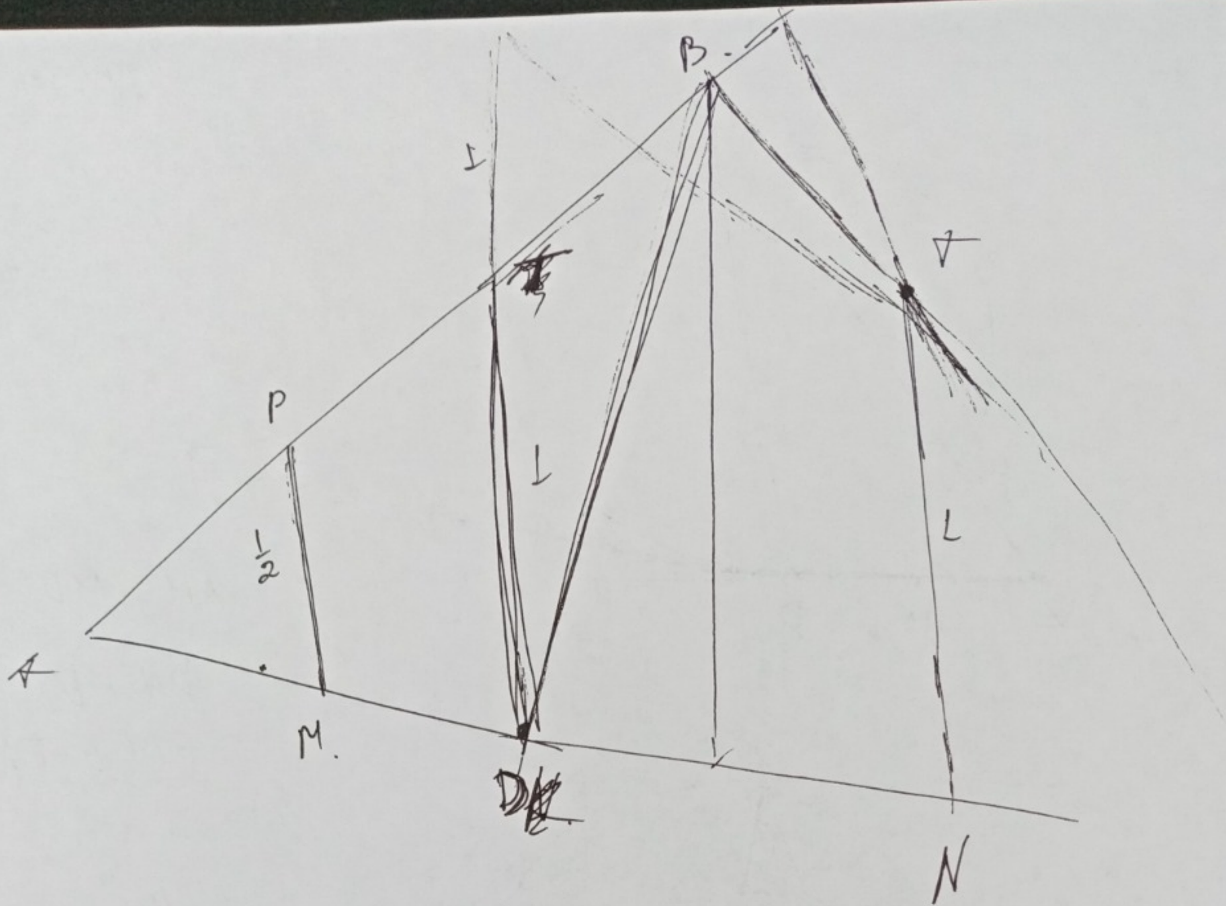
Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211005570**

ID профиля: **852814**

Вариант 12

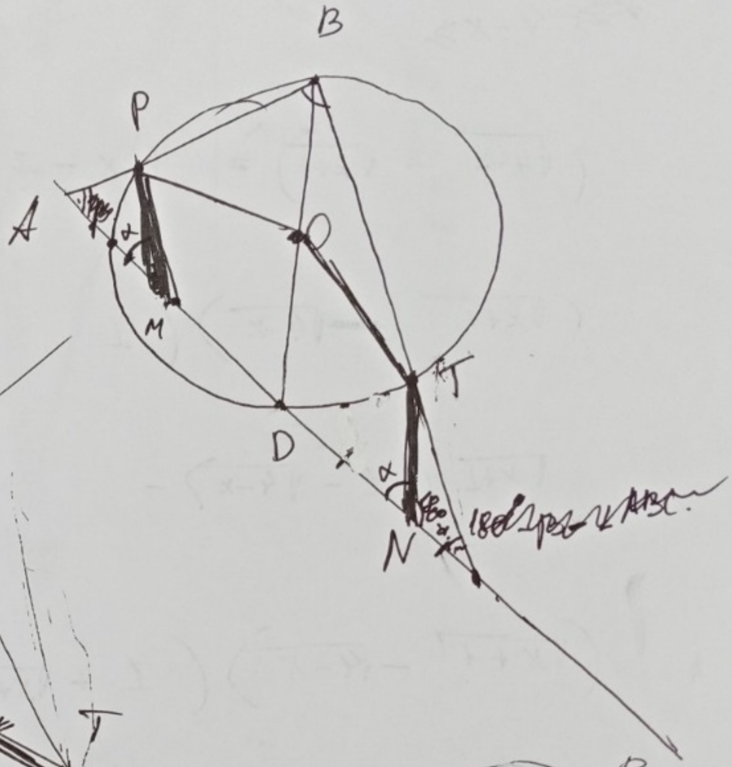


~~$\gamma + \beta = L$~~ $180° - \gamma - \beta = \angle ABC$.

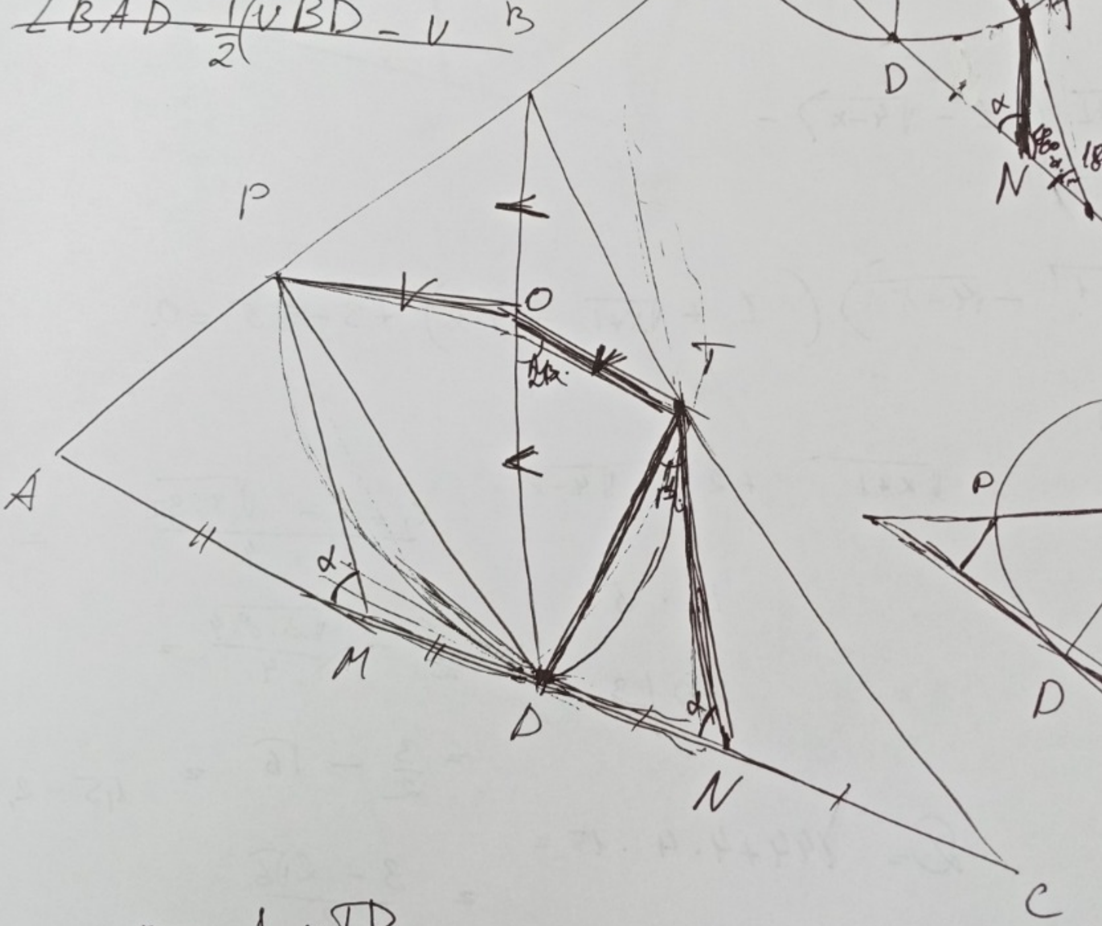
Черновик.

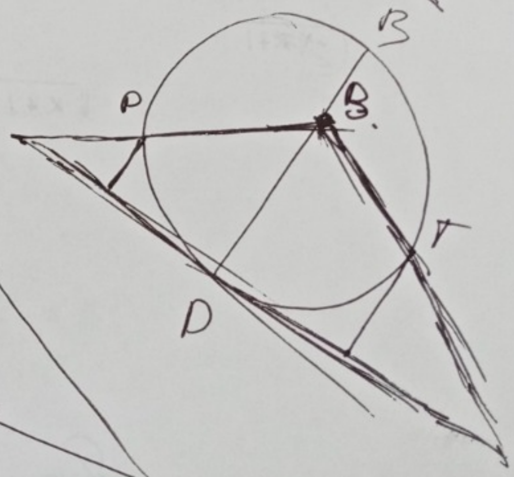
$$\left.\begin{array}{l} MP = \frac{1}{2} \\ NT = 1 \\ BD = \frac{4}{3} \end{array}\right\} S_{\triangle ABC} - ?$$

$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup PT = \frac{1}{2} \angle POT$

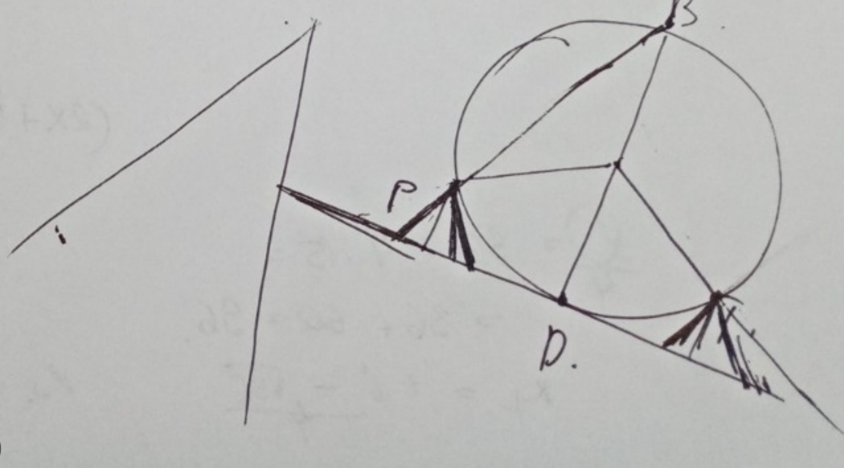


~~$\angle BAD = \frac{1}{2}(\cup BD - \cup$~~





$\beta = \frac{1}{2} \cup TD.$



$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{x+3x+x^2}.$

$x \geq -1$

$\cancel{x\geq}\ 4-x \geq$

$(\sqrt{4-x} - \sqrt{x+1})^2 = 4-x-2\sqrt{\ldots} + x+1$

$(\sqrt{x+1}\ \cancel{-}\ \sqrt{4-x})(1$

$\sqrt{x+1}(1-\sqrt{4-x}) -$

$(\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x})(1+\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}) + 3 - \cancel{3}\,5 = 0.$

$(\cancel{\sqrt{x+1}}$

$\sqrt{x+1} + 2 = \sqrt{4-x}.$

$x_1 = \frac{6-\sqrt{3.32}}{4} =$

$12 \cdot 5.$

$= \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3.8.4}}{4} =$

$60 \,|\, 3.$

$= \frac{3}{2} - \sqrt{6} = 1,5 - 2,4\ldots$

$D = 144+4.4.15 =$

$= \frac{3-2\sqrt{6}}{2}.$

$(2x+1)^2 = 4x^2+4x+1-16x-16 =$

$\frac{D}{4} = 36+4\cdot 15 =$

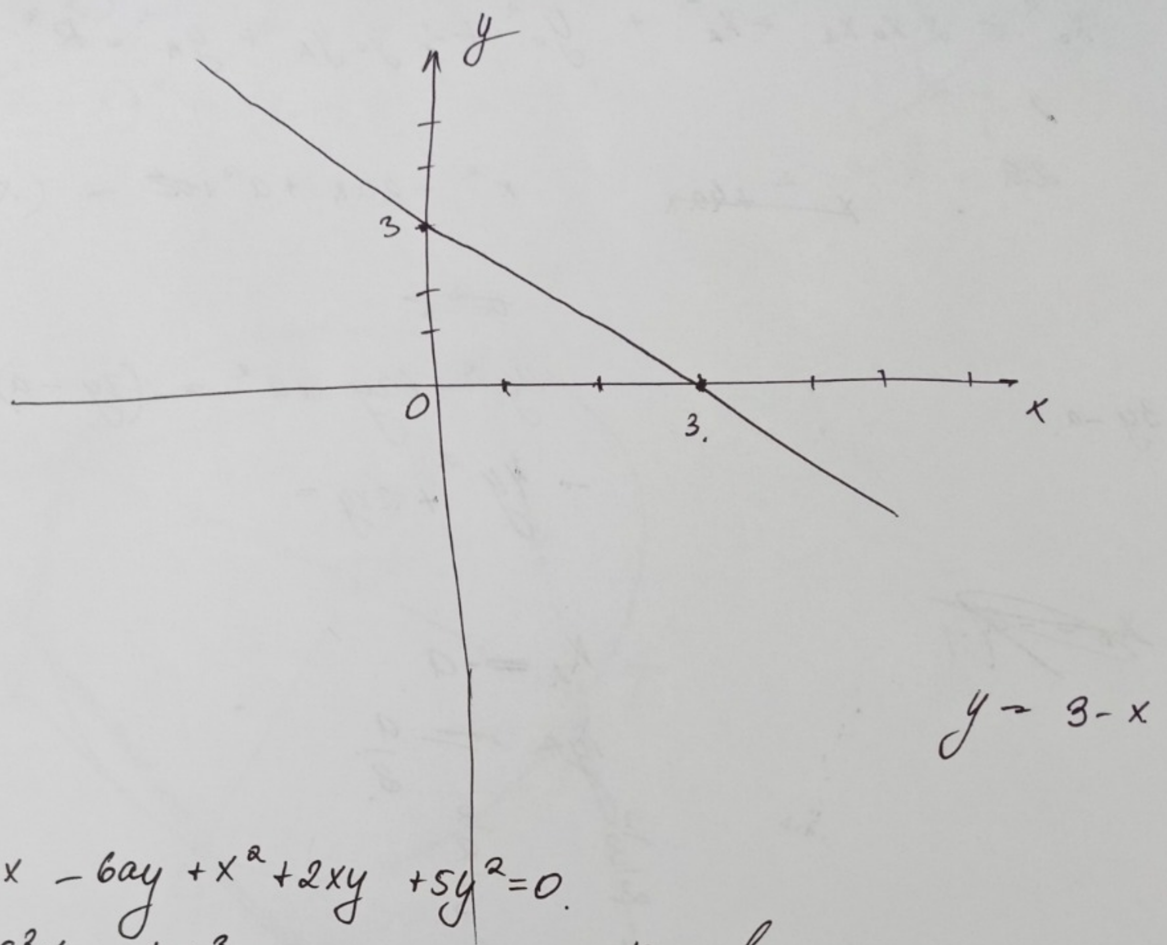
$= 4x^2-12x-15.$

$= 36+60 = 96.$

$x_1 = +\frac{6-\sqrt{96}}{4}$

$x_2 = \frac{6+\sqrt{96}}{4}$

$-\cancel{3}\ -0,9\ldots$



$$2a^2+2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0.$$

$$\frac{ax^2+4a^2x+4a^3+2}{a}=y \qquad В \text{ – вершина.}$$

$$x^2+4ax+4a^2+\frac{2}{a}=y$$

$$x_в=\frac{-4a}{2}=-2a.$$

$$y_в=4a^2+4a\cdot -2a+4a^2+\frac{2}{a}=4a^2-8a^2+4a^2+\frac{2}{a}=$$

$$=\frac{2}{a}.$$

$$В\left(-2a;\ \frac{2}{a}\right)$$

$$x^2+2ax+a^2+a^2+5y^2-6ay+2xy=0.$$

$$(x+a)^2+9y^2-6ay+a^2-4y^2+2xy=0.$$

$$(x+a)^2+(3y-a)^2-2y(2y-x)=0.$$

211005570 (U852814 M1274480)

$x_0^2 - 2x_0x_a + x_A^2 + y_0^2 \cancel{+}2y_0y_A + y_A^2 = R^2.$

2

$2a$. $\cancel{x^2+4ax}$ $x^2+2ax+a^2\cancel{+a^2} = (x+a)^2.$

$\cancel{a^2}$

$3y-a.$ $9y^2-6ay+a^2 = (3y-a)^2.$

$-4y^2+2xy=$

$\cancel{x_0 = -a}$

$x_A = -a.$

$y_B = \frac{a}{3}.$

$\frac{3}{3}$ $\frac{2}{2}$

$\frac{3}{2}$ $\frac{2}{3}$

$\frac{4}{6}$ $\frac{4}{6}.$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_B > 3\\ y_B > 3.\end{cases}\\ \begin{cases}x_A > 3.\\ y_A > 3\end{cases}\end{array}\right.$$

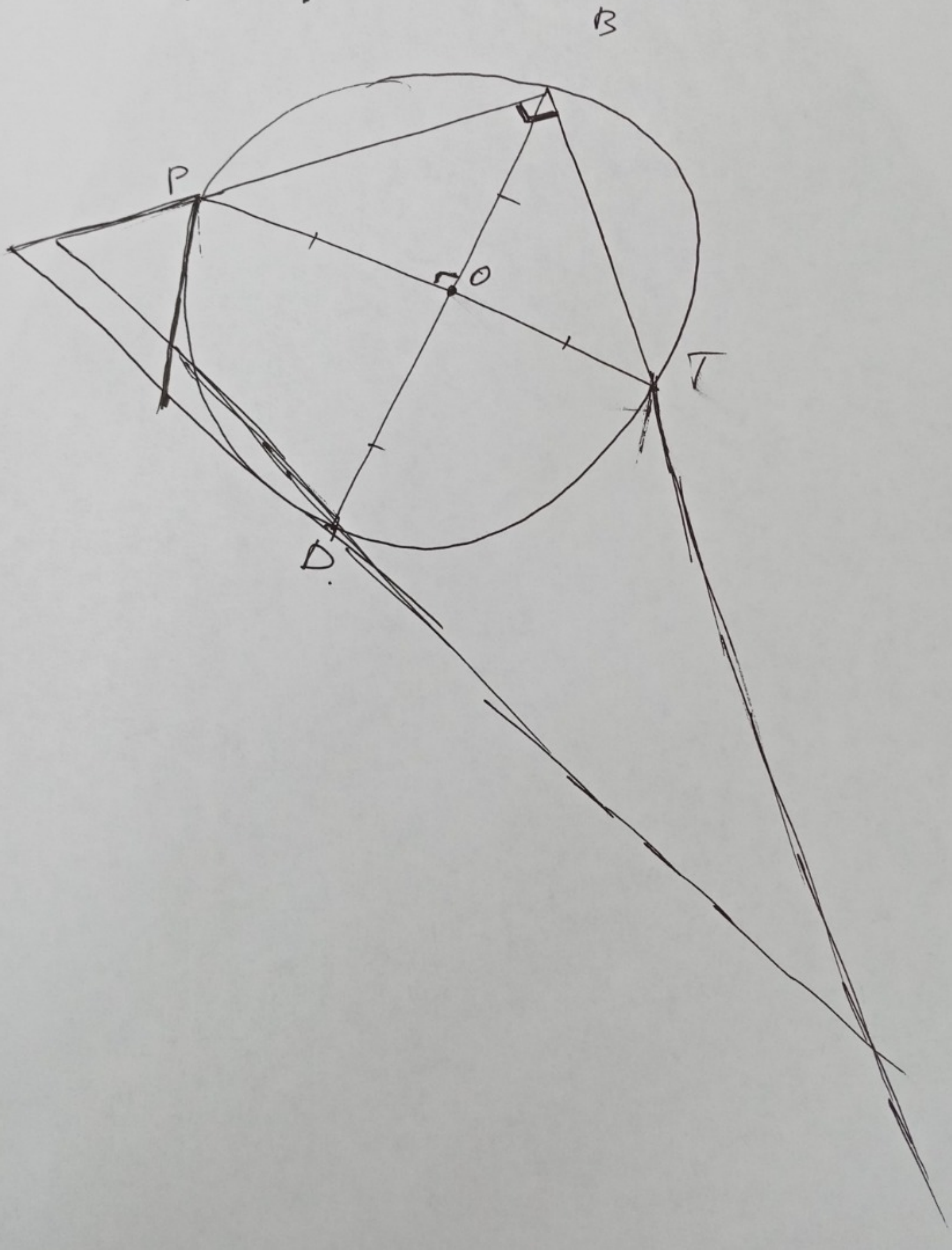
$$\begin{cases}-2a > 3\\ \frac{2}{a} > 3\end{cases}$$

$a < -1{,}5.$

211005570 (U852814 M1274480)

$$(x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2 = \cancel{2R}\, R^2.$$

$$(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 = R^2.$$



211005570 (U852814 M1274480)

№3. $\frac{ax^2+4a^2x+4a^3+2}{a}=y$ Чистовик

B – вершина

$y=x^2+4ax+4a^2+\frac{2}{a}$

$x_B=\frac{-4a}{2}=-2a$

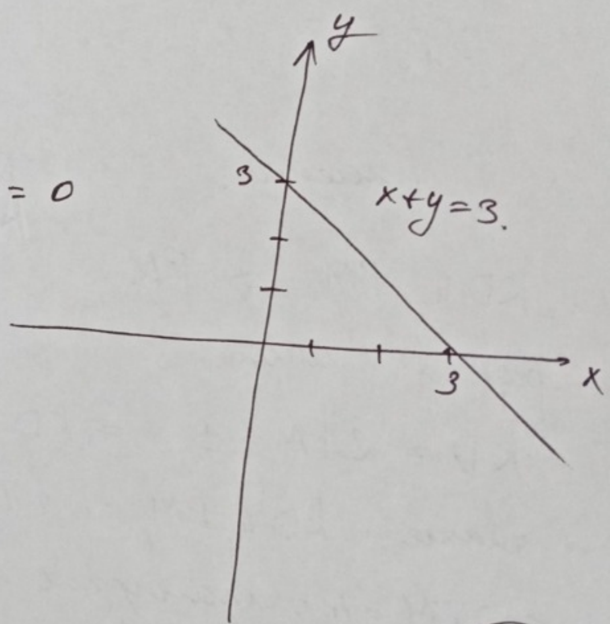
$y_B=4a^2+4a\cdot-2a+4a^2+\frac{2}{a}=\frac{2}{a}.$

$B\left(-2a;\ \frac{2}{a}\right)$

$2a^2+2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0$ уравнение окружности.

$x^2+2ax+2xy+5y^2-6ay+2a^2=0.$

$(x_0-x_A)^2+(y_0-y_A)^2=R^2.$



$x^2+2ax+a^2+9y^2-6ay+a^2-4y^2+2xy=0$

$(x+a)^2+(3y-a)^2-2y(2y-x)=0.$

$(x+a)^2+(3y-a)^2=2y(y-x)$

$(x+a)^2+9\left(y-\frac{a}{3}\right)^2=2y(y-x).$

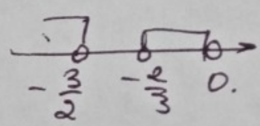
$x_A=-a.$

$y_A=\frac{a}{3}.$

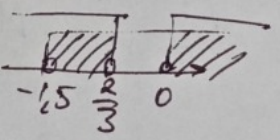
$A:\ \left(-a;\ \frac{a}{3}\right)$

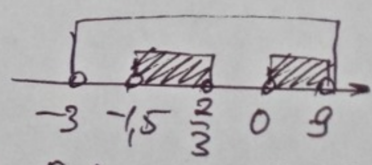
4

$\begin{cases}x_B>3\\ y_B>3\\ x_A>3\\ y_A>3\end{cases}$ $\begin{cases}-2a>3\\ \frac{2}{a}>3\end{cases}$ $\Rightarrow\begin{cases}a<-1,5\\ \frac{2-3a}{a}>0.\end{cases}$ $\Rightarrow\begin{cases}a<-1,5.\\ \frac{a-\frac{2}{3}}{a}<0\end{cases}$

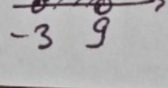


$\begin{cases}\begin{cases}x_B<3\\ y_B<3\end{cases}\\ \begin{cases}x_A<3\\ y_A<3\end{cases}\end{cases}$ $\Rightarrow\begin{cases}x>-1,5.\\ \frac{a-2/3}{a}>0\end{cases}$





$\begin{cases}-a<3\\ \frac{a}{3}<3\end{cases}$ $\begin{cases}a>-3\\ a<9.\end{cases}$



Ответ: $\left(-1,5;\ \frac{2}{3}\right);(0;9)$

211005570 (U852814 M1274480)

№1. Чистовик

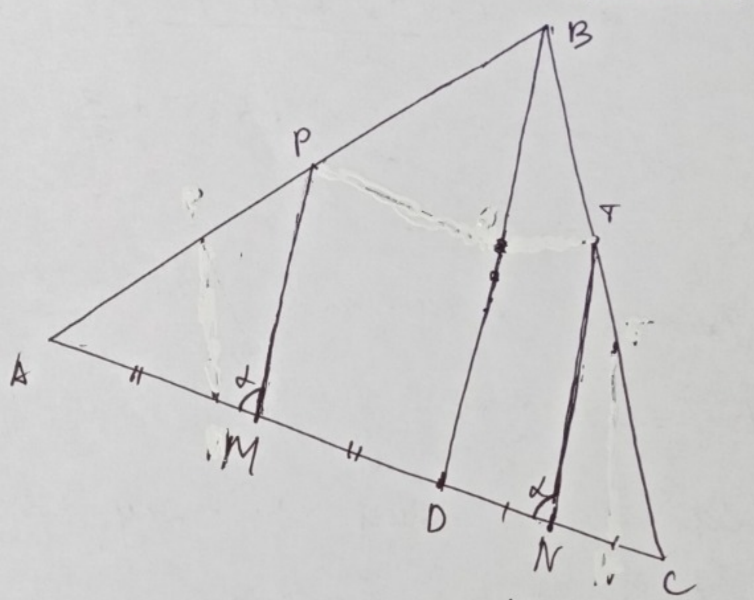
Дано: $\triangle ABC$.

окр$\left(O;\ \frac{BD}{2}\right)$

$AM = MD$

$DN = NC$

$PM \parallel TN$



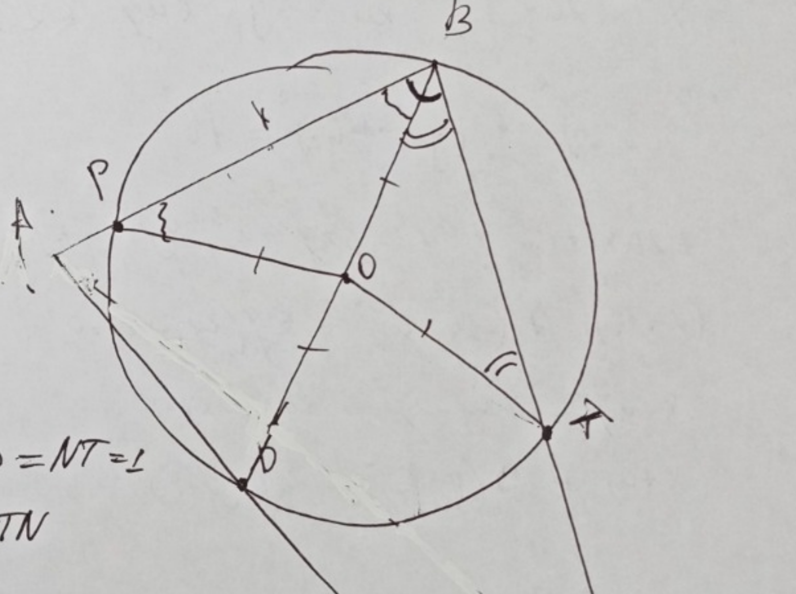
а) Найти $\angle ABC$

б) $MP = \frac{1}{2}$

$NT = 1$

$BD = \frac{4}{3}$

S_{ABC} - ?



Решение:

Д.п. $KD \parallel PM \Rightarrow PM$ - средняя линия

$KD = 2PM = 1. \Rightarrow KD = NT = 1$

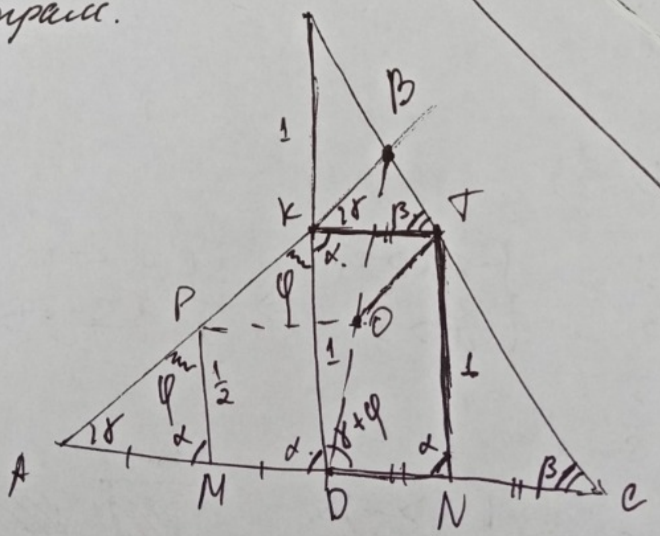
а также $KD \parallel PM$, $KD \parallel TN$

$KDTM$ - параллелограм.

$\Rightarrow KT \parallel DN$

$\angle ABC = 180° - \gamma - \beta =$

$=$



3

211005570 (U852814 M1274480)

Чистовик

② $\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} = 1.$

$\sqrt{x+1} = 1 + \sqrt{4-x}$

$x+1 = 1 + 4 - x + 2\sqrt{4-x}.$

$x - 4 + x = 2\sqrt{4-x}.$

$2x - 4 = 2\sqrt{4-x}$

$x - 2 = \sqrt{4-x}$ $\quad x \geq 2$, но $x \leq 4$

$x^2 - 4x + 4 = 4 - x.$

$x^2 - 3x = 0.$

$x(x-3) = 0$

$\left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \text{ не подходит} \\ x_2 = 3 \text{ подходит} \end{array}\right.$

Ответ: $\frac{3-2\sqrt{6}}{2}$; 3

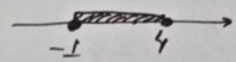
2

211005570 (U852814 M1274480)

стр. 1. Чистовик

№2. $\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ 4-x \geq 0 \\ 4+3x-x^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 4 \\ x^2-3x-4 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 4 \\ (x-4)(x+1) \leq 0 \end{cases}$$



$$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 - 2\sqrt{-(x-4)(x+1)} = 0.$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 - 2\sqrt{(4-x)(x+1)} = 0$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 + \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x}\right)^2 - (x+1+4-x) = 0.$$

$$\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x}\right)^2 + \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x}\right) + 3 - 5 = 0.$$

$t = \sqrt{x+1} - \sqrt{4-x}$

$$t^2 + t - 2 = 0.$$

$$(t+2)(t-1) = 0.$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = -2 \\ t_2 = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} \sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} = -2. & ① \\ \sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} = 1 & ② \end{array}\right.$$

① $\sqrt{x+1} + 2 = \sqrt{4-x}$

$(\sqrt{x+1} + 2)^2 = 4-x$

$x+1+4+\cancel{1}4\sqrt{x+1} = 4-x.$

$x+5-4+x+4\sqrt{x+1} = 0.$

$2x+1+4\sqrt{x+1} = 0.$

$4\sqrt{x+1} = -2x-1.$ $\qquad -2x-1 \geq 0.$

$16(x+1) = 4x^2+4x+1$ $\qquad -2x \geq 1$

$4x^2+4x-16x-16+1 = 0.$ $\qquad -1 \leq x \leq -\frac{1}{2}.$ $\qquad -1 \leq x \leq -0{,}5$

$4x^2-12x-15 = 0.$

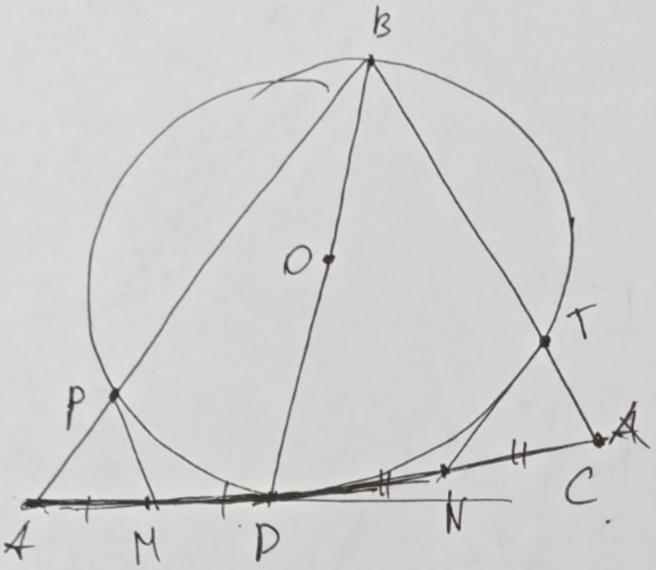
$$\left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{6-\sqrt{96}}{4} = \frac{3-2\sqrt{6}}{2} = 1{,}5-2{,}4\ldots \text{ подходит} \\ x_2 = \frac{6+\sqrt{96}}{4} = \frac{3+2\sqrt{6}}{2} = 1{,}5+2{,}4\ldots \text{ не подходит.} \end{array}\right.$$

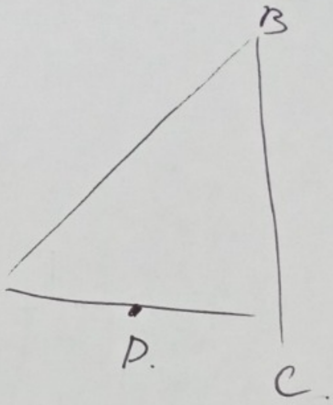
1

2H005570 (U852814 M1272480)

Черновик

№1.



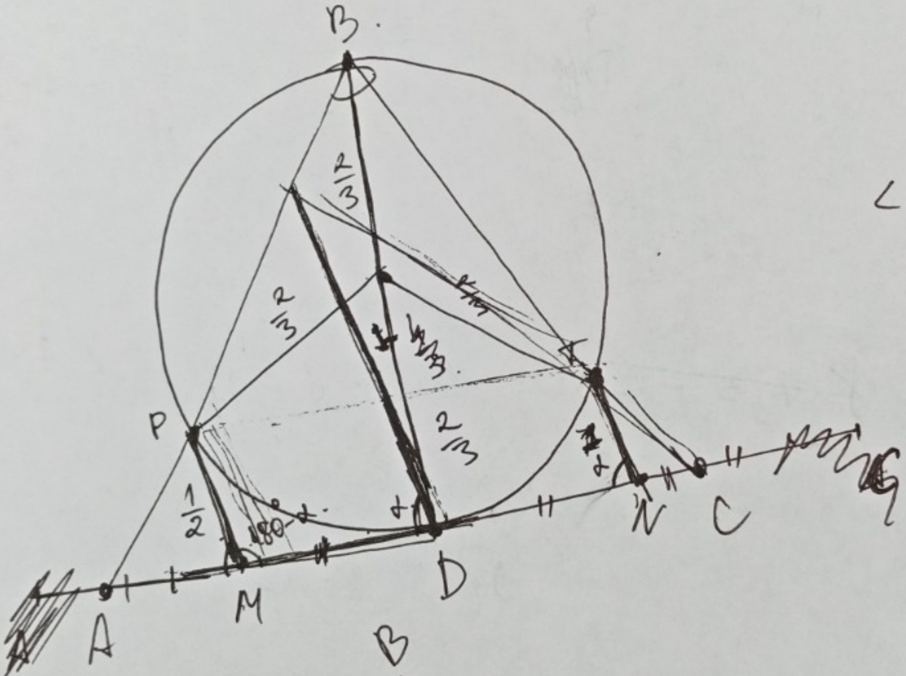


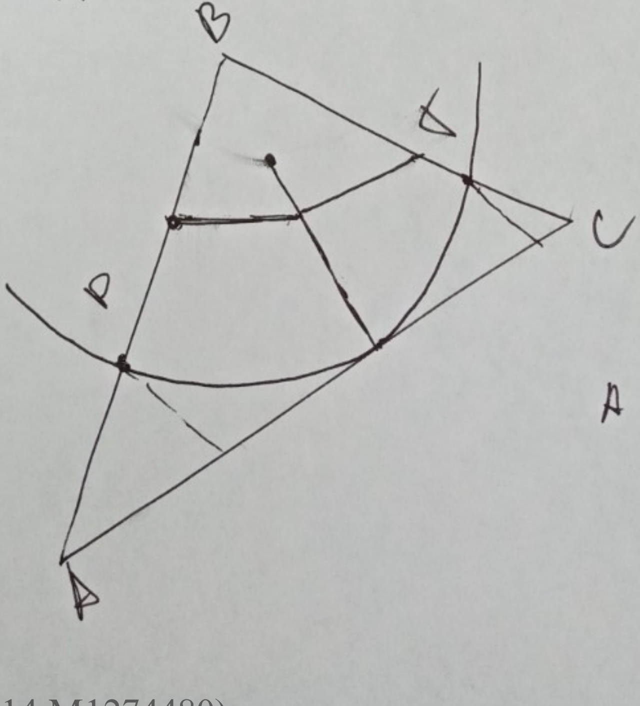
$AM = MD$

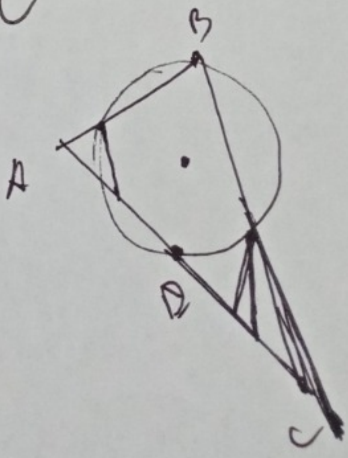
$DN = NC.$

$PM \parallel TN$

$\angle ABC \text{ --?}$







Часть 2

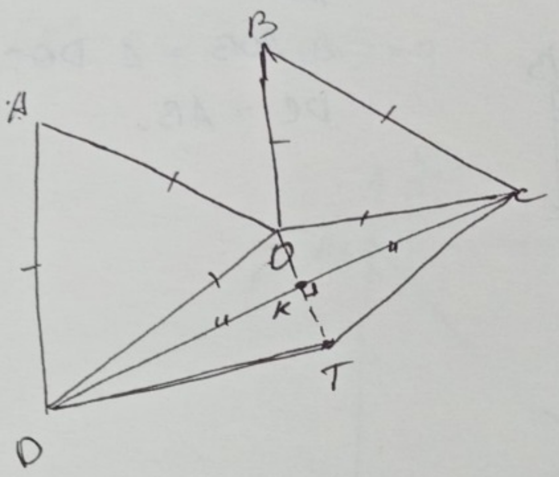
Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211005570**

ID профиля: **852814**

Вариант 12

△BOC и △AOD – правильные.

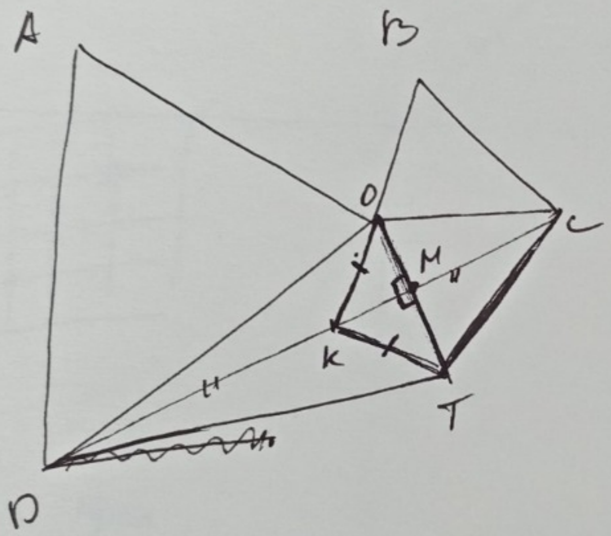


△DOC = △DCT.

DK = KC.

OK = KT

△ABT – правильный треугольник – ?

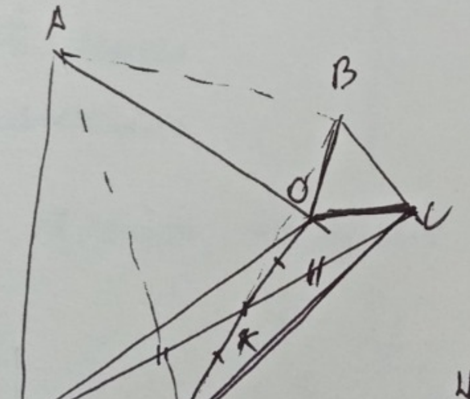


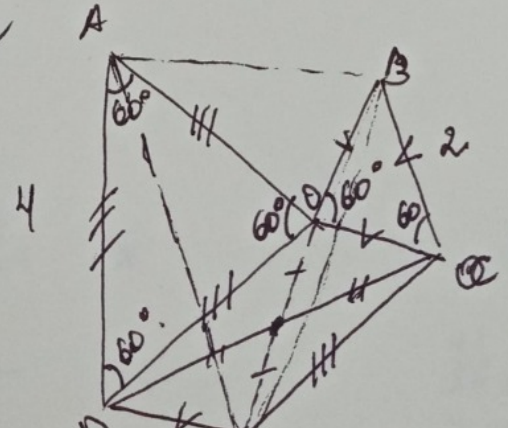
ACDT – параллелограмм

OC ∥ DT

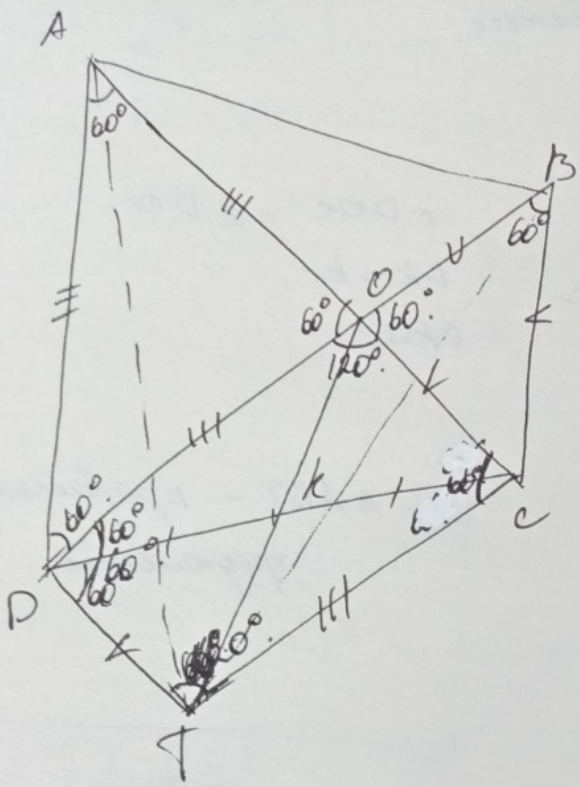
OD ∥ CT.

OT =





211005570 (U852814 M1274481)



~~AB~~ =

$\Delta AOB = \Delta DOC$

$DC = AB$.

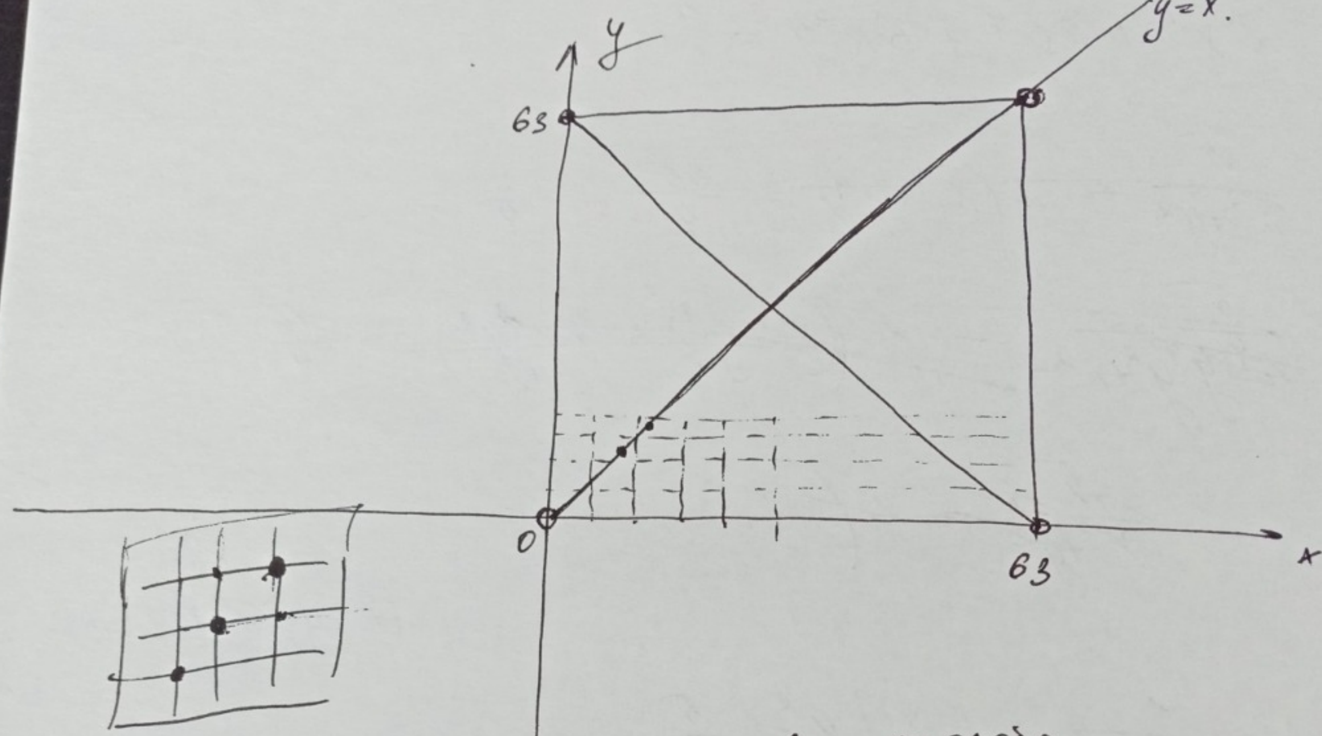
211005570 (U852814 M1274481)

$x^4 - x^2 + 0,25 = 0.$

$(x^2 - 0,5)(x^2 - 0,5) = 0.$

$\frac{0,25}{0,5} = \frac{2,5}{5} = 0,5.$

$(x;y)$



63 способа.

$63 - 2 = 61$

$61 \cdot 61$

Хотя бы один из узлов лежал на диагоналях.

Но оба не лежали на прямы

$$\begin{array}{r} 3721 \\ \times\ 62 \\ \hline 7442 \\ 22326 \\ \hline 230702 \end{array}$$

63.

$$\begin{array}{r} 61 \\ \times\ 61 \\ \hline 61 \\ 366 \\ \hline 3721 \end{array}$$

62 узла.

211005570 (U852814 M1274481)

Черновик

$$\begin{cases} \frac{\cancel{5}\ 1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4}, \\ 2x^4 + 2y^4 + 5x^2y^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

$$\cancel{\frac{5}{x^2+y^2} - 2(x^4+y^4) = \frac{25}{4} - \frac{9}{4}}.$$

$$\cancel{\frac{5}{x^4+y^4 y^2+x^2} - 2\left((x^2+y^2)^2 - 2x^2y^2\right) = \frac{16}{4}}$$

$$\cancel{\frac{5}{x^2+y^2} - 2(}$$

$(x+y)^2 = \underline{1} + 0{,}25 \cdot 2 = 1{,}5.$

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4}. \\ 2(x^4+y^4) + 5x^2y^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

$x^2 = \underline{1} - y^2.$

$$\cancel{1+}\ x^2y^2 = \frac{5}{4} - \frac{1}{x^2+y^2}.$$

$$2b^2 + 2b + 1 = 0.$$

$$D = 4 - 4 \cdot 2 \cdot =$$

211005570 (U852814 M1274481)

Чистовик

№4. $\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \\ 2x^4 + 2y^4 + 5x^2y^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$

$a = x^2y^2$ $\quad a > 0$

$b = x^2+y^2$ $\quad b > 0.$

$$\begin{cases} \frac{1}{b} + a = \frac{5}{4} \\ 2(b^2 - 2a) + 5a = \frac{9}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{5}{4} - \frac{1}{b}. & (1) \\ 2\left(b^2 - 2\left(\frac{5}{4} - \frac{1}{b}\right)\right) + 5\left(\frac{5}{4} - \frac{1}{b}\right) = \frac{9}{4} & (2) \end{cases}$$

(2) $2\left(b^2 - \frac{5}{2} + \frac{2}{b}\right) + \frac{25}{4} - \frac{5}{b} = \frac{9}{4}$

$2b^2 - 5 + \frac{4}{b} - \frac{5}{b} = \frac{9}{4} - \frac{25}{4}$

$2b^2 - \frac{1}{b} = 5 - 4$ $\quad b \neq 0.$ $\quad x^2+y^2 \neq 0$ $\quad x \neq 0$, $y \neq 0$

$2b^3 - 1 - b = 0.$

$2b^3 - b - 1 = 0.$

$$\begin{array}{r|l} 2b^3 - 0b^2 - b - 1 & b-1 \\ \hline -\underline{2b^3 - 2b^2} & 2b^2 + 2b + 1 \\ 2b^2 - b & \\ -\underline{2b^2 - 2b} & \\ b - 1 & \\ -\underline{b - 1} & \\ 0 & \end{array}$$

$(b-1)(2b^2+2b+1) = 0.$

211005570 (U852814 M1274481)

Чистовик

$2b^2+2b+1=0$ или $b-1=0$

$b=1.$

$D=4-4\cdot2\cdot1<0$

корней нет $\varnothing$

$$\begin{cases} b=1 \\ a=\frac{5}{4}-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=1 \\ a=0{,}25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2y^2=0{,}25 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2=\dfrac{0{,}25}{x^2} \quad ① \\ x^2+\dfrac{0{,}25}{x^2}=1 \quad ② \end{cases}$$

$x\neq0.$

$y\neq0.$

② $x^4+0{,}25-x^2=0.$

$(x^2-0{,}5)(x^2-0{,}5)=0.$

$x=\pm\sqrt{0{,}5}$

① при $x=\sqrt{0{,}5}$

$y=\pm\sqrt{\dfrac{0{,}25}{0{,}5}}=\pm\sqrt{0{,}5}$

при $x=-\sqrt{0{,}5}$

$y=\pm\sqrt{\dfrac{0{,}25}{0{,}5}}=\pm\sqrt{0{,}5}.$

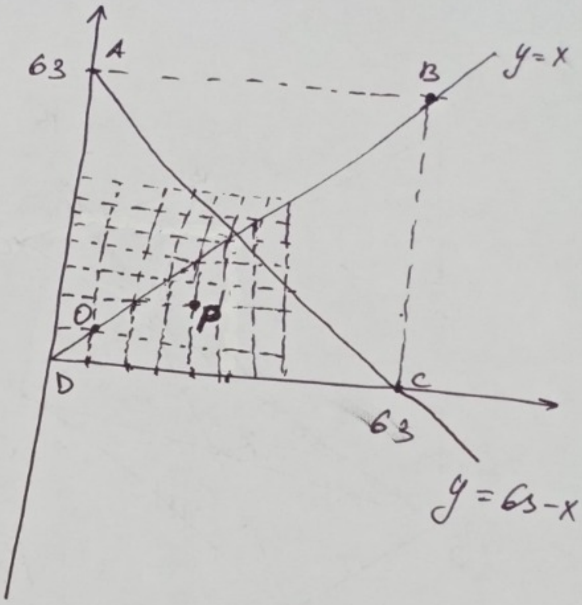
$$\begin{cases} x=\sqrt{0{,}5} \\ y=\sqrt{0{,}5} \end{cases} \quad \begin{cases} x=\sqrt{0{,}5} \\ y=-\sqrt{0{,}5} \end{cases} \quad \begin{cases} x=-\sqrt{0{,}5} \\ y=-\sqrt{0{,}5} \end{cases} \quad \begin{cases} x=-\sqrt{0{,}5} \\ y=\sqrt{0{,}5}. \end{cases}$$

Ответ: $(\sqrt{0{,}5};\sqrt{0{,}5})$; $(\sqrt{0{,}5};-\sqrt{0{,}5})$; $(-\sqrt{0{,}5};-\sqrt{0{,}5})$; $(-\sqrt{0{,}5};\sqrt{0{,}5})$

211005570 (U852814 M1274481)

Чистовик

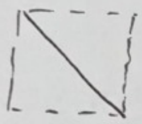
№5



AB, BD – диагонали квадрата.

$\frac{63}{2} = 31{,}5$ – координата (x и y) точки пересечения диагоналей (не на узле)

Каждая диагональ делит ячейки клетки пополам



Если один из узлов (Допустим O) лежит на диагонали DB, тогда есть $63-1=62$ способа его постановки. Тогда для второго узла (допустим P) возможных расположений будет $(63-2)\cdot(63-2) = 61\cdot 61 = 3721$, включая случаи, когда оба узла находятся на диагонали. Тогда всего способов расположения двух таких узлов будет:

$62 \cdot 3721 = 230702$ при расположении одного из узлов на диагонали DB.

$62 \cdot 3721 = 230702$ при диагонали AC

Всего способов будет $230702 \times 2 = 461404$

Ответ: 461404

211005570 (U852814 M1274481)

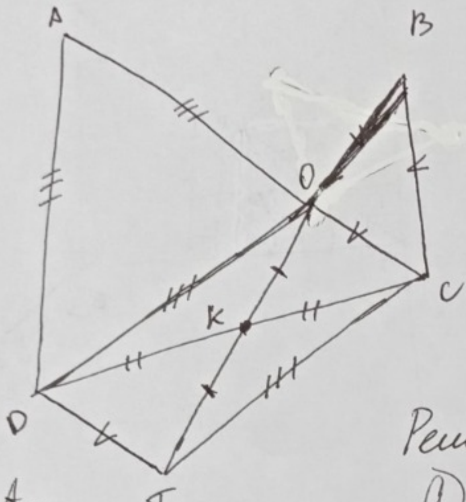
Чистовик

№ 6.

Дано: $\triangle AOD$, $\triangle BOC$ – правильные.

$DK = KC$

$OK = KT$



а) Доказать, что $\triangle ABT$ – правильный

б) $BC = 2$, $AD = 4$. Найти $\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}}$

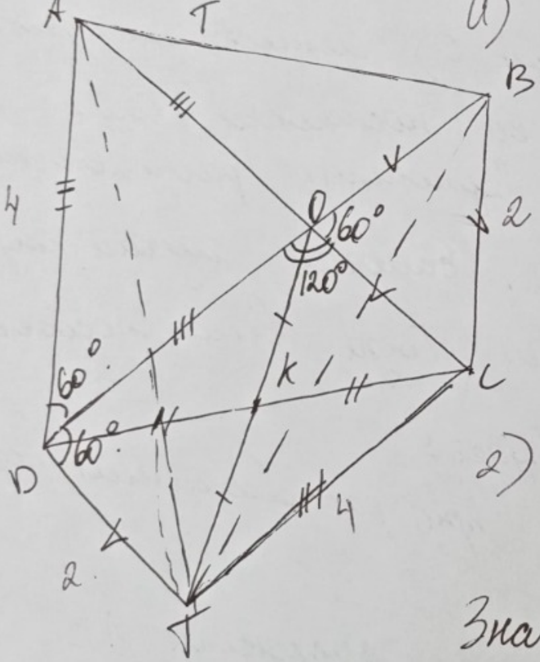
Решение:

а) 1) $\angle BOC = 60°$ $\Rightarrow \angle DOC = 180° - 60° = 120°$.

$DOCT$ – параллелограмм т.к. $OK = KT$, $DK = KC$ (диагонали)

Значит $\angle ODT = 180° - 120° = 60°$

$\triangle ADT$: $\angle ADT = 60° + 60° = 120°$.



2) $\triangle ADT = \triangle DOC$ т.к. ($\angle DOC = \angle ADT = 120°$; $OC = DT$, $AD = OD$)

Значит $AT = DC$.

$\triangle TBC = \triangle DOC$ также $\Rightarrow$

$AT = BT = DC$

3) $\triangle AOB = \triangle DOC$ т.к. $\angle AOB = \angle DOC$ – вертикальные

$OC = OB$, $DO = OA$ по усл. $\Rightarrow$ $AB = DC$.

4) $\triangle ABT$ $AT = BT = AB = DC$. $\triangle ABT$ – правильный

211005570 (U852814 M1274481)

№6 Чистовик

б) В $\triangle ADT$: $\angle ADT = 120^\circ$, $AD = 4$, $DT = 2$.

теорема косинусов:

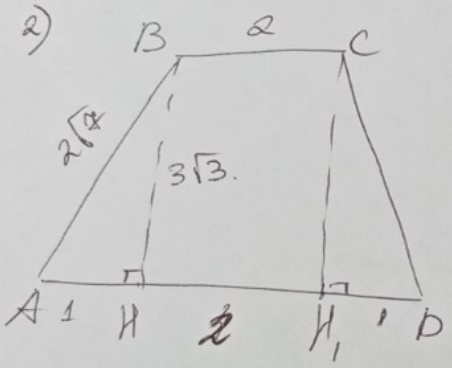
$$AT^2 = AD^2 + DT^2 - 2 \cdot AD \cdot DT \cdot \cos\angle ADT$$

$$AT = \sqrt{16 + 4 - 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{20 + 16 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{20+8} = 2\sqrt{7}.$$

h – высота $\triangle ABT$ $\quad h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AT = \sqrt{21}.$

$$S_{ABT} = \frac{1}{2} h \cdot AT = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{21} \cdot 2\sqrt{7} = 7\sqrt{3}.$$

2)



$ABCD$ – трапеция т.к.

$BC \parallel AD$ ($\angle OBC = \angle ODA = 60^\circ$ – накрест лежащие)

$AB = CD$ (доказано выше)

Д.п. $BH, CH_1 \perp AD$

$H_1D = AH = \frac{4-2}{2} = 1.$

$AB = AT = 2\sqrt{7}$

$\triangle ABH$: $\angle AHB = 90^\circ$, $\quad BH = \sqrt{4 \cdot 7 - 1} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}.$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot BH = \frac{1}{2}(2+4) \cdot 3\sqrt{3} = 3 \cdot 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}.$$

$$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{7\sqrt{3}}{9\sqrt{3}} = \frac{7}{9}$$

Ответ: $\frac{7}{9}$

5

211005570 (U852814 M1274481)