или ординатой, как у выбранной точки (122 шт.), затем выбираем точку из оставшихся $62^2-1-\cancel{62}^{61}-\cancel{62\cdot2}^{61}$, т.е. всего способов: $62\cdot(62^2-3\cdot\cancel{62}^{61}-1)$

3-й случай: 2 выбранных узла решётки лежит на $y=63-x$ – аналогично 1-му случаю

4-й случай: ровно одна выбранная точка лежит на прямой $y=63-x$ – аналогично 2-му случаю.

При этом мы два раза посчитали конструкции, в которых одна точка лежит на $y=x$, а другая на $y=63-x$, таких конструкций ровно ~~$62\cdot62-62$~~ $62\cdot(62-2)$, (в двух случаях точки будут иметь одинаковую абсциссу или ординату)

Чистовик

№~~2~~5(прод.)

По формуле включений и исключений получим, что всего способов: $2\cdot\left(\frac{62\cdot 61}{2}\right)+2\cdot 62\left(62^2-3\cdot\overset{61}{\cancel{62}}-1\right)-$

$-62\cdot(62-2)=$ ~~453530~~ $2\cdot 62^3-5\cdot 62\cdot 61-62^2=$

~~Ответ: 453530.~~

$= 453902$

Ответ: 453902

Чистовик №6

а) $\angle OBC = \angle ODA = 60^\circ \Rightarrow BC \parallel AD$,

т.е. $ABCD$ – трапеция,

$\angle DAC = \angle DAO = 60^\circ = \angle OBC = \angle DBC \Rightarrow$

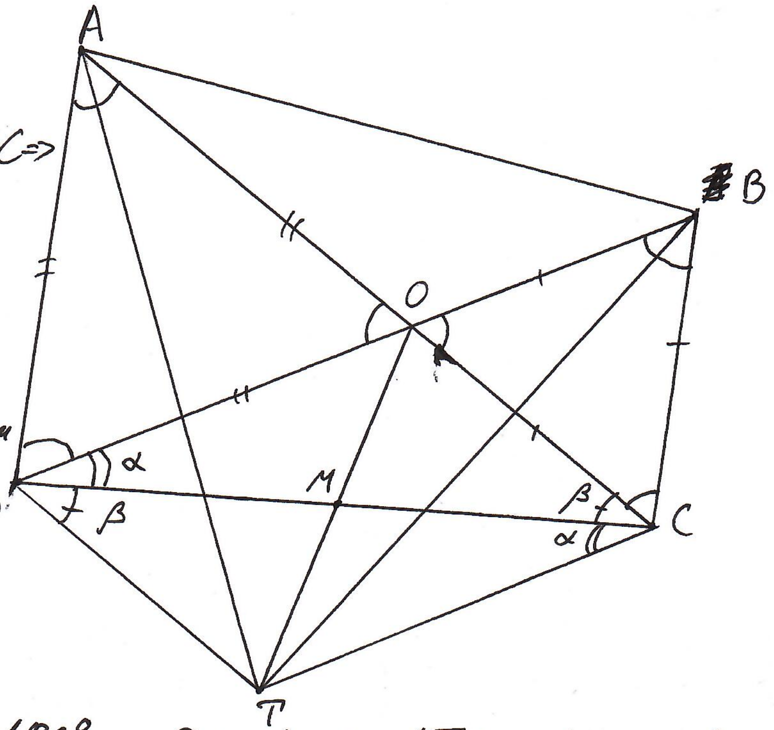
$= ABCD$ – вписан $\Rightarrow$

$ABCD$ – равнобокая трапеция.

M – середина DC.

Т.к. $OM = MT$ и $DM = MC$,

то $ODTC$ – параллелограмм



$\Rightarrow \angle DTC = \angle DOC = \cancel{\angle AOB}$ $\ominus$

~~при этом $\angle DOC + \angle AOB = 360^\circ$~~ и

$\ominus$ $180^\circ - \angle BOC = 120^\circ \Rightarrow$

$ABCTD$ – вписан $(\angle DTC = 180^\circ - \angle DAC) \Rightarrow \angle ATB = \angle ACB = 60^\circ$

~~$\angle BCT$~~ Пусть $\angle ODC = \angle DCT = \alpha$, $\angle OCD = \angle CDT = \beta$,

тогда $\angle ADT = \angle ADO + \alpha + \beta = 60^\circ + \alpha + \beta$ и $\angle BCT = \angle BCO + \alpha + \beta = 60^\circ + \alpha + \beta \Rightarrow BT = AT$, как хорды, стягивающие равные дуги, $\Rightarrow \triangle ATB$ – равнобедренный с углом $60^\circ \Rightarrow \triangle ATB$ – равносторонний, ч.т.д.

б) Т.к. $\angle CTD = \cancel{180^\circ}\ 120^\circ$, то из $\triangle DTC$ $\alpha + \beta = 180^\circ - \angle DTC = 60^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BCT = \angle OCB + \alpha + \beta = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$.

$\angle ACD = \angle CDT = \beta \Rightarrow TC = AD = 4$ (хорды, стягивающие равные дуги). По Th cos: $BT^2 = BC^2 + CT^2 - 2BC \cdot CT \cdot \cos\angle BCT =$

$= 4 + 16 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 28 \Rightarrow S_{ABT} = \frac{1}{2} \cdot BT^2 \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 28 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 7\sqrt{3}$.

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \cdot \sin\angle BOC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{7\sqrt{3}}{9\sqrt{3}} = \frac{7}{9}$$

Ответ: б) $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{7}{9}$.

Черновик

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2 = \frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \\ \cancel{2x^2+2y^2}\ 2(x^2+y^2)^2+x^2y^2=\frac{9}{4} \end{cases}$$

$$\cancel{2x^4+2y^4+4x^2y^2-\frac{1}{x^2+y^2}=1}$$

$x^2+y^2=t$

$$\begin{cases} 2(x^2+y^2)^2+x^2y^2=\frac{9}{4} \\ \frac{1}{x^2+y^2}+x^2y^2=\frac{5}{4} \end{cases} -$$

$2t^2-\frac{1}{t}=1 \quad |\cdot t$

$2t^3-t-1=0$

$2t^3+\cancel{2t^2}+t-\cancel{2t^3}-2t-1$

$\cancel{(t-1)(2t^2+2t+1)=}$

$$\left[\begin{array}{l} t=1 \\ 2t^2+2t+1=0 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{l|l} 2t^3-t-1 & t-1 \\ \hline 2t^3-2t^2 & 2t^2+2t+1 \\ \hline \quad 2t^2-t & \\ \quad 2t^2-2t & \\ \hline \qquad t-1 & \end{array}$$

$D=4-8<0$

$t=1$

$$\begin{cases} x^2+y^2=1, \quad x^2=1-y^2 \\ 1+x^2y^2=\frac{5}{4} \end{cases}$$

$1+(1-y^2)y^2=\frac{5}{4}$ $\quad y^2=a\geq 0$

$D=1-1=0$

$\frac{1-0}{2}$

$1+(1-a)a=\frac{5}{4}$

$1+a-a^2=\frac{5}{4}$

$1+y^2-y^4=\frac{5}{4}$

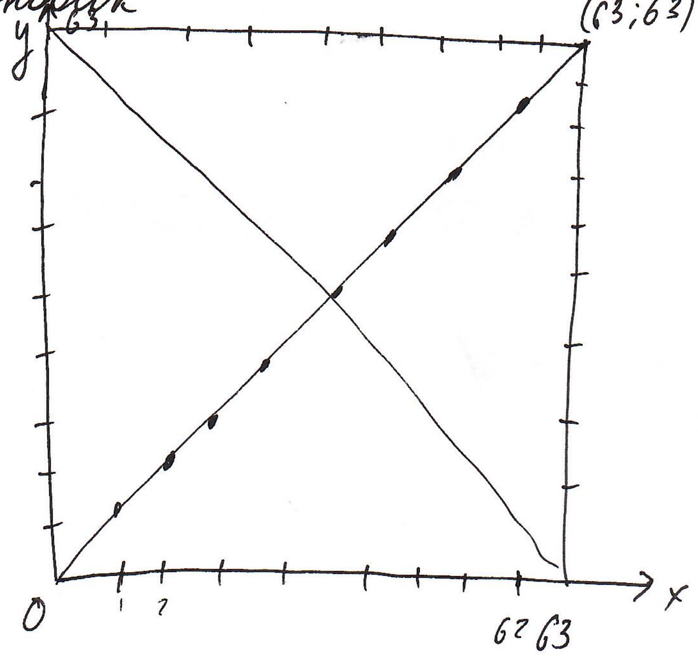
$a^2-a+\frac{1}{4}=0$

$y^4-y^2+\frac{1}{4}=0$

$D=1-1=0$

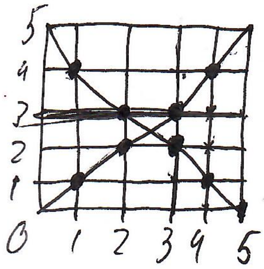
$a_1=\frac{1}{2}$

Черновик



Всего точек не на границе 62^2

На прямой $y=x$ лежит 62 подходящих узла, как и на прямой $63-x$, не имеют общих точек.



2 лежит на $y=x$

$$\frac{62\cdot 61}{2} = 31\cdot 61$$

$63-x=x$

1 лежит на $y=x$:

$$62\cdot(62^2-62)$$

$62\cdot 62 = 124 + 372 = 3844$

$3844\cdot 62$: $7688 + 23064 = 238328$

$62^2\cdot 2 = 7688$

$7688 + 61 = 7749$

$7749 - 434 = 7315$

$62\cdot 60$

$62\cdot 7 = 434$

$3\cdot$

$7315\cdot 62$: $14630 + 43890 = 453530$

$$62\cdot 61 + 2\cdot 62^3 - 6\cdot 62^2 - \cancel{2\cdot 62} - 62^2 + \cancel{2\cdot 62} =$$

$$=62(61+2\cdot 62^2 - 7\cdot 62 - \cancel{62}) = 62\cdot 7315$$

$238328\cdot 2 = 476656$

~~$7315\cdot 62$: 14630, 4410, 58730~~

~~$7315\cdot 62$: 14630, 4410~~

~~$7315\cdot 62$: 4630, 10~~

$61\cdot 5 = 305$

$7688 - 305 = 7383$

$7383 - 62 = 7321$

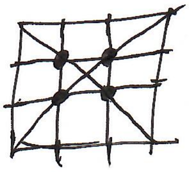
Черновик

$62 \cdot 61 +$

$\cancel{n(n-1)} + 2n^3 - 6n^2 - \cancel{2n} - n^2 + \cancel{2n} =$

$\cancel{n^2 - n}$

$= 2n^3 - 6n^2 - n = n(n^2 - 5n - 1)$



$2(4 - \cdot$

$2(2 \cdot 4 - 5 - 4) =$

$2 +$

$62 \cdot 61 + 2 \cdot 62^3 - 6 \cdot 61 - \cancel{2 \cdot 62} - 62^2 + \cancel{2 \cdot 62}$

$61(56) + 2 \cdot 62^3 -$

$56 \cdot 61 + 2 \cdot 62^3 - 6 \cdot$

$62 \cdot 61 + 2 \cdot 62^3 - 6 \cdot 62 \cdot 61 - \cancel{2 \cdot 62} - 62^2 + \cancel{2 \cdot 62}$

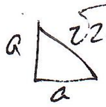
$2 \cdot 62^3 - 5 \cdot 62 \cdot 61 - 62^2$

$62(2 \cdot 62^2 - 5 \cdot 61 - 62) =$

$= 62(7688 - 305 - 62$

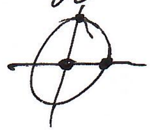
$$\begin{array}{r} 7321 \\ \times\ 162 \\ \hline 14642 \\ +43926 \\ \hline 453902 \end{array}$$

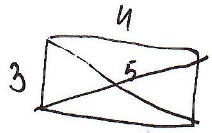
Черновик

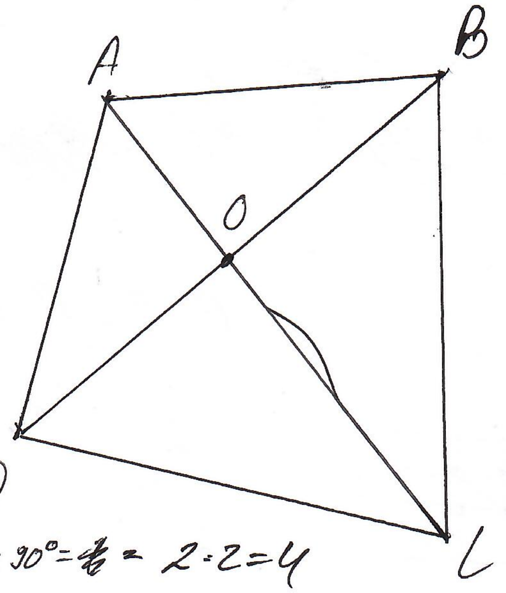


$\sqrt{2a^2}=a\sqrt{2}$

$\sin=\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{\ }$







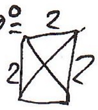
$\sqrt{4+4}=$

25

$\cancel{\ }=2\sqrt{2}$

$\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sin 90^\circ=\cancel{\ }=2\cdot 2=4$

$\frac{1}{2}\cdot BT^2\cdot\sin 60^\circ=$

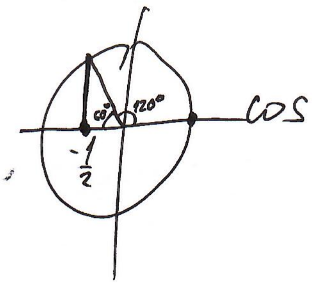


$=14\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=$

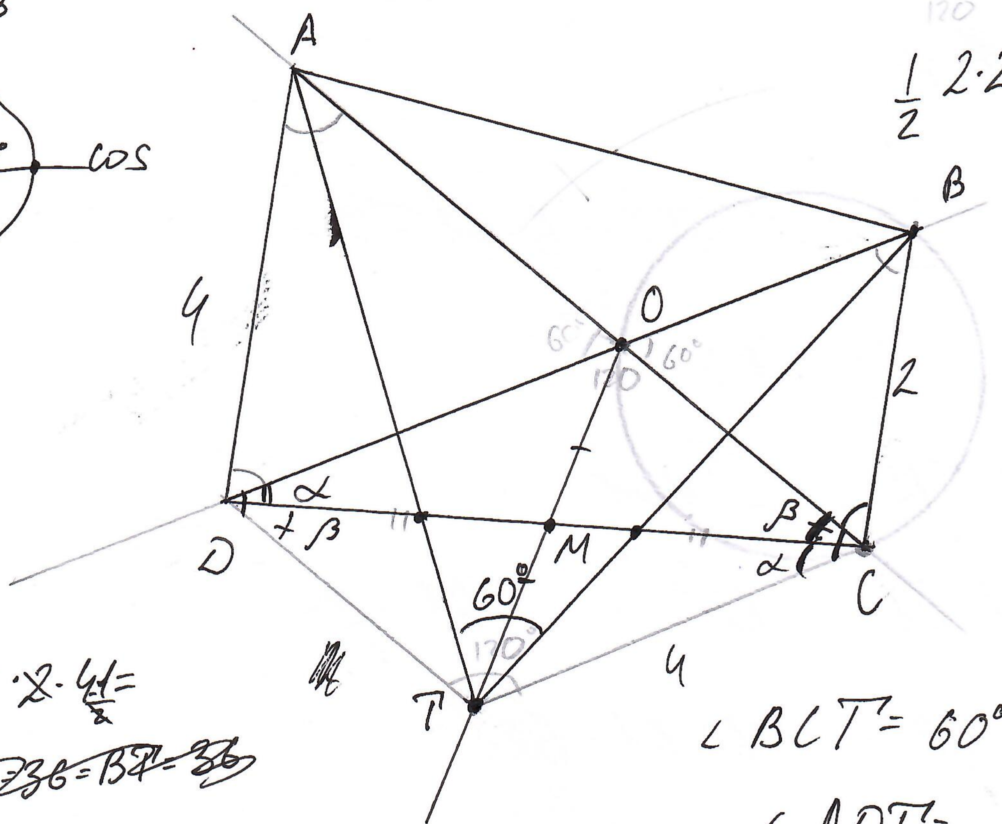
$=7\sqrt{3}$

$AB=DC$

360
−120
240
120



$\frac{1}{2}\,2\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$



S

$\alpha+\beta=60^\circ$

$4+16+2\cdot 2\cdot 4\cdot\frac{1}{2}=$

~~$=20+16=36=BT^2=36$~~

$\angle BCT=60^\circ+\alpha+\beta$

$\angle ADT=$

$(6-\frac{1}{2})(6-\frac{1}{2})=6^2-2\cdot 6\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$

$S_{ABCD}=\frac{1}{2}DB\cdot AC\cdot\sin\angle BOC=$

$=\frac{1}{2}\cdot 36\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{3}$

$AD=TC=4$

$\angle TCB=120^\circ$