Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

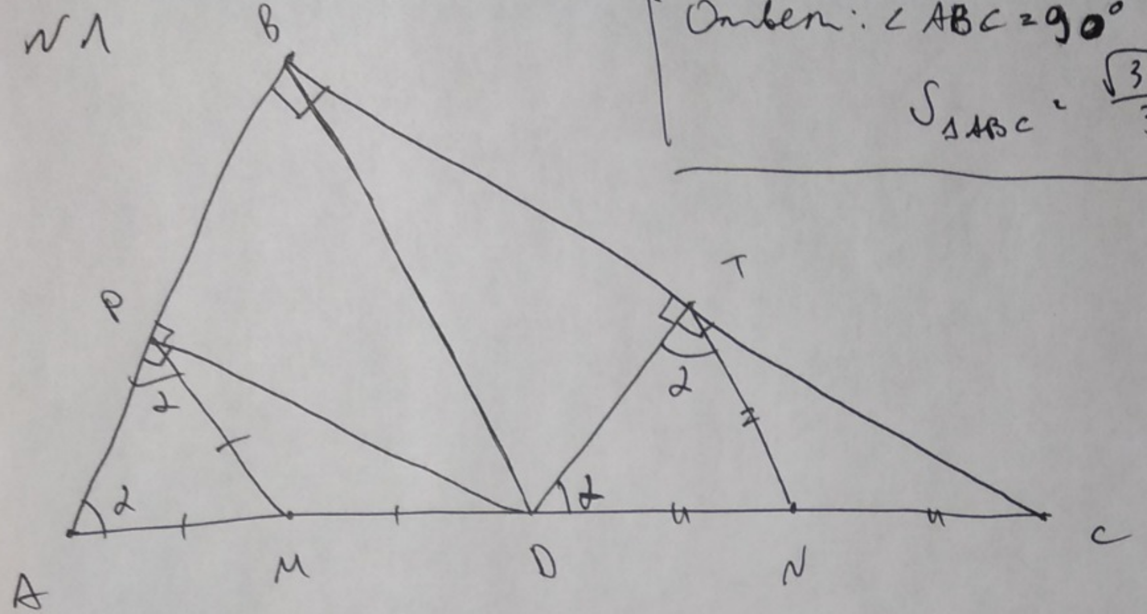
Шифр: **211005598**

ID профиля: **834703**

Вариант 12

Чистовик.

№1



Ответ: $\angle ABC = 90^\circ$

$S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{35}}{3}$

1) $\angle BPD = \angle BTD = 90^\circ$ т.к. вписанные и опираются на диаметр BD.

$\Downarrow$

$\angle APD = \angle DTC = 90^\circ$

$\Downarrow$

в ΔAPD и ΔDTC – прямоугольных PM и NT – медианы $\Rightarrow AM = MD = PM$, $DN = NC = TN$

2) пусть $\angle A = \alpha$

$\angle APM = \alpha$ т.к. ΔAPM – равнобедренный

$$\underbrace{\underbrace{\angle AMP = 180^\circ - 2\alpha}_{\text{из } \Delta APM} = \angle DNT}_{\text{из параллельности PM и TN}}$$

в ΔDNT – $\angle DNT = 180^\circ - 2\alpha$
– равнобедренном $\Big| \Rightarrow \angle TDN = \angle DTN = \alpha$

3) в ΔDTC – прямоугольном

$\angle DCT = 90^\circ - \alpha$

Чистовик

№1 (продолжение)

~~$\angle ABC +$~~

4) в ΔABC:

$$\angle ABC + \alpha + 90^\circ - \alpha = 180^\circ$$

$$\boxed{\angle ABC = 90^\circ}$$

5) $\Delta ABC \sim \Delta APD \sim \Delta DTC$ (по двум углам)

$\frac{AC}{AD} = \frac{3}{1}$ | $BC = 3PD$

$\frac{BC}{PD} = \frac{3}{1}$ | $AB = 3AP$

$\frac{AB}{AP} = \frac{3}{1}$ | пусть $PD = x$

$AP^2 + x^2 = 1$

$AP = \sqrt{1-x^2}$

$BP = 2AP = 2\sqrt{1-x^2}$

$BP^2 + x^2 = (4/3)^2$

$4(1-x^2) + x^2 = 16/9$

$3x^2 = \frac{20}{9}$

$x = \sqrt{\frac{20}{27}}$

$BC = 3\sqrt{\frac{20}{27}}$

6) $AB^2 + BC^2 = (\underbrace{AM + MD + DN + NC}_{3})^2$

(пояснение:
$AM = MD = MP = 1/2 \Rightarrow AM + MD = 1$
$DN = NC = NT = 1 \Rightarrow DN + NC = 2$)

пусть $AB = y$

$y^2 + 9 \cdot \frac{20}{27} = 9$ $\quad y^2 = \frac{7}{3}$

$AB = y = \sqrt{7/3}$

7) $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC$

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{7}{3}} \cdot \sqrt{\frac{20}{27}} \cdot 3 = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{7 \cdot 4 \cdot 5}}{3^2} = \frac{\sqrt{35}}{3}$ $\quad \boxed{S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{35}}{3}}$

2

Чистовик

№3 (продолжение)

1 случ:

$$\begin{cases} \frac{7}{10}a > 3 + \frac{a}{2} & (1) \\ \frac{2}{a} > 3 + 2a & (2) \end{cases}$$

(1) $\frac{7}{10}a - \frac{1}{2}a - 3 > 0$

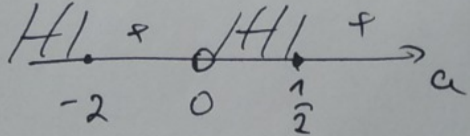
$\frac{2}{10}a - 3 > 0$

$\frac{1}{5}a > 3$

$a > 15$

(2) $\frac{2a^2 + 3a - 2}{a} < 0$

$\frac{(a - \frac{1}{2})(a+2)}{a} < 0$



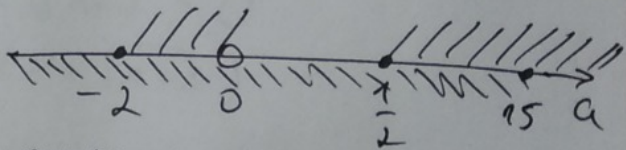
корней нет.

2 случ:

$$\begin{cases} \frac{7}{10}a < 3 + \frac{a}{2} & (1) \\ \frac{2}{a} < 3 + 2a & (2) \end{cases}$$

используя предыдущие вычисления, получаем

$$\begin{cases} a < 15 \\ \frac{(a - \frac{1}{2})(a+2)}{a} > 0 \end{cases}$$



решения:

$a \in [-2; 0) \cup [\frac{1}{2}; 15]$

Ответ: ~~[-2;~~

$a \in [-2; 0) \cup [\frac{1}{2}; 15]$

Чистовик

№2

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+3=2\sqrt{4+3x-x^2}$$

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+3=2\sqrt{(x+1)}\cdot\sqrt{4-x}$$

$$\boxed{\text{ОДЗ}: -1\le x\le 4}$$

$$\sqrt{x+1}+3=\sqrt{4-x}\,(2\sqrt{x+1}+1)$$

$$x+1+9+6\sqrt{x+1}=(4-x)(4x+4+1+4\sqrt{x+1})$$

$$x+10+6\sqrt{x+1}=16x+16+4+16\sqrt{x+1}-4x(x+1)-x-4x\sqrt{x+1}$$

$$5x+5-2x^2+5\sqrt{x+1}-2x\sqrt{x+1}=0$$

$$5\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}+1)=2x(x+\sqrt{x+1})$$

Черновик

$3x^2 = 4 - 16/9 = \frac{4\cdot 9 - 16}{9} = \frac{36-16}{9} = \frac{20}{9}$

$x^2 = \frac{20}{27}$

$x = \sqrt{\frac{20}{27}}$

$BC = 3x = 3\sqrt{\frac{20}{27}}$

$AB^2 + BC^2 = 9$

$AB = y$

$y^2 + 9\cdot\frac{20}{27} = 9$

$y^2 = 9 - 9\cdot\frac{20}{27} = 9\left(1-\frac{20}{27}\right) = 9\cdot\frac{7}{27} = \frac{7}{3}$

$AB = y = \sqrt{\frac{7}{3}}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{7}{3}}\cdot\sqrt{\frac{20}{27}}\cdot 3 =$

$\sqrt{2\cdot 4\cdot 5}$

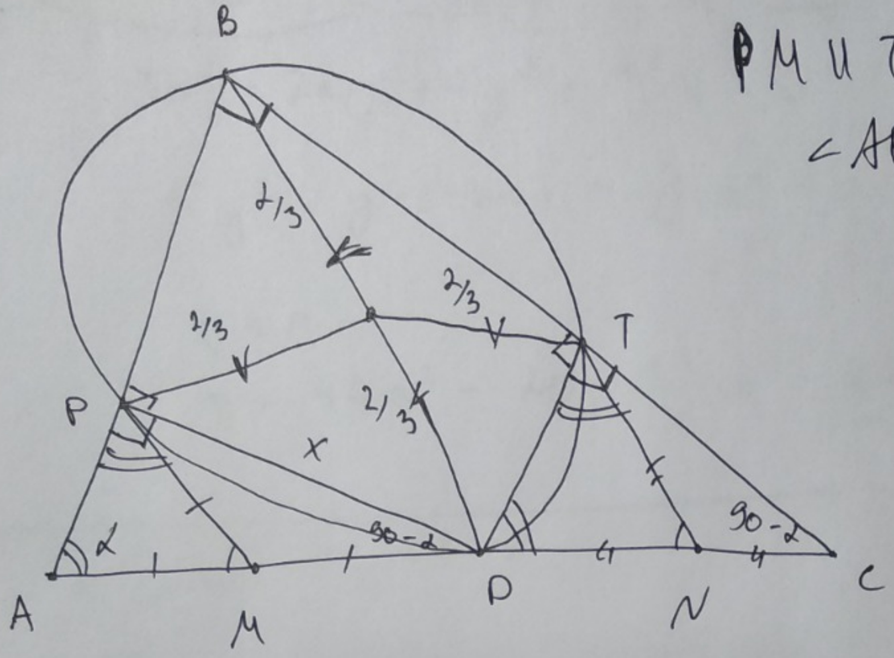
$= \frac{3}{2}\cdot\sqrt{\frac{7\cdot 20}{3^4}} = \frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{7\cdot 20}}{3^2} = \frac{\sqrt{7\cdot 20}}{2\cdot 3} =$

$= \frac{\cancel{2}\sqrt{35}}{\cancel{2}\cdot 3} = \frac{\sqrt{35}}{3}$

Ответ: $\frac{\sqrt{35}}{3}$.

6

Черновик



PMUTN

$\angle ABC = ?$

$MP = 1/2$

$NT = 1$

$BD = 4/3$

$S_{ABC} = ?$

$\angle ABC + \cancel{\alpha} + 90 - \cancel{\alpha} = 180$

$\angle ABC = 90°$

$AD = 1 \qquad DC = 2$

$\triangle ABC \sim \triangle APD \sim \triangle DTC$

$\frac{AC}{AD} = \frac{3}{1} = \frac{BC}{PD} = \frac{AB}{AP} \qquad BC = 3PD$

$AB = 3AP$

$PD = x$

~~BT = BC~~

$AP^2 + x^2 = 1$

$AP^2 = 1 - x^2$

$AP = \sqrt{1-x^2}$

$BP = 2AP = 2\sqrt{1-x^2}$

$BP^2 + x^2 = (4/3)^2$

$4(1-x^2) + x^2 = 16/9$

$4 - 4x^2 + x^2 = 16/9$

$4 - 3x^2 = 16/9$

$3x^2 = 4 - 16/9$

7

~~$12 x$~~

211005598 (U834703 M1277352)

Черновик.

$$2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0$$

$$ax^2+4a^2x-ay+4a^3+2=0$$

$$ax^2+4a^2x+4a^3+2=ay$$

$$y=x^2+4ax+4a^2+2/a$$

$$y=\frac{-b}{2a}$$

$x+y=3$

$y=3-x$

$$x_в=\frac{-b}{2a}$$

B

$$x_в=\frac{-4a}{2}=-2a$$

$$y_в=\cancel{4a^2}-\cancel{8a^2}+\cancel{4a^2}+2/a=2/a$$

A

$$2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0$$

$$5y^2+y(2x-6a)+x^2-2ax+2a^2=0$$

$40-24=16$

$D=0$

$$D=(2x-6a)^2-20(x^2-2ax+2a^2)=0$$

$$4x^2+36a^2-24ax-20x^2+40ax-40a^2=0$$

$$-16x^2-4a^2-16ax=0$$

$$16x^2+4a^2+16ax=0$$

$$4x^2+a^2+4ax=0$$

$$(2x)^2+2\cdot a\cdot 2x+(a)^2=0$$

$$(2x+a)^2=0 \qquad 2x+a=0 \qquad 2x=-a \qquad x=-a/2$$

8

211005598 (U834703 M1277352)

$2a^4+2a^3-9a^2-7a+4=0$ чорновик ~~$-2+7+4=2$~~

$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+3=2\sqrt{(x+1)(4-x)}$

ОДЗ: $\begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 4 \end{cases}$ $\boxed{-1 \leq x \leq 4}$

$\boxed{\begin{array}{l} a=\sqrt{x+1} \\ a \geq 0 \end{array}}$

$a-\sqrt{5-a^2}+3=2a\sqrt{5-a^2}$

$a+3=2a\sqrt{5-a^2}+\sqrt{5-a^2}$

$a+3=\sqrt{5-a^2}(2a+1)$

$a^2+6a+9=(5-a^2)(4a^2+4a+1)$

$2a^4+2a^3-9a^2-7a+4=0$

$2a^4+2a^3-2a^2-2a+2-7a^2-5a+2=0$

~~$(2a^4-9a^2+\ldots)+(2a^3-7a+\ldots)=0$~~

$2(x+1)^2-9(x+1)+4+\sqrt{x+1}(2(x+1)-7)=0$

$2x^2+4x+2-9x-9+4+\sqrt{x+1}(2x+2-7)=0$

$2x^2-5x+6+\sqrt{x+1}(2x-5)=0$

~~$x(2x-5)+6+$~~

$D=25-4\cdot2\cdot6<0$

1) $32+16-36-14+4=$

$=$ ~~4~~ $+2$ ~~$+4$~~ $=2$

-1) ~~$2+2-9+7+4$~~

-2) $32-16-36+14+4=$

$=$ ~~-4~~ $-2+4$

Черновик.

$\sqrt{x+1}+3=2\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{4-x}+\sqrt{4-x}$

$\sqrt{x+1}+3=\sqrt{4-x}\,(2\sqrt{x+1}+1)$

$\cancel{\sqrt{x+1}=\sqrt{4-x}\,(2\sqrt{x+1}+1)-3}$ ~~| в квадр.~~

$\cancel{x+1=(4-x)(4(x+1)+}$

$x+1+9+6\sqrt{x+1}=(4-x)(4(x+1)+1+4\sqrt{x+1})$

$x+10+6\sqrt{x+1}=16x+16+4+16\sqrt{x+1}-4x(x+1)-x-4x\sqrt{x+1}$

$x+10=16x+20+10\sqrt{x+1}-4x^2-4x-x-4x\sqrt{x+1}$

$x=16x+10+10\sqrt{x+1}-4x^2-4x-x-4x\sqrt{x+1}$

$16x+10+10\sqrt{x+1}-4x^2-4x-2x-4x\sqrt{x+1}=0$

$16x-6x+10+10\sqrt{x+1}-4x^2-4x\sqrt{x+1}=0$

$10x+10-4x^2+10\sqrt{x+1}-4x\sqrt{x+1}=0$

$5x+5-2x^2+5\sqrt{x+1}-2x\sqrt{x+1}=0$

$\cancel{\sqrt{x+1}(5-2x)}$

$\cancel{5x+5-2x^2=\sqrt{x+1}(2x-5)}$

$5(x+1)+5\sqrt{x+1}-2x^2-2x\sqrt{x+1}-2+2=0$

10

$5\sqrt{x+1}\,(\sqrt{x+1}+1)-2x(x+\sqrt{x+1})=0$

$5\sqrt{x+1}\,(\sqrt{x+1}+1)=2x(x+\sqrt{x+1})$

$5(x+1)(x+1+1+2\sqrt{x+1})=4x^2(x^2+x+1+2x\sqrt{x+1})$

Черновик

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+3=2\sqrt{4+3x-x^2}$$

Написать ограничения на x!

$$4+3x-x^2=-(x^2-3x-4)=-(x+1)(x-4)$$

-1

$1+3-4=0$

4

$16-12-4=0$

$$\boxed{\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+3=2\sqrt{(x+1)(4-x)}}$$

$a=\sqrt{x+1}$ $\qquad a^2=x+1$ $\qquad -a^2+5=-x+4=4-x$

$\cancel{b=\sqrt{4-x}}$ $\qquad -a^2=-x-1$ $\qquad \sqrt{5-a^2}=\sqrt{4-x}$

$b=\sqrt{4-x}$

$\cancel{a-b+3=2ab}$

$a-b+3=2ab$

$\cancel{a-2ab-b+3=0}$

$a+3=2ab+b$

$a+3=b(2a+1)$

$$b=\frac{a+3}{2a+1}$$

$$b=\frac{a+3}{2a+1}=\sqrt{5-a^2}$$

$$\left(\frac{a+3}{2a+1}\right)^2=5-a^2$$

$$\frac{a^2+6a+9}{4a^2+4a+1}=5-a^2$$

M

$a^2+6a+9=(5-a^2)(4a^2+4a+1)$

$a^2+6a+9=20a^2+20a+5-4a^4-4a^3-a^2$

$a^2-20a^2+a^2+6a-20a+9-5+4a^4+4a^3=0$

$-18a^2-14a+4+4a^4+4a^3=0$

19

211005598 (U834703 M1277352)

черновик

$2a^2 + 2a \cdot a/2 - 6ay + a^2/4 - ay + 5y^2 = 0$

$3a^2 - 7ay + 5y^2 + a^2/4 = 0$

$5y^2 + y \cdot (-7a) + \frac{13}{4} a^2 = 0$

$D = 0$

$D = 49a^2 - 20 \cdot \frac{13}{4} a^2 = 49a^2 - 5 \cdot 13 \cdot a^2 = 0$ бред.

в выше $y = 3 - x$

т.е.

$y > 3 - x$

$2/a > 3 + 2a$

$\frac{2}{a} > \frac{3a + 2a^2}{a}$

$\frac{2a^2 + 3a - 2}{a} < 0$

$D = 9 + 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25$

$x_1 = \frac{-3 \pm 5}{4}$

$\frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}$

$\frac{-3-5}{4} = -2$

~~$(a + 1/2)($~~

$\frac{(a - 1/2)(a + 2)}{a} < 0$

$(a - 1/2)(a + 2)a < 0$

$+$ $+$ a

-2 0 $\frac{1}{2}$

$y > 3 - x$ $y > 3 - x$

$y < 3 - x$ $y < 3 - x$

12

№3 Черновик

$2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0$ ① для точки А.

$5y^2+y(2x-6a)+(x^2-2ax+2a^2)=0$

(квадратное относительно y)

$D=(2x-6a)^2-20(x^2-2ax+2a^2)=4x^2+36a^2-24ax-$

$-20x^2+40ax-40a^2=-16x^2-4a^2-16ax=$

$=-(2x+a)^2\le 0$

по условию решение у уравнения существует

$\Downarrow$

$D=-(2x+a)^2=0$

$2x+a=0$

$x=-a/2$

$y=\frac{-(2x-6a)}{2\cdot 5}=\frac{6a-2x}{10}=\frac{3a-x}{5}=\frac{3a+a/2}{5}=$

$=\frac{3a}{5}+\frac{a}{10}=\frac{6a}{10}+\frac{a}{10}=\frac{7}{10}a$

② для точки В

$ax^2+4a^2x-ay+4a^3+2=0$

$y=x^2+4ax+4a^2+2/a$

по условию В – вершина параболы

$x=\frac{-4a}{2}=-2a$

$y_B=\cancel{4a^2}-\cancel{8a^2}+\cancel{4a^2}+2/a=2/a$ } по известной школьной формуле координат вершины параболы

Имеем в итоге:

$A(-a/2;\frac{7}{10}a)$, $B(-2a;2/a)$

должны быть расположены по одну сторону от $x+y=3$ $(y=3-x)$

3

211005598 (U834703 M1277352)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211005598**

ID профиля: **834703**

Вариант 12

Чистовик. Вариант 12.

№4

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \quad (1) \\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2 = \frac{9}{4} \quad (2) \end{cases}$$

ОДЗ: $x^2+y^2 \neq 0$

$(a+b \neq 0)$

сделаем замену: $a = x^2$, $b = y^2$ $(a, b \geq 0)$

$$\begin{cases} \frac{1}{a+b} + ab = \frac{5}{4} \quad (1) \\ 2a^2+2b^2+5ab = \frac{9}{4} \quad (2) \end{cases}$$

(2)

$2a^2+2b^2+4ab+ab = \frac{9}{4}$

$(a\sqrt{2}+b\sqrt{2})^2 = \frac{9}{4} - ab$

$(a\sqrt{2}+b\sqrt{2})^2 = \frac{4}{4} + \frac{5}{4} - ab$

$(a\sqrt{2}+b\sqrt{2})^2 = 1 + \frac{5}{4} - ab$

$(a\sqrt{2}+b\sqrt{2})^2 = 1 + \frac{1}{a+b}$

$(a\sqrt{2}+b\sqrt{2})^2 = \frac{a+b+1}{a+b}$

$$\boxed{\begin{array}{l}(1)\\ \frac{1}{a+b} = \frac{5}{4} - ab\end{array}}$$

$2(a+b)^2 \cdot (a+b) = a+b+1$

$2(a+b)^3 = a+b+1$

сделаем замену: $c = a+b$ $(c > 0)$

$2c^3 = c+1$

$2c^3 - c - 1 = 0$

$(2c^2+2c+1)(c-1) = 0$

корней нет

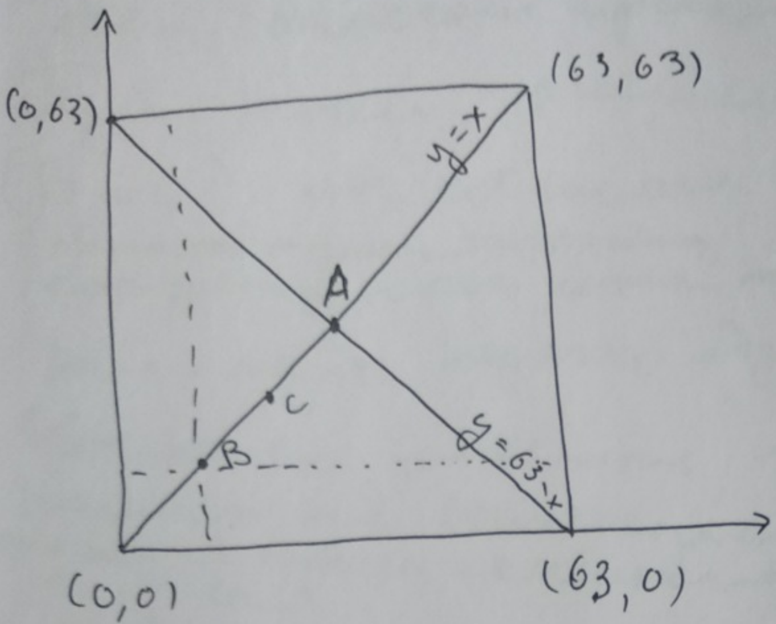
$c = 1$

$a+b = 1$

1

Чистовик

№5



пояснения к рисунку: очевидно, что точки (63,63) и (0,0) принадлежат ~~к~~ $y=x$; точки (0,63) и (63,0) принадлежат $y=63-x$; при этом прямые однозначно задаются двумя точками.

Замечание: точка ~~Отк~~ A имеет нецелые координаты => не является узелком. ($A(\frac{63}{2}, \frac{63}{2})$)

$63+1-2=64-2=62$ узелка ~~точки~~ на стороне квадрата

диагональ имеет длину $63\sqrt{2}$ и разбивается ~~принадл~~ принадлежащими ей узелками на отрезки, равны $\sqrt{2}$ => на каждой из диагоналей $63+1-2=62$ узелка.

$62+62=124$ узелка на обеих диагоналях вместе (см. замечание)

пусть мы выбрали одну точку на диагонали (т. B на рисунке) тогда посмотрим, сколько точек можно взять к ней в пару): 3

$62\cdot62-61-61$ ← все оставшиеся, кроме тех, при которых возникает запрещённый случай — параллельность одной из координатных

Чистовик

№5 (продолжение)

осей (отмечены пунктиром).

При этом заметим, что пары вида (B и C) мы посчитали дважды, поэтому (~~обе точки лежат на одной из~~ (каждая из точек лежит на одной из прямых)

Эти пары нужно будет вычесть.

Несложно заметить, что их $\frac{124\cdot 123}{2}$.

Запишем всё вышесказанное в одном выражении, применяя правила комбинаторного сложения и умножения.

Ответ:

$$124\cdot(62\cdot 62-61-61)-\frac{124\cdot 123}{2}=$$

$$=124\cdot 3722-\frac{124\cdot 123}{2}=$$

$$=124\cdot\left(3722-\frac{123}{2}\right)=$$

$$=124\cdot\left(3722-61-\frac{1}{2}\right)=124\cdot\left(3661-\frac{1}{2}\right)=$$

$$=124\cdot 3660{,}5=124\cdot(3660+0{,}5)=$$

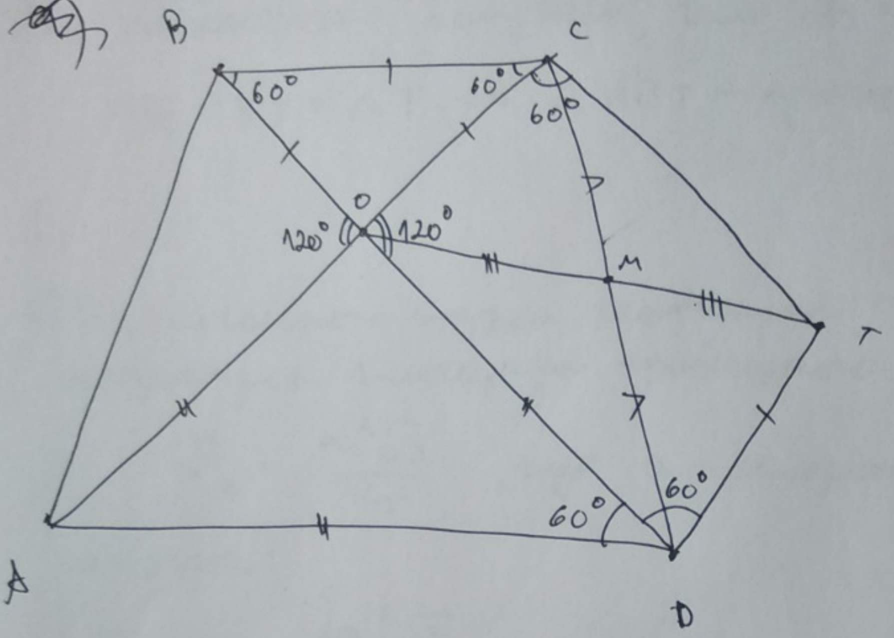
$$=453840+62=453902$$

4

Ответ: 453902

Чистовик

№6



а)

1) $\left.\begin{array}{l} OM = MT \\ CM = MD \end{array}\right| \Rightarrow$ OCTP – параллелограмм

$\Downarrow$

$\angle COD + \angle OCT = 180°$, $\angle OCT = \angle ODT$

$\angle COD = \underbrace{\angle OBC + \angle BCO}_{\text{как внешний}} = \underbrace{60° + 60°}_{\Delta BCO \text{ – правильный}} = 120°$

$\angle OCT = 60°$

$\angle ODT = 60°$

2) OCTP – ~~пар~~ параллелограмм $\Rightarrow OC = DT$

3) $\angle AOB = \angle COD = 120°$ – как вертикальные

5

4) $\left.\begin{array}{l} \angle AOB = \angle ADT = 120° \\ AO = AD \\ BO = DT \end{array}\right| \Rightarrow \Delta ABO = \Delta ADT \Rightarrow AB = AT.$

Чистовик

№6 (продолжение)

5) аналогично получаем, что $AB = BT$

$AB = BT = AT \Rightarrow \Delta ABT$ – правильный

б)

6) из школьного курса геометрии нам известна формула площади правильного Δ:

$S_\Delta = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, где a – сторона Δ.

тогда:

$S_{\Delta ABT} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4}$

$S_{\Delta BOC} = \frac{BC^2\sqrt{3}}{4}$ $\quad S_{\Delta BOC} = \frac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$

$S_{\Delta AOD} = \frac{AD^2\sqrt{3}}{4}$ $\quad S_{\Delta AOD} = \frac{4\cdot 4\cdot\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$

7) $S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}\cdot BO\cdot AO\cdot \sin AOB$

$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4\cdot \sin 120^\circ = 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

$\Delta AOB = \Delta COD$ ($BO = CO$, $AO = OD$, $\angle AOB = \angle COD$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow S_{\Delta AOB} = S_{\Delta COD} = 2\sqrt{3}$

8) по т. косинусов для ΔAOB:

6

$AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2\cdot AO\cdot BO\cdot \cos AOB$

$AB^2 = 16 + 4 + 8 = 28$

№6 (продолжение)

9) $S_{\Delta ABT} = \frac{28 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{4 \cdot 7 \cdot \sqrt{3}}{4} = 7\sqrt{3}$ Числовик.

10) $S_{ABCD} = S_{BOC} + S_{AOD} + S_{AOB} + S_{OCD}$

$S_{ABCD} = \sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$

11) $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{7\sqrt{3}}{9\sqrt{3}} = \frac{7}{9}$

Ответ: $\frac{7}{9}$.

7

Черновик

S_{ABT}

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$AB^2 = 16 + 4 + 8 = 28 = 4 \cdot 7$$

~~$AB = 2\sqrt{7}$~~

$$S_{ABT} = \frac{AB^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{\cancel{4} \cdot 7 \cdot \sqrt{3}}{\cancel{4}} = 7\sqrt{3}$$

$$S_{ABCD} = \frac{2^2\sqrt{3}}{4} + \frac{4^2\sqrt{3}}{4} + \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} \cdot 4 \cdot \sin 120^\circ \cdot 2 =$$

$$= \sqrt{3} + 4\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} \cdot 4 \cdot \cancel{2} = \sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3} =$$

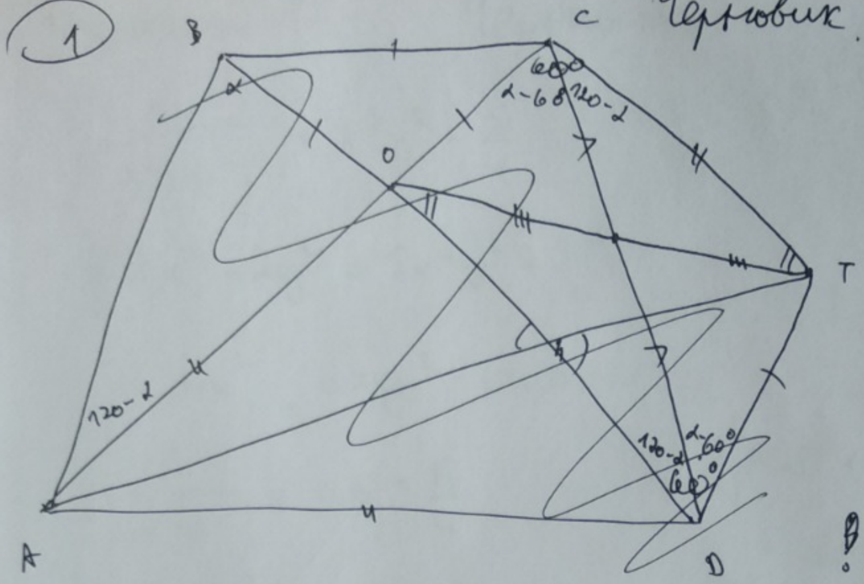
$$= 9\sqrt{3}$$

8

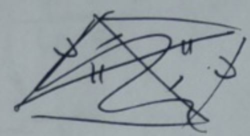
211005598 (U834703 M1277353)

1

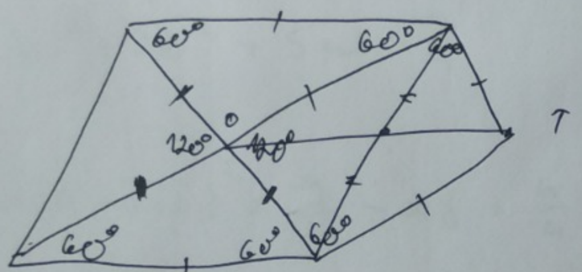
Черновик.



! $\angle BAT = 60^\circ$



! ABTD - впис.

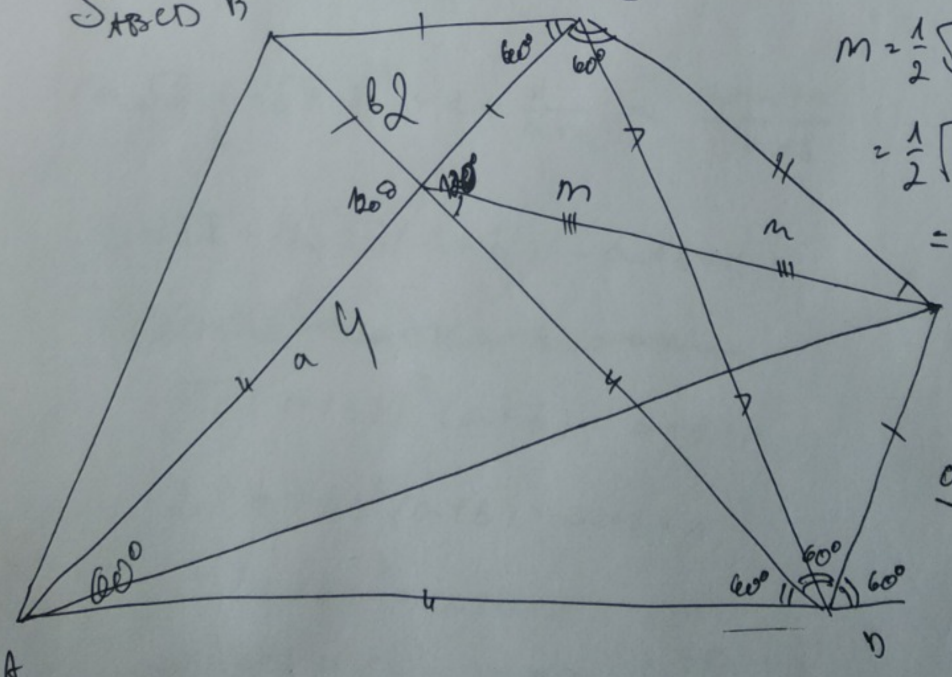


~~120-α+60=180-α~~

~~$60-(120-\alpha) =$~~

~~$60-120+\alpha = \alpha-60^\circ$~~

$\dfrac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$ -?



$m = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2} =$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-a^2-b^2-ab} =$

$= \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-ab}$

$OT = \sqrt{a^2+b^2-ab}$

$OT^2 = a^2+b^2-ab$

$a = 4$

$b = 2$

9

$c^2 = AB^2 = a^2+b^2-2ab\cos 120^\circ = a^2+b^2+ab$

Вариант 12. Черновик.

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

$a = x^2$, $b = y^2$ $(a, b \geq 0)$

$$\begin{cases} \frac{1}{a+b} + ab = \frac{5}{4} \\ 2a^2+2b^2+5ab = \frac{9}{4} \end{cases}$$

$(a\cdot\sqrt{2}+b\cdot\sqrt{2})^2$

$= 2a^2+2b^2+4ab$

$$\begin{array}{r} 366 \\ \times\ 124 \\ \hline 1464 \\ +\ 732\ \ \\ 366\ \ \ \ \\ \hline 45384\ \ \ \end{array}$$

45384

$+\ 62$

453902

$(a\sqrt{2}+b\sqrt{2})^2 = \frac{9}{4} - ab = \frac{4}{4} + \frac{5}{4} - ab = 1 + \frac{5}{4} - ab =$

$= 1 + \frac{1}{a+b}$

$(a\sqrt{2}+b\sqrt{2})^2 = 1 + \frac{1}{a+b} = \frac{a+b+1}{a+b}$

$(a\sqrt{2}+b\sqrt{2})^2(a+b) = a+b+1$

$\cancel{(2a^2+2b^2+4ab)(a+b) = a+b+1}$

$(\sqrt{2}(a+b))^2(a+b) = a+b+1$

$2(a+b)^2(a+b) = a+b+1$

$2(a+b)^3 = a+b+1$

$a+b = c$, $\cancel{c \geq 0}$ $c > 0$

$2c^3 = c+1$

10

211005598 (U834703 M1277353)

Черновик.

$2c^3 - c - 1 = 0$

$c = 1$ - корень (подбором)

$(\cancel{2c-1}\ 2 - 1 - 1 = 0)$

$\cancel{2c^3 - c - 1 = c(2c^2 - 1) - 1}$

	2	0	−1	−1
1	2	2	1	0

$2c^3 - c - 1 = (2c^2 + 2c + 1)(c - 1) =$

$= 2c^3 + \cancel{2c^2} + c - \cancel{2c^2} - 2c - 1 =$

$= 2c^3 - c - 1$

$(2c^2 + 2c + 1)(c - 1) = 0$

~~D = 4~~

$D = b^2 - 4ac$

$D = 4 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 4 - 8 < 0$ корней нет

$x^2 + y^2 = 1$ ← подставляя $c = 1$ получаем.

$\frac{1}{x^2 + y^2} + x^2 y^2 = \frac{5}{4}$

$1 + x^2 y^2 = \frac{5}{4}$

$x^2 y^2 = \frac{1}{4}$

$\begin{cases} a + b = 1 \\ ab = \frac{1}{4} \end{cases}$

$a = 1 - b$

$(1 - b) b = \frac{1}{4}$

$b - b^2 = \frac{1}{4}$

$-b^2 + b - \frac{1}{4} = 0$

$b^2 - b + \frac{1}{4} = 0$

$4b^2 - 4b + 1 = 0$

$(2b - 1)^2 =$

$= 4b^2 - 4b + 1$

$(2b - 1)^2 = 0$

$2b - 1 = 0$

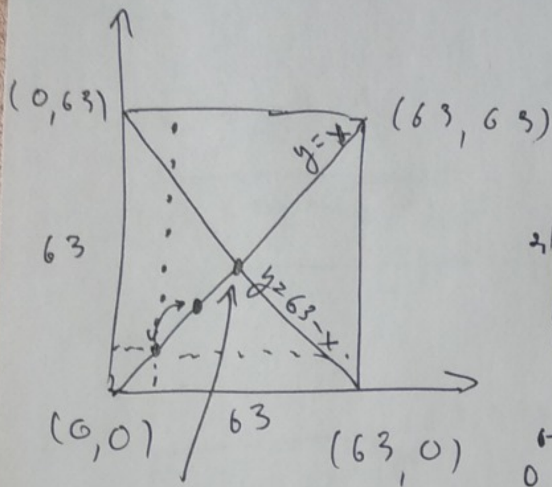
$2b = 1$

$b = \frac{1}{2}$

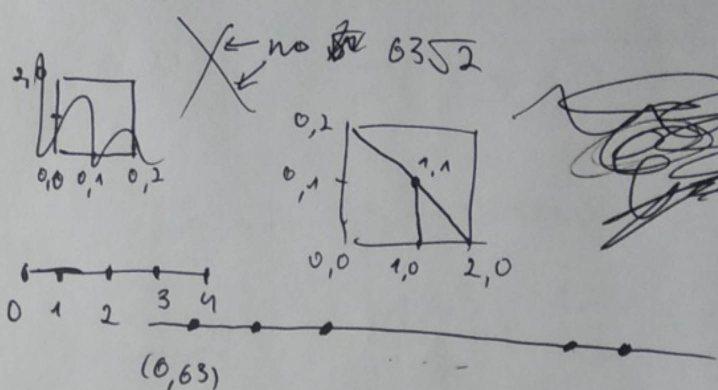
11

3

№5 Черновик.



62·62 узла всего.



нецелые координаты

$$\boxed{\begin{aligned}63-x&=x\\2x&=63\\x&=\frac{63}{2}\end{aligned}}$$

$\frac{63\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 63$ отрезочка

$63+1-2 = 64-2=62$ точки

$62+62\cancel{+1} = 124$ точки на этих прямых

~~124·(62·62−61−1)−61−1~~

$$\boxed{124\cdot(62\cdot62-61-61)-\frac{124\cdot123}{2}}$$

ответ.

~~124.~~

$62\cdot62-62-60=$

$=62\cdot61-60$

$$\begin{array}{r}\times\ 62\\61\\\hline +\ 62\\372\ \\\hline 3782\\-\ \ 60\\\hline 3722\end{array}$$

12 13

$\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$ Черновик

$x^2 = y^2 = \frac{1}{2}$

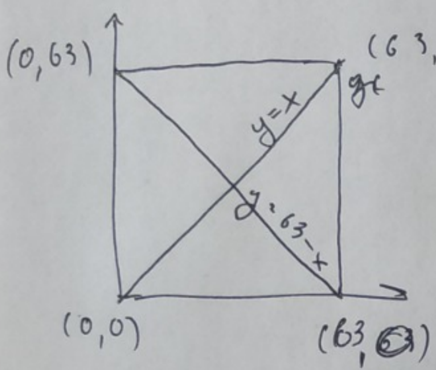
$\boxed{x = y = \sqrt{1/2}}$

$124 \,|\, 2$

62

$$\begin{array}{r} 3660 \\ \times\ 124 \\ \hline 14640 \\ 7320 \\ 3660 \\ \hline 453840 \end{array}$$

№5



62·62 узла всего

$$\begin{array}{r} 3722 \\ -\ \ 61 \\ \hline 3661 \end{array}$$

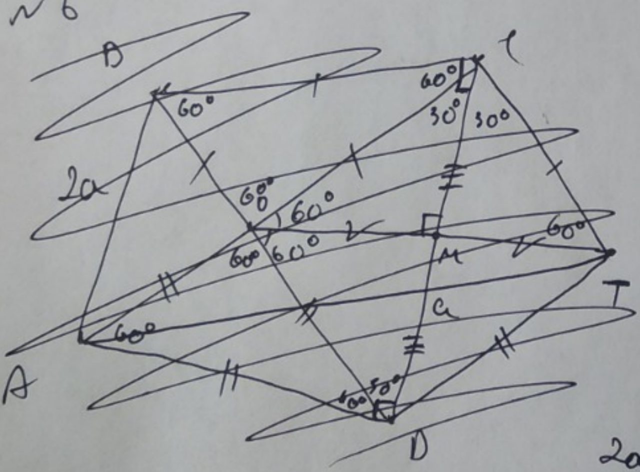
$\frac{123}{2} = \frac{120}{2} + \frac{3}{2} =$

$= 60 + \frac{2}{2} + \frac{1}{2} =$

$= 60 + 1 + \frac{1}{2} =$

$= 61 + \frac{1}{2}$

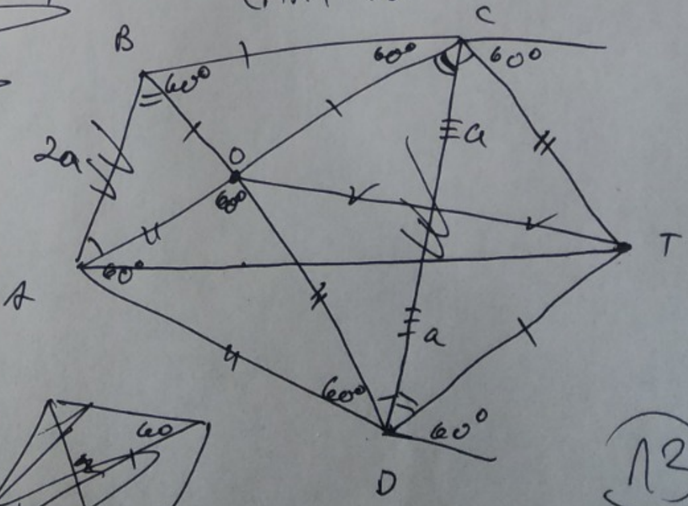
№6

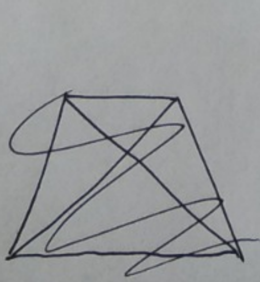


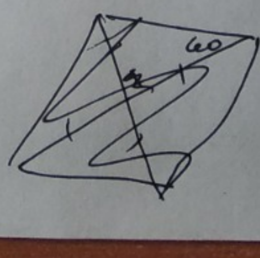
ABCD – вписанный

BC ∥ AD AB = CD

(!) AT = 2a







13

Чистовик

№4 (продолжение)

из (1) получаем, что $ab = \frac{1}{4}$

$$\begin{cases} a+b=1 \\ ab=\frac{1}{4} \end{cases}$$

$a = 1-b$

$(1-b)b = \frac{1}{4}$

$b^2 - b + \frac{1}{4} = 0$

$(2b-1)^2 = 0$

$2b = 1$

$b = \frac{1}{2}$

$a = \frac{1}{2}$

~~[illegible]~~ $x^2 = y^2 = \frac{1}{2}$

$x = y = \pm\sqrt{1/2}$

~~Ответ: $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$~~

Ответ: $(\pm\sqrt{1/2}\,; \pm\sqrt{1/2})$

2