Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

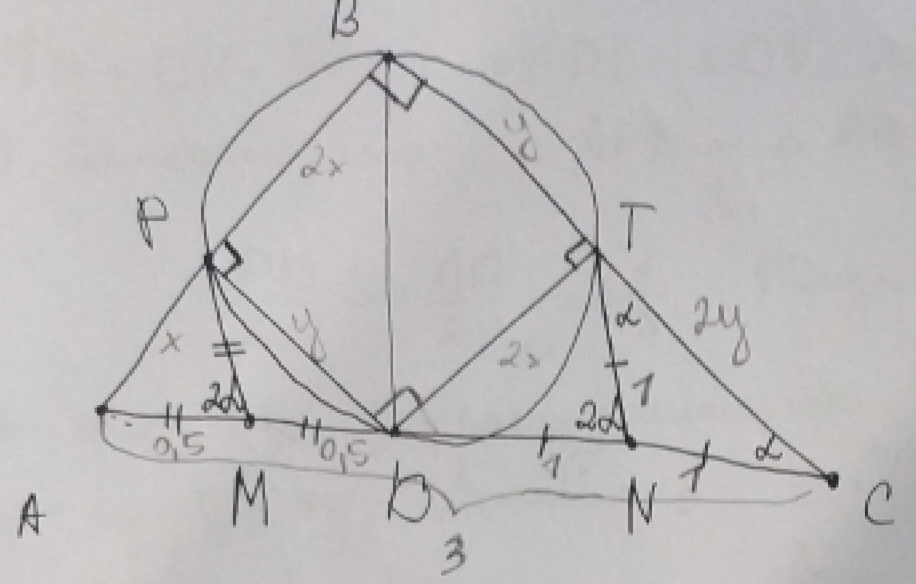
Шифр: **211005605**

ID профиля: **318273**

Вариант 12

Вариант 12 Чистовик

№1



Дано:

$\triangle ABC$, (·) $D \in AC$;

окр. с диаметром $BD \cap AB, BC =$ (·) P, T

$AM = MD$, $CN = ND$; $PM \parallel TN$

а) $\angle ABC$ - ?

б) $MP = \frac{1}{2}$; $NT = 1$; $BD = \frac{4}{3}$

S_{ABC} - ?

Решение:

П. а.:

1) Заметим, что т.к. по условию $PM \parallel TN$, то $\angle PMA = \angle TND$ (как ~~накрест~~ соответственные)

Тогда пусть $\angle TND = \angle PMA = 2\alpha$. Тогда т.к. $\angle DNT$ - внешний к $\triangle NTC$, то $\angle NTC + \angle NCT = 2\alpha = \angle PMA$.

2) Так как BD - диаметр окр. и (·) $P, T \in$ этой окружности, то $\angle BPD = \angle PTD = 90^\circ$ (как впис. углы, опир. на диаметр) $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow \triangle APD, \triangle DTC$ - прямоугольные, а т.к. $AM = MD$ и $DN = NC$, то по с-ву прямоугольного $\triangle$ $PM = AM = MD$, $TN = DN = NC$

$\Downarrow$

$\triangle AMP$ - р/б, $\triangle NTC$ - р/б

$\Downarrow$

$\angle NTC = \angle NCT \Longrightarrow$ (т.к. $\angle NTC + \angle NCT = 2\alpha$ (из внешнеописанного), то $\angle NTC = \angle NCT = \alpha$.

Аналогично в $\triangle AMP$ $\angle MAP + \angle MPA = 180^\circ - \angle AMP = 180^\circ - 2\alpha$, а т.к. $\angle MAP = \angle MPA$, то $\angle MAP = \angle MPA = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha$

$\Downarrow$

$\angle BAC + \angle BCA = 90^\circ - \alpha + \alpha = 90^\circ \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \angle ABC = 180^\circ - \angle BAC - \angle BCA = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

Ответ: 90°

П. б.:

1) Из предыдущего пункта в четырёхугольнике $PBTD$

Вариант 12 Чистовик

$\angle APB = 90° = \angle PBT = \angle BTD \Rightarrow$ (из с-во суммы углов четырёхугольника)

$\angle PDT = 90°$, а также $PM = AM = MD = \frac{1}{2} \Rightarrow AD = 2AM = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$,

$TN = DN = NC = 1 \Rightarrow DC = 2DN = 2 \Rightarrow AC = AD + DC = 1+2 = 3$

2) Заметим, что $\triangle APD \sim \triangle ADC$ (т.к. $\angle A$ - общий, $\angle APD = \angle ABC$)

$\Downarrow$

$\frac{PD}{BC} = \frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$. Тогда пусть $PD = y \Rightarrow BC = 3y$,

а т.к. $PBTD$ - прямоугольник, то $PD = BT = y \Rightarrow TC = BC - BT =$
$= 3y - y = 2y$; Аналогично $\triangle CTD \sim \triangle CBA$ (по двум углам)

$\Downarrow$

$\frac{CD}{CA} = \frac{2}{3} = \frac{TD}{BA}$. Пусть $TD = 2x \Rightarrow AB = 3x$, а т.к. $BP = TD = 2x$, то $AP = x$.

3) По т. Пифагора для прямоугольного $\triangle APD$:

$AP^2 + PD^2 = AD^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$.

Для прямоугольного $\triangle DPB$: $BD^2 = PD^2 + BP^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{16}{9} = 4x^2 + y^2 = 3x^2 + (x^2 + y^2) = 3x^2 + 1$

$\Downarrow$

$3x^2 = \frac{16}{9} - 1 = \frac{7}{9}$

$\Downarrow$

$x^2 = \frac{7}{9} : 3 = \frac{7}{9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{27} \rightarrow x = \sqrt{\frac{7}{27}} = \frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}$

4) $y^2 = 1 - x^2 = 1 - \frac{7}{27} = \frac{20}{27} \rightarrow y = \frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}$

5) $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot 3y = \frac{9}{2} \cdot x \cdot y = \frac{\cancel{9}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\cancel{3}\sqrt{3}} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{\cancel{3}\sqrt{3}} =$
$= \frac{\sqrt{35}}{3}$

Ответ: $\frac{\sqrt{35}}{3}$

№2

ОДЗ:
$x \in [-1; 4]$

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4 + 3x - x^2}$

Заметим, что $4 + 3x - x^2 = (x+1)(4-x)$

Тогда сделаем замену: пусть $x+1=a,\ 4-x=b;\ a,b\geqslant 0$

Тогда: $\sqrt{a}-\sqrt{b}+3=2\sqrt{ab}$

$$\underbrace{\sqrt{a}+3}_{\geqslant 0}=\underbrace{2\sqrt{ab}+\sqrt{b}}_{\geqslant 0}$$

$\Updownarrow$

$$a+9+6\sqrt{a}=4ab+b+4\sqrt{ab^2}=4ab+b+4b\sqrt{a}$$

$$a+9-4ab-b\underset{(\mathrm{II})}{=}(4b-6)\sqrt{a}\ \longrightarrow\ \sqrt{a}=\frac{a+9-4ab-b}{4b-6}$$

$$(x+1)+9-4(4+3x-x^2)-4+x=(16-4x-6)\cdot\sqrt{x+1}$$

$$\cancel{x}+10-16-\cancel{12}x+4x^2-\cancel{4}+x=(10-4x)\sqrt{x+1}$$

$$4x^2-10x-6=(10-4x)\sqrt{x+1}\ \Big|:2$$

$$2x^2-5x-3=(5-2x)\sqrt{x+1}$$

$D=25+24=7^2$

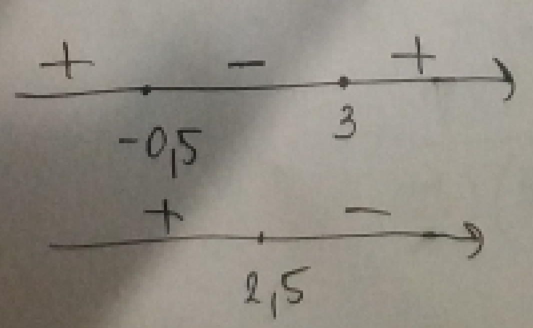
$x_1=\frac{5-7}{4}=-\frac{1}{2};\ x_2=\frac{12}{4}=3$

$$(x-3)(x+0{,}5)=(5-2x)\sqrt{x+1}$$

$$\sqrt{x+1}=\frac{(x-3)(x+0{,}5)}{5-2x}\iff\begin{cases}\frac{(x-3)(x+0{,}5)}{5-2x}\geqslant 0\\ x+1=\frac{(x-3)^2(x+0{,}5)^2}{(5-2x)^2}\end{cases}\iff$$

$$\iff\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}(x-3)(x+0{,}5)\geqslant 0\\ 5-2x>0\end{cases}\\ \begin{cases}(x-3)(x+0{,}5)\leqslant 0\\ 5-2x<0\end{cases}\end{array}\right. (1)\\ x+1=\frac{(x^2-6x+9)(x^2+x+0{,}25)}{25-20x+4x^2}\ (2)\end{cases}\overset{ОДЗ}{\iff}\begin{cases}x\in[-1;-0{,}5]\cup\\ \cup(2{,}5;3]\\ x=0\end{cases}$$

$$(1):\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}(x-3)(x+0{,}5)\geqslant 0\\ 5-2x>0\end{cases}\\ \begin{cases}(x-3)(x+0{,}5)\leqslant 0\\ 5-2x<0\end{cases}\end{array}\right.\iff\left[\begin{array}{l}x\in(-\infty;-0{,}5]\\ x\in(2{,}5;3]\end{array}\right.$$



Вариант 12 Чистовик

(2): $x+1 = \dfrac{x^4 - x^3 + 0{,}25x^2 - 6x^3 - 6x^2 - 1{,}5x + 9x^2 + 9x + \frac{9}{4}}{4x^2 - 20x + 25}$

$4x^3 - 20x^2 + 25x + 4x^2 - 20x + 25 = 4x^3 - 16x^2 + 5x + 25 =$

$= x^4 - 7x^3 + 3{,}25x^2 + 7{,}5x + \frac{9}{4}$

$x^4 - 11x^3 + 19{,}25x^2 + 2{,}5x - 22\frac{3}{4} = 0 \quad |\cdot 4$

$4x^4 - 44x^3 + 77x^2 + 10x - 91 = 0$

Черновик:

$a + 9 + 6\sqrt{a} = 4ab + b + 4\sqrt{ab^2}$

$\underbrace{a + 9 - 4ab - b}_{\geq 0} = 4\sqrt{ab^2} - 6\sqrt{a} = \underbrace{(4\sqrt{b^2} - 6)}_{\geq 0}\sqrt{a}$

!

$(a+9-4ab-b)(a+9-4ab-b) = (4\sqrt{b^2} - 6)\sqrt{a}$

$a^2 + 9a - 4a^2b - ab + 9a + 81 - 36ab - 9b - 4a^2b - 36ab + 16a^2b^2 +$

$+ 4ab^2 - ab - 9b + 4ab^2 + b^2 = a^2(1 - 4b - 4b + 16b^2) +$

$+ a(9 - b + 9 - 36b - 36b + 4b^2 - b + 4b^2) + 81 - 9b -$

$- 9b + b^2 = a^2 \cdot (4b-1)^2 + a(2b+3)^2 + (b-3)^2 =$

$= b(-4a - 1 - 4\sqrt{a})$

$\dfrac{8b^2 - 24b + 18}{8b^2 - 74b + 18}$

$a + 9 + 6\sqrt{a} - 4ab - b - 4b\sqrt{a} = 0$

$a(1 - 4b) + (6 - 4b)\sqrt{a} - b + 9 = 0$ //

$D = \dfrac{36 - 48b + 16b^2}{(4 - 16b)(9 - b)} = \dfrac{16b^2 - 48b + 36}{36 - 4b - 144b + 16b^2} = \dfrac{16b^2 - 48b + 36}{16b^2 - 148b + 36}$

Чистовик

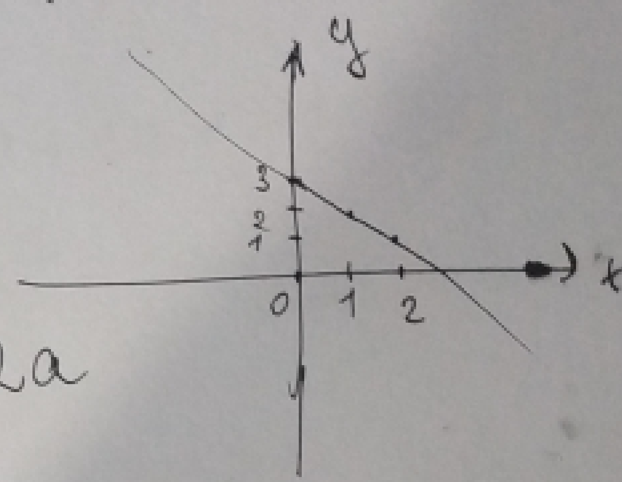
Вариант 12

№3

$2a^2 - 2ax - 6ay + x^2 + 2xy + 5y^2 = 0$

$ax^2 + 4a^2x - ay + 4a^3 + 2 = 0$

$x + y = 3 \Rightarrow y = 3 - x$



$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{4a^2}{2a} = -2a$

$y_0 = a \cdot 4a^2 + 4a^2 \cdot (-2a) - ay + 4a^3 + 2 =$

$= \cancel{4a^3} - \cancel{8a^3} - ay + \cancel{4a^3} + 2 = 2 - ay$ (вершина, (·) B)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211005605**

ID профиля: **318273**

Вариант 12

Чистовик

Вариант 12

№4

ОДЗ:
$x^2+y^2 \neq 0$

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2 = \frac{9}{4} \quad (2) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Big[(2) \Leftrightarrow (x^4+2x^2y^2+y^4)\cdot 2 + x^2y^2 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow 2\cdot(x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = \frac{9}{4} \Big]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \quad (1) \\ 2(x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = \frac{9}{4} \quad (2) \end{cases};$$ Вычтем из (2) − (1):

$$2(x^2+y^2)^2 - \frac{1}{x^2+y^2} + \cancel{x^2y^2} - \cancel{x^2y^2} = 1$$

Замена: Пусть $t = x^2+y^2,\ t \neq 0$

$$2t^2 - \frac{1}{t} = 1 \Leftrightarrow \frac{2t^3-1}{t} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = 2t^3 - 1 \Leftrightarrow t - t^3 = t^3 - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t(1-t^2) = (t-1)(t^2+t+1) \Leftrightarrow t(1-t)(1+t) = (t-1)(t^2+t+1)$$

$$\Updownarrow$$

$$-t(t-1)(1+t) = (t-1)(t^2+t+1)$$

- либо $t-1=0 \Leftrightarrow x^2+y^2=1$ – подходит
- либо $-t(1+t) = t^2+t+1 \Leftrightarrow -t-\cancel{t^2} = \cancel{t^2}+t+1$

$2t^2+2t+1=0$

$D = 4-8<0 \Rightarrow t \in \varnothing$

$$\Downarrow$$

$x^2+y^2=1 \Rightarrow$ (из первого уравнения системы)

$$x^2y^2 = \frac{5}{4} - \frac{1}{1} = \frac{1}{4}$$

$$\Downarrow$$

Вариант 12

$\Downarrow$

$$\begin{cases} x^2y^2 = \frac{1}{4} \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Rightarrow x^2 = 1-y^2 \Rightarrow x^2y^2 = (1-y^2)y^2 =$$

$$= y^2 - y^4 = \frac{1}{4} \cancel{\pm y^2(1-y^2)}$$

$$y^4 - y^2 + \frac{1}{4} = 0$$ Пусть $y^2 = m$, $m \geq 0$. Тогда:

$$m^2 - m + \frac{1}{4} = 0 \quad |\cdot 4$$

$$4m^2 - 4m + 1 = 0$$

$$D = 16-16 = 0; \quad m = \frac{4-0}{8} = \frac{1}{2};$$

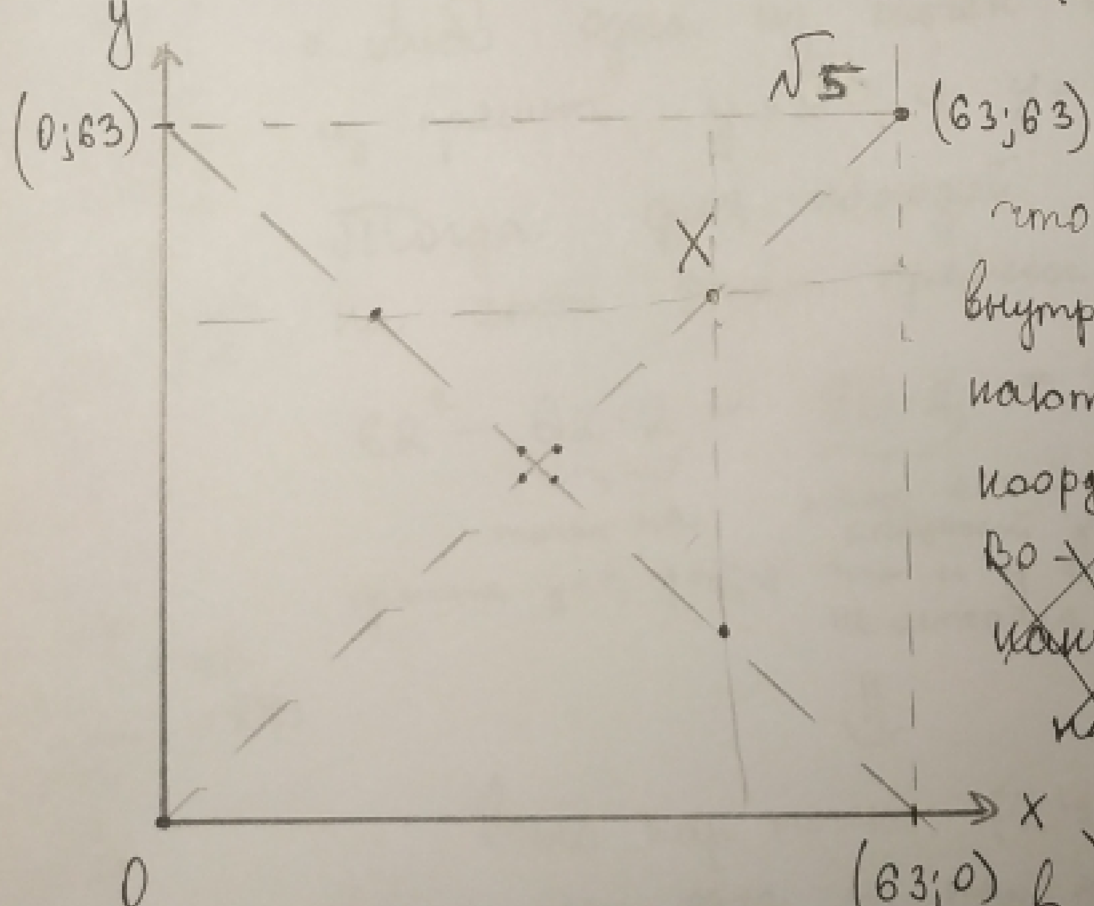
$\Downarrow$

$$y^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt2} = \pm\frac{\sqrt2}{2} \Rightarrow x^2 = 1-y^2 =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt2}{2}$$

Ответ: $\left(\pm\frac{\sqrt2}{2}; \pm\frac{\sqrt2}{2}\right)$ (т.е. ответ: $\left(\frac{\sqrt2}{2}; -\frac{\sqrt2}{2}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt2}{2}; \frac{\sqrt2}{2}\right)$; $\left(\frac{\sqrt2}{2}; \frac{\sqrt2}{2}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt2}{2}; -\frac{\sqrt2}{2}\right)$)

№5



Во-первых замечу, что прямые $y=x$ и $y=63-x$ внутри квадрата не пересекаются в точке с целыми координатами.

~~Во-вторых, рассмотрим какую-то точку X на прямой $y=x$ (например). Помимо неё в квадрате находится ещё 62^2-1 (= 3853) точек, то есть возможных пар с ней (с (·) X) можно составить 3853 штуки. Но нам не подходят пары с такой же абсциссой или~~

Чистовик

Вариант 12

Заметим, что есть два варианта подходящей пары точек:

• Либо обе точки лежат на прямых $y=x$ или $y=63-x$: Тогда для любой точки мы можем составить пару с одной из оставшихся 61 точки с её прямой или (т.к. ровно две выпадают из-за условия непараллельности прямых осям) с одной из 60 точек на другой прямой (из прямых $y=x$ и $y=63-x$). А всего точек на прямых $y=x$ и $y=63-x$ — $62+62=124$, т.е. всего пар: $124\cdot(60+61)=124\cdot121$. Но мы учитывали каждую пару дважды (при рассмотрении каждой точки)

$\Downarrow$

всего пар (в итоге): $\frac{124\cdot121}{2}=121\cdot62=$

$=7502$

• Либо одна из точек лежит на какой-то из прямых $y=x$ и $y=63-x$, а другая — нет. Тогда для каждой из 124 точек, лежащих на ~~этой~~ этих прямых есть ровно:

$$62^2-\underbrace{62\cdot2}_{\text{точки на прямых } y=x,\ y=63-x}-\underbrace{60\cdot2}_{\text{точки с той же абсциссой или ординатой, что и у выбранной точки, не лежащие на прямых } y=x \text{ и } y=63-x}=3844-2(60+62)=3844-244=$$

$=3600$

$\Downarrow$

Всего пар точек: $124\cdot3600=446400$ (тут ни одна из пар не учтена дважды)

В итоге подходящих пар: $446400+7502=$ $=453902$

Ответ: 453902

121×62: 242, 726, 7502

62×62: 124, 372, 3844

$2\cdot122=244$

124×36: 744 00, 372, 446400

Вариант 12 Чистовик

По т. синусов для $\triangle OCD$:

$$\frac{\sin(60^\circ-\alpha)}{OD} = \frac{\sin\angle ODC}{OC} \Leftrightarrow \frac{\sin 60^\circ\cos\alpha - \cos 60^\circ \sin\alpha}{y} = \frac{\sin\alpha}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha}{y} = \frac{\sin\alpha}{x}$$

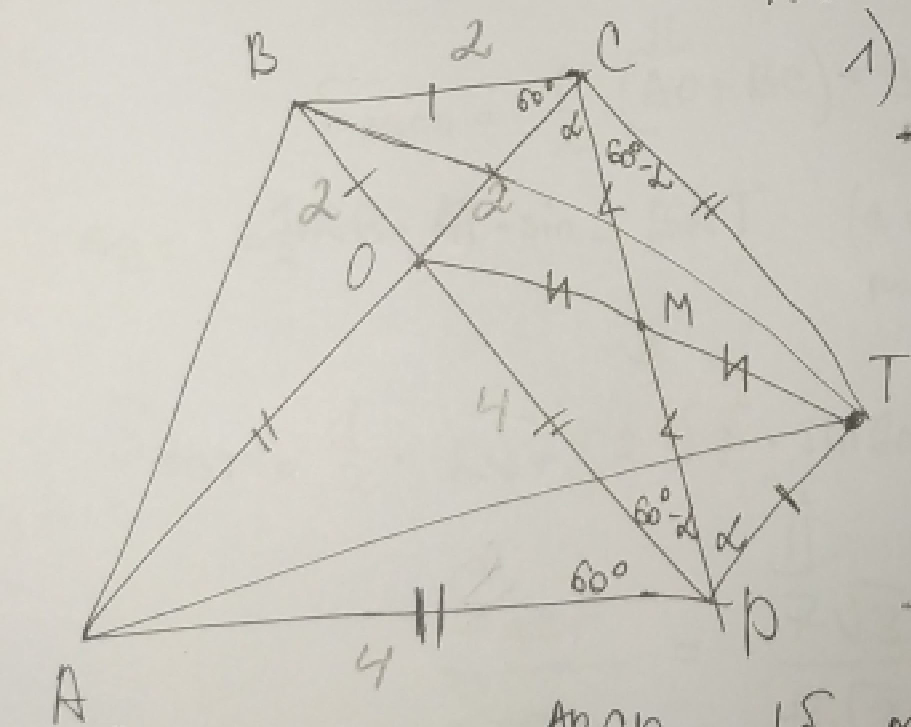
$$\Downarrow$$

$$x = \frac{\sin\alpha\cdot y}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha}$$

Тогда $BT^2 = 2\cdot\frac{\sin^2\alpha\cdot y^2}{\frac{3}{4}\cos^2\alpha + \frac{1}{4}\sin^2\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha\sin\alpha}(1+\cos 2\alpha)$

$AT^2 = 2y^2\left(1-\frac{1}{2}(\cos 2\alpha - \sqrt{3}\sin 2\alpha)\right)$

$\sqrt{6}$



1) Заметим, что OCTD — параллелограмм (по с-ву симметрии, т.к. $\triangle OCD = \triangle TDC$ — по двум сторонам и углу)

$\Downarrow$

Пусть $\angle OCD = \alpha$, тогда $\angle CDT = \alpha$.

2) Заметим, что ABCD — р/б трапеция (т.к. $\angle BCA = \angle CAD$, $\angle CBD = \angle BDA$ — как накрест лежащие при $BC \parallel AD$ и $\triangle BOA = \triangle COD$ — по двум сторонам и углу между ними) $\Longrightarrow \angle COD = 180^\circ - \angle OCB = 120^\circ \Longrightarrow \angle ODC = 180^\circ - \angle DOC - \angle OCD = 60^\circ - \alpha = \angle DCT$.

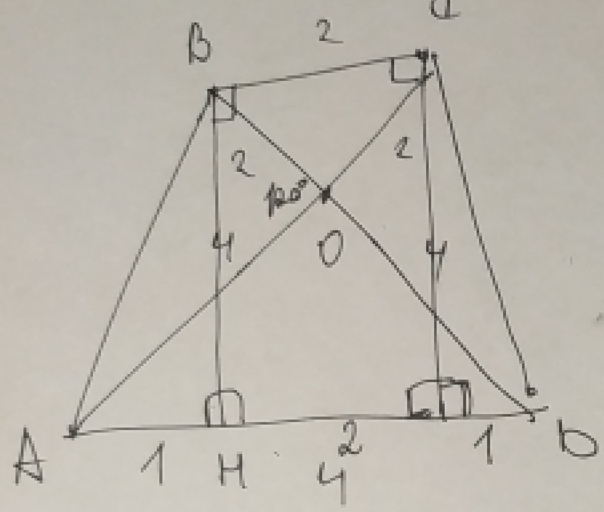
Тогда $\angle BCT = \angle BCO + \angle OCD + \angle DCT = 60^\circ + \alpha + (60^\circ - \alpha) = 120^\circ = \angle ADB + \angle BDC + \angle CDT = \angle BOA$, $AD = CT = AO$, $BC =$

$= TD = BO \Rightarrow \triangle ABO = \triangle TBC = \triangle ATD \Rightarrow BT = AT = AB$

как равные элементы равных фигур. ч.т.д.

$\triangle ABT$ – правильный

3) $S_{ABCD} = 9\sqrt{3}$, т.к.:



Опустим BH, тогда $AH = AD - DH =$

$= AD - BC - AH \Rightarrow AH = 1$,

$AB =$ (по т. косинусов для $\triangle ABO$) $=$

$= \sqrt{AO^2 + BO^2 - 2 \cdot AO \cdot BO \cdot \cos 120^\circ} =$

$= \sqrt{16 + 4 + 8} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

$\Downarrow$

$BH =$ (по т. Пифагора) $\sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{28 - 1} = \sqrt{27} =$
$= 3\sqrt{3}$

$\Downarrow$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot (AD + BC) \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3\sqrt{3} = 3 \cdot 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$$

$S_{ABT} = \frac{1}{2} AB \cdot AT \cdot \sin \angle BAT$ (а т.к. $\triangle ABT$ – правильный, то $AB = AT = 2\sqrt{7}$, $\angle BAT = 60^\circ$)

$\Downarrow$

$$S_{ABT} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{7} \cdot 2\sqrt{7} \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{4} \cdot 7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} = 7\sqrt{3}$$

$\Downarrow$

$$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{7\sqrt{3}}{9\sqrt{3}} = \frac{7}{9}$$

Ответ: $\frac{7}{9}$