Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

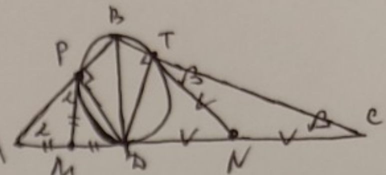
Шифр: **211005614**

ID профиля: **837016**

Вариант 12

Чистовик.

1.а. Найти $\angle ABC$ — ?



Т.к. BD — диаметр, то $\angle BTD = \angle BPD = 90° \Rightarrow$ $\triangle APD$ и $\triangle DTC$ — прямоугольные $\Rightarrow PM$ и TN, как медианы равны половине гип.

Пусть $\angle A = \alpha$; $\angle B = 180 - \alpha - \beta$; $\angle C = \beta$, тогда $\angle \alpha = \angle APM$ — т.к. $\triangle APM$ — равнобедренный. и аналогично $\angle C = \beta = \angle NTC$, т.к. $\triangle TNC$ — равнобедр.

Тогда $\angle PMD = 2\alpha$ (по сумме $\angle$ в $\triangle$) аналогично $\angle TND = 2\beta$.

$\angle DPM = \angle PDM = 90 - \alpha$ и $\angle TDN = \angle DTN = 90 - \beta$.

$\angle ADP + \angle TDC + \angle PDT = 180 \Leftrightarrow 90 - \alpha + 90 - \beta + \angle TDP = 180 \Leftrightarrow$

$\alpha + \beta = \angle TDP$. Т.к. $PM \parallel TN \Rightarrow \angle PMD + \angle TND = 180$ (одност.) $\Leftrightarrow$

$2\alpha + 2\beta = 180 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 90° \Rightarrow \angle B = 180 - \alpha - \beta = 90°$

Угол $ABC = 90°$

1.б. Найти S_{ABC} — ? $AC = 3 = 2AM + 2ND$

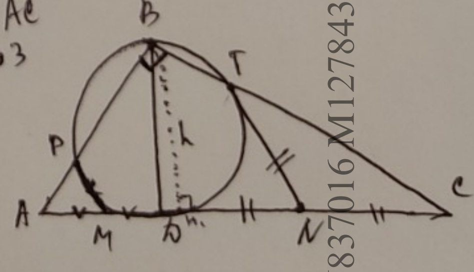
~~$S_{ABC} = \frac{BD \cdot AC}{2} = \frac{\frac{4}{3} \cdot 3}{2} = 2$~~

h — высота $\quad AB^2 = AH_1 \cdot AC = AH_1 \cdot 3 \quad 3AH_1 + 3BH_1 = AC^2$

H_1 — точка касания h $\quad BC^2 = CH_1 \cdot AC = BH_1 \cdot 3 \quad AH_1 + BH_1 = 3$

стороны AC.

Ответ: $\angle ABC = 90°$



1

Чистовик.

2. $\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{(x+1)(4-x)}$

ОДЗ: $\begin{cases} x+1 > 0 \\ 4-x > 0 \\ (x+1)(4-x) > 0 \end{cases}$

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} = 2\sqrt{(x+1)(4-x)} - 3$

$(\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x})^2 = (2\sqrt{(x+1)(4-x)} - 3)^2$

$\cancel{x}+1 - 2\sqrt{(x+1)(4-x)} + 4 - \cancel{x} = 4(x+1)(4-x) - 12\sqrt{(x+1)(4-x)} + 9$

$\sqrt{(x+1)(4-x)} = t$

$1 - 2t + 4 = 4t^2 - 12t + 9$

$4t^2 - 10t + 4 = 0$

$t^2 - 2{,}5t + 1 = 0$

$t_1 = 0{,}5; t_2 = 2$

$\sqrt{(x+1)(4-x)} = 0{,}5$ или $\sqrt{(x+1)(4-x)} = 2$

$(x+1)(4-x) = 0{,}25$ или $(x+1)(4-x) = 4$

$-x^2 + 3x + 4 = 0{,}25$ или $-x^2 + 3x + 4 = 4$

$-x^2 + 3x + 3{,}75 = 0$ или $-x^2 + 3x = 0$

$x_1 = 3 \quad x_2 = 0$ – П.к. подстан.

$x^2 - 3x - 3{,}75 = 0$

$D_1 = 9 + 15 = 24 = (2\sqrt{6})^2$

$x_{3,4} = \frac{3 \pm 2\sqrt{6}}{2} = 1{,}5 \pm \sqrt{6}$ – П.к. по одз. (который с „+")

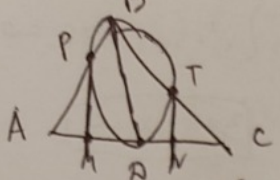
2

Ответ: $x_1 = 3.$ и $x_2 = 1{,}5 - \sqrt{6}$

Черновик

BD - диаметр

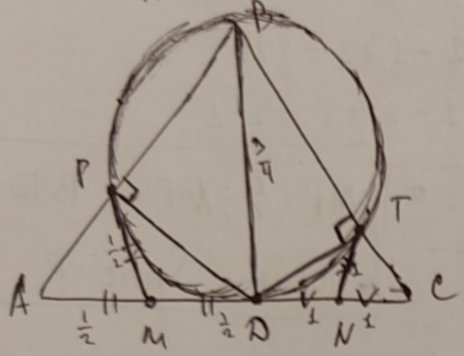
M и N - середины AD и CD PM ∥ TN

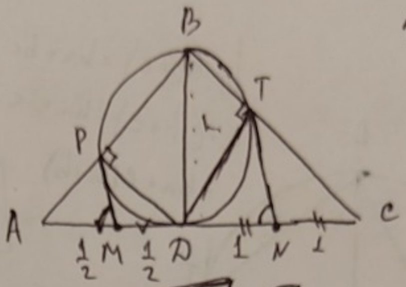


а) найти ∠ABC

$1-2+3=2\sqrt{1\cdot 4}$

$2=2\cdot 2$





$\sqrt{1\cdot 2}=\sqrt{2}$

$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+3=2\sqrt{4+3x-x^2}$

$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+3=2\sqrt{(x+1)(x-4)}$

ОДЗ: $\begin{cases}4+3x-x^2>0\\4-x>0\\x+1>0\end{cases}$

$x<4$

$x>-1$

$t^2=(x+1)(x-4)$

$x+1=\frac{t^2}{(x-4)}$

$1{,}5-\sqrt6$ и 1

$2{,}25-3\sqrt6+6$

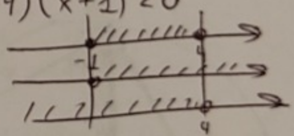
$8{,}25-3\sqrt6$

$3\sqrt6$ и $8{,}25$

54 50

$x^2-3x+4<0$

$(x-4)(x+1)<0$



$x\in(-1;4)$

$-\sqrt{4-x}+3=2\cdot\sqrt{(x+1)}\cdot\sqrt{(x-4)}-\sqrt{x+1}$

$\left(\frac12\right)^2\cdot 1$

$\sqrt1$

$-\sqrt{4-x}+3=\left(2\sqrt{(x-4)}-1\right)\sqrt{x+1}$

$\left(3-\sqrt{4-x}\right)^2=\left(4(x-4)-4\sqrt{x-4}+1\right)(x+1)$

$\sqrt{u^2}-\sqrt{t^2}+3=-2tu$

$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}=2\sqrt{(x+1)(x-4)}-3$

$u+t+3=2tu$

$3\frac34$ $\frac{15}{4}$

$t+3=2tu-u$

$t+3=u(2t-1)$

$(x+1)+(4-x)-2\sqrt{(x+1)(4-x)}=4(x+1)(x-4)-12\sqrt{(x+1)(x-4)}+9$

$9+15=22$

$5-2t=4t^2-12t+9$

$4t^2-10t+4=0$

$100-64=36$

$4x^2-12x+15=0$

$t^2-2{,}5t+1=0$

$\frac{+10+6}{8}=2$

$144+240=384\,|\,2$

197

$(t-0{,}5)(t-2)=0$

$4<\sqrt{24}<5$

211005614 (U837016 M1278430)

Черновик.

$5 - 2\sqrt{(x+1)(-x+4)} = 4(x+1)(-x+4) - 12\sqrt{(x+1)(4-x)} + 9$

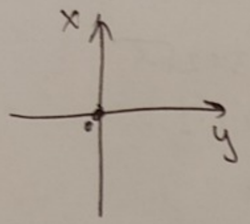
$5 - 2t = 4t^2 - 12t + 9$

$4t^2 - 10t + 4 = 0$

$2 ; 0,5$

$\begin{cases} -x^2+3x+4 = 4 \\ -x^2-3x+4 = 0,25 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x - x^2 = 0 \\ x^2+3x-3,75 = 0 \end{cases}$

$x(3-x) = 0$ $\boxed{3 = x \,;\, x = 0}$



$b\cdot(a+c) = ba + bc$

$a\cdot(b+c) = ba + ac$

$2ba + c(a+b)$

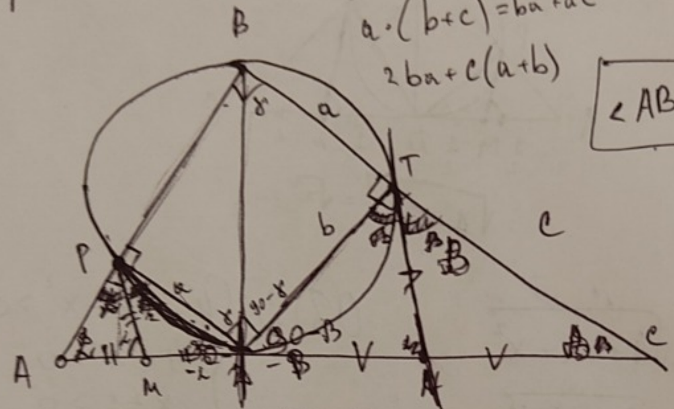
$2 - 1 + 3 = 2\sqrt{4}$

$1 - 2 + 3 = 2\cdot 2$

$\boxed{\angle ABC - ?}$

$\boxed{MP = \frac{1}{2} ; NT = 1 \;\; BD = \frac{4}{3}}$

Найти S_{ABC} - ?



$\angle ADP + \angle TDN = \angle ABC$

$a\cdot b + \frac{b\cdot c}{2} + \frac{b\cdot c}{8}$ $\quad r = \frac{2}{3}$

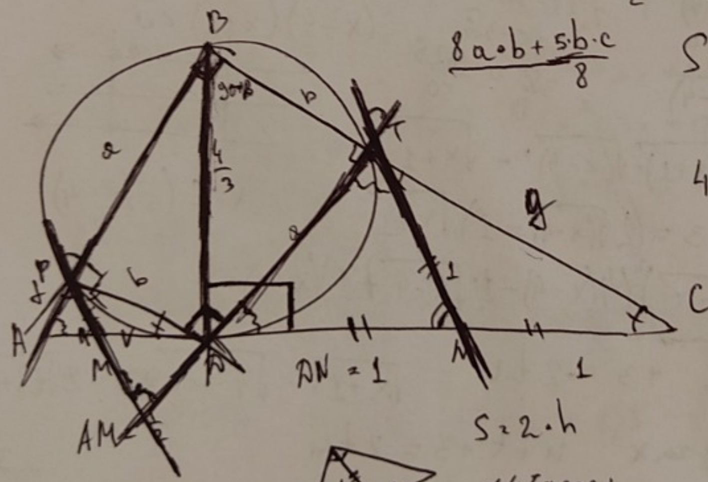
$\frac{8a\cdot b + 5b\cdot c}{8}$ $\quad S_{ABC} =$

$S = \frac{ab}{2} = \frac{1}{2}pr$

$\frac{\frac{4}{3} + a + b}{2}\cdot\frac{2}{3}$

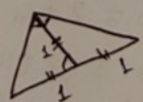
$\frac{\frac{4}{3} + a + b}{3} = S$

$4\cdot S_{APD} = S_{TDC}$



$DN = 1$

$S = 2\cdot h$



$8ab + 5bc = 16ab + 8ca + 8cb$

$8ab = 3bc - 8ac$

$a^2 = \frac{9}{16} - b^2$

211005614 (U837016 M1278430)

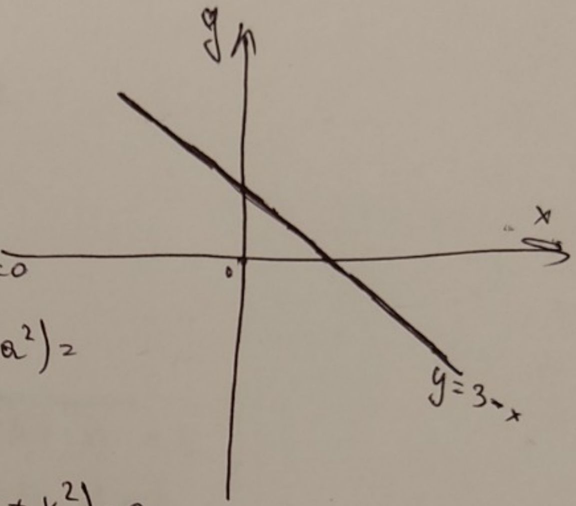
Черновик.

$2a^2 - 2ax - 6ay + x^2 + 2xy + 5y^2 = 0$, A

$\cancel{A}$, $ax^2 + 4a^2x - ay + 4a^3 + 2 = 0$ вершина в точке B

найти все знач. парам. a при которых $\cancel{A}$ A и B лежат по одну сторону от прямой $x + y = 3$

$y = 3 - x$



$\cancel{x+2xy+y^2}$

$x^2 + 2x(y-a) + (5y^2 - 6ay - 2a^2) = 0$

$4(y^2 - 2ya + a^2) - 4(5y^2 - 6ay - 2a^2) =$

$= 4(6y^2 - 8ya - a^2)$

$5y^2 + y(2x - 6a) + (2a^2 - 2ax + x^2) = 0$

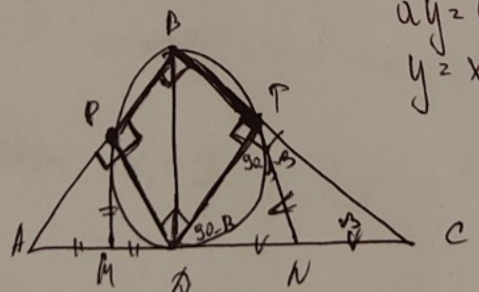
$4(x^2 - 6xa + 9a^2) + 4(2a^2 - 2ax + x^2) = 0$

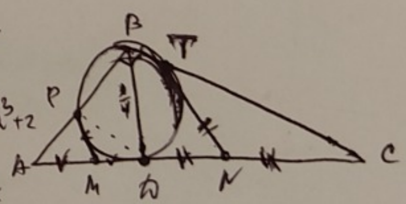
$= 4(2x^2$

$a^2 + b^2 = \frac{9}{16}$

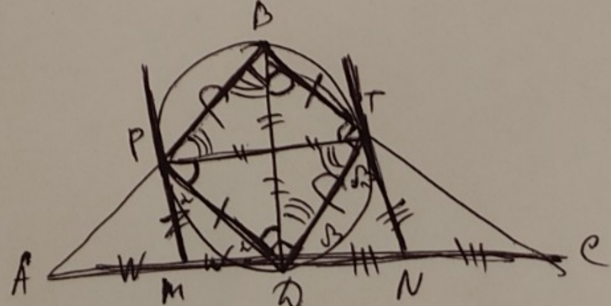
$ay = ax^2 + 4a^2x + 4a^3 + 2$

$y = x^2 + 4ax + 4a + \frac{2}{a}$





AC=3



$\frac{AP\cdot PD}{2} + \frac{DT\cdot(BC - BD)}{2}$

$\underline{AP - DT}$

Часть 2

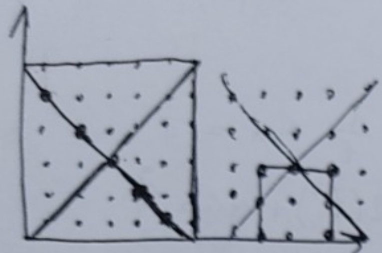
Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211005614**

ID профиля: **837016**

Вариант 12

Черновик.



всего узлов $(n-1)(n-1) \Rightarrow (n-1)^2$

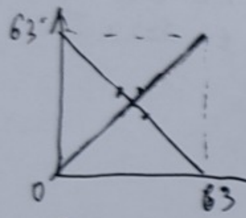
для точки 1 подходят все кроме, тех которые лежат на одной гориз. или верт

$62^2-(61+61)$ по прямой $y=63-x$ таких точек 62

$62^2\cdot(62^2-61-61)$ и столько же на прямой $y=x$,

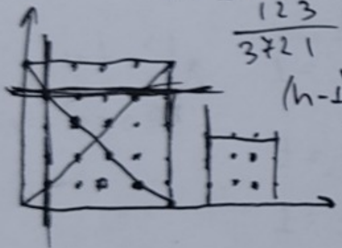
~~на в точке~~

пересекаются они в точке $(31{,}5; 31{,}5)$ поэтому точек лежащих на прямых $y=x$ и $y=63-x$ 144 шт.



$(n-1)(n-1)-1-2\cdot(n-1)= 62^2-1-122 = 62^2-123$

$62^2-1-2\cdot61$



$$\begin{array}{r} 3721 \\ -\ 60 \\ \hline 3661 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3721 \\ +\ 3661 \\ \hline 7381 \\ \times\ 62 \\ \hline 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} 7381 \\ \times\ 62 \\ \hline 14762 \\ 44286 \\ \hline 457622 \end{array} \quad \begin{array}{r} 7381 \\ \times\ 6 \\ \hline 44286 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 62 \\ \times\ 62 \\ \hline 124 \\ 372 \\ \hline 3844 \\ -\ 123 \\ \hline 3721 \end{array}$$

211005614 (U837016 M1278431)

Черновик

$$\begin{cases}\frac{1}{x^2+y^2}+x^2y^2=\frac{5}{4}\\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2=\frac{9}{4}\end{cases}$$

$$2(x^4+y^4+2x^2y^2)+x^2y^2=\frac{9}{4}$$

$$\boxed{\begin{matrix}x^2+y^2=t\\ x^2y^2=u\end{matrix}}$$

$\frac{1}{t}+u=\frac{5}{4}$

$2(t^2)+u=\frac{9}{4}$

$1+ut=\frac{5t}{4}$ $\quad 4=5t-4ut=t(5-4u)$

$2t^2+u=\frac{9}{4}$ $\quad t=\underline{5-4u}$

$$\begin{cases}\frac{1}{t}+u=\frac{5}{4}\\ 2t^2+u=\frac{9}{4}\end{cases}$$

$\cancel{\frac{1}{t}=\frac{5-4u}{4}\Leftrightarrow t=\frac{4}{5-4u}}$

$$\begin{cases}u=\frac{9}{4}-2t^2\\ \frac{1}{t}+\frac{9}{4}-2t^2=\frac{5}{4}\end{cases}\qquad \begin{cases}u=\frac{9}{4}-2t^2\\ \frac{1}{t}-2t^2=-1\end{cases}$$

$2t^2-\frac{1}{t}=1$ $\quad 2t^3=t+1$

$3\cdot 0{,}5^3=1{,}5$

$2t^3-1=t$

$2t^3-t=1$

$t^{-1}+u=\frac{5}{4}$ $\quad 2t^2-t^{-1}=1$

$2t^2+u=\frac{9}{4}$ $\quad 2t^3-t=1$

$$\begin{array}{r|l} 2t^3-t-1 & t-1\\ \cline{2-2} -(2t^3-2t^2) & 2t^2+2t+1\\ \hline 2t^2-t & \\ -(2t^2-2t) & \\ \hline t-1 & \end{array}$$

$(t-1)(2t^2+2t+1)$

$$\begin{cases}x^2+y^2=1\\ xy=\frac{1}{2}\end{cases}\qquad (x+y)^2=2 \qquad x=\frac{1}{2y}$$

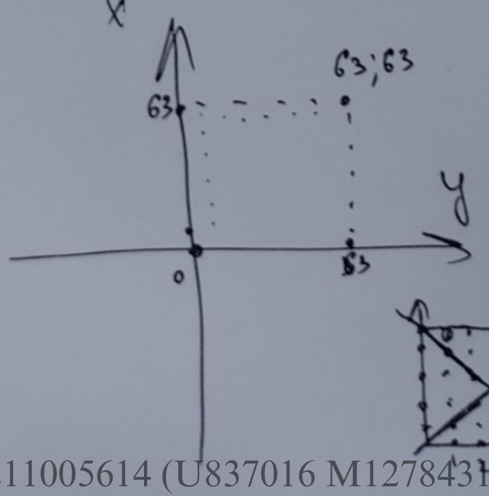
$(x+y)=\sqrt{2}$ $\quad x^2+2$

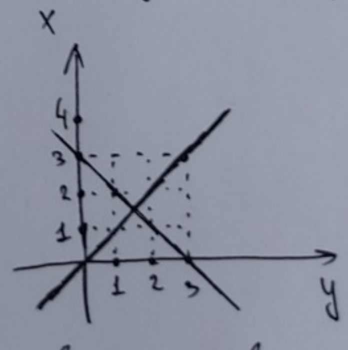
$$\begin{cases}4y^4+1=4y^2\\ x=\frac{1}{2y}\end{cases}\qquad 4y^4-4y^2+1=0 \qquad (2y^2-1)=0$$

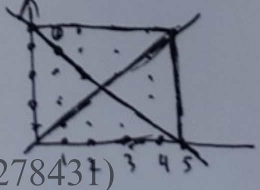
$\frac{1}{2\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$2y^2=1$

$y^2=\frac{1}{2}$ $\quad y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$





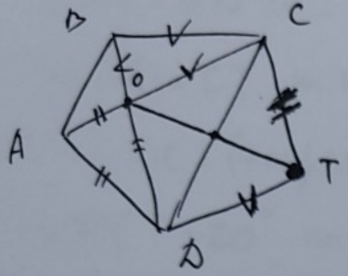


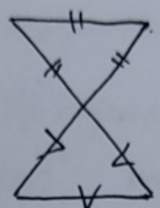
всего узлов 62×62 (не лежащих на границах

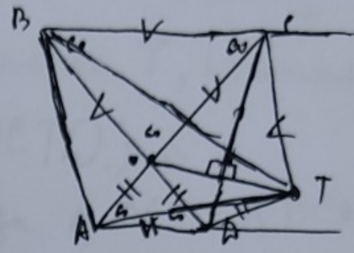
для ① (61+61)

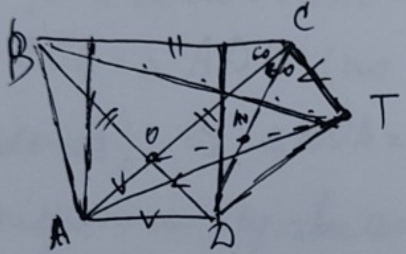
Чистовик.

Черновик









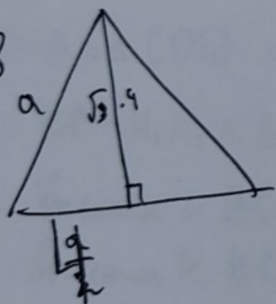
$BC = 2 \quad AD = 4$

$\frac{S\,ABT}{S\,ABCD} =$

$4 + 16 + 8 = 28$

$3 \cdot \sqrt{27}$

8



$a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{\frac{\sqrt{3}a^2}{2} \cdot a}{2} =$

$\frac{7\sqrt{3}}{3\sqrt{27}}$

$\frac{28 \cdot \sqrt{3}}{4}$

$7\sqrt{3}$

Чистовик.

пусть:

$$\begin{cases}\frac{1}{x^2+y^2}+x^2y^2=\frac{5}{4}\\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2=\frac{9}{4}\end{cases},\quad t=x^2+y^2,\quad u=x^2\cdot y^2,\ \text{тогда:}\ \begin{cases}t^{-1}+u=\frac{5}{4}\\ 2t^2+u=\frac{9}{4}\end{cases},$$

$$2t^2-t^{-1}=1 \Leftrightarrow 2t^3-t=1 \Leftrightarrow 2t^3-t-1=0 \Leftrightarrow (t-1)(2t^2+2t+$$

$t-1=0$ или $2t^2+2t+1=0$

$t=1$ $\qquad D<0$

$$t=1 \Rightarrow u=\frac{5}{4}-t^{-1}=\frac{1}{4}$$

$$\begin{cases}x^2+y^2=1\\ x^2y^2=\frac{1}{4}\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&\begin{cases}x^2+y^2=1\\ xy=\frac{1}{2}\end{cases}\\ &\begin{cases}x^2+y^2=1\\ xy=-\frac{1}{2}\end{cases}\end{aligned}\right. \Rightarrow \left[\begin{aligned}&\begin{cases}x^2+y^2=1\\ x=\frac{1}{2y}\end{cases}\\ &\begin{cases}x^2+y^2=1\\ x=-\frac{1}{2y}\end{cases}\end{aligned}\right. \Rightarrow \left[\begin{aligned}&\begin{cases}y^2+\frac{1}{4y^2}=1\\ x=\frac{1}{2y}\end{cases}\\ &\begin{cases}y^2+\frac{1}{4y^2}=1\\ x=-\frac{1}{2y}\end{cases}\end{aligned}\right. \Rightarrow$$

$$\left[\begin{aligned}&\begin{cases}4y^4+1-4y^2=0\\ x=\frac{1}{2y}\end{cases}\\ &\begin{cases}4y^4+1-4y^2=0\\ x=-\frac{1}{2y}\end{cases}\end{aligned}\right. \Rightarrow \left[\begin{aligned}&\begin{cases}(2y^2-1)^2=0\\ x=\frac{1}{2y}\end{cases}\\ &\begin{cases}(2y^2-1)^2=0\\ x=-\frac{1}{2y}\end{cases}\end{aligned}\right. \Rightarrow \begin{aligned}&y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &x=\mp\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

Ответ: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

1

Чистовик

2. всего узлов в квадрате (63×63), 62×62 и прямые $y=x$ и $y=63-x$ пересекаются в точке $(31,5; 31,5)$, поэтому лежащих на них точек 144, для любой точки выбрать кол-во способов себе вторую (из этих 144) $62\cdot62-1$, но нельзя чтобы они лежали на одной горизонтали или вертикали, поэтому вычитаем один столбец и одну строчку узлов (без этой точки) $= 2\cdot61$, поэтому для любой точки (из 144) кол-во вариантов: $62\times62-1-2\cdot61 = 3721$ способов, ~~т.к. точек 144, то 144~~ это для первых 62 точек ~~все~~ которые пусть лежат на прямой $y=63-x$, но когда мы будем выбирать точки на прямой $y=x$, то они будут повторяться с точками лежащими на прямой $y=63-x$, поэтому кроме тех, которые лежат на одной горизонтали и вертикали нужно ещё вычесть те, что лежат на другой прямой, поэтому: для первой прямой $3721\cdot62$ $(y=63-x)$ для второй прямой $(3721-60)\cdot62$, вычитаем 60, потому что 2 точки лежат на гориз. и верт. прямых к осям $\Rightarrow$ уже учтены.

Итого: $3721\cdot62+3661\cdot62=7381\cdot62=457622$ способа

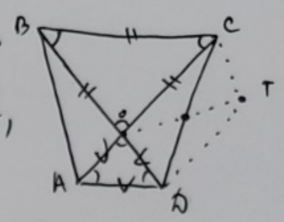
Ответ: 457622.

2

211005614 (U837016 M1278431)

Чистовик.

3.а. Т.к. $\triangle AOD$ и $\triangle BOC$ – правильные $\Rightarrow \angle CAD = \angle BCA \Rightarrow$



накрест. лежс. $\Rightarrow BC \parallel AD \Rightarrow ABCD$ – трапеция. и $\triangle ABO = \triangle DOC$,

по $BO = OC$, $AO = OD$ и $\angle BOA = \angle COD$ (верт.) $= 120^\circ$

$OC = DT$ и $OD = CT$, т.к. O симметрична точке T, поэтому $OCTD$ – парал

$\Rightarrow \angle ODC = \angle DCT$ (накрест. лежс $\angle$)(в парал. $OCTD$.) $\Rightarrow$

$\angle OCD + \angle DCT = 60^\circ \Rightarrow \angle BCT = 120^\circ$, тогда $\triangle BCT = \triangle BOA$ (по $BO = BC$, $CT = OA$ и $\angle BCT = \angle BOA$)

($\angle OCD + \angle DCT = 60^\circ$, т.к. $\angle OCD + \angle CDO = 60^\circ$)

аналогично $\triangle BOA = \triangle ADT$ (по $AD = OA$, $TD = BO$ и $\angle ADT = \angle BOA$,

также считается) $\Rightarrow \triangle BOA = \triangle BCT = \triangle ADT \Rightarrow BA = BT = AT. \Rightarrow$

$\triangle BAT$ – равносторонний (правильный)

3.б. Т.к $\triangle BOA = \triangle COD \Rightarrow ABCD$ – равнобокая трапеция., тогда

$2BH_1 = BC - H_1H_2 = BC - AD = 2 \Rightarrow BH_1 = 1$, по теореме Пифагора:

AH_1 – высота к BC

DH_2 – высота к BC

$BA^2 = BH_1^2 + AH_1^2$

также $AB^2 = BO^2 + OA^2 + 2 \cdot BO \cdot OA \cdot \cos 60^\circ = 4 + 16 + 16 \cdot \frac{1}{2} = 28 = (2\sqrt{7})^2 \Rightarrow$

$AB = 2\sqrt{7}$, тогда $AH_1^2 = BA^2 - BH_1^2 = 28 - 1 = \sqrt{27} \Rightarrow$

$$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{BA^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{BC+AD}{2} \cdot AH_1} = \left(\frac{(2\sqrt{7})^2 \cdot \sqrt{3}}{4}\right) : \left(\frac{(4+2)}{2} \cdot \sqrt{27}\right) = \frac{7\sqrt{3}}{3\sqrt{27}} = \frac{7\sqrt{3}}{9\sqrt{3}} = \frac{7}{9}$$

Ответ: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{7}{9}$

3