Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211005568**

ID профиля: **374522**

Вариант 12

Чистовик

№2

Математика, 10
Вариант 12
Часть 1

$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+3=2\sqrt{4+3x-x^2}$

Заметим, что $(x+1)(4-x)=4+3x-x^2$.

Замена:
$x+1=a$
$4-x=b$

$\sqrt{a}-\sqrt{b}=2\sqrt{ab}-3 \quad |()^2$

$a-2\sqrt{ab}+b=4ab-12\sqrt{ab}+9$

$10\sqrt{ab}=4ab-a-b+9$

Вернемся к x: $10\sqrt{(x+1)(4-x)}=4(x+1)(4-x)-x-1-4+x+9$

$10\sqrt{(x+1)(4-x)}=4(x+1)(4-x)+4 \quad |:2$

Пусть $t=ab$, тогда $5\sqrt{ab}=2ab+2 \Rightarrow \begin{cases}5\sqrt{t}=2t+2 \quad |()^2\\ t\geq 0\end{cases}$

$\begin{cases}25t=4t^2+8t+4\\ t\geq 0\end{cases}$ $\quad \begin{cases}(4t-1)(t-4)=0\\ t\geq 0\end{cases}$

$\begin{cases}\left[\begin{array}{l} t=\frac{1}{4}\\ t=4\end{array}\right.\\ -1\leq x\leq 4\end{cases}$ $\quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l} 4+3x-x^2=\frac{1}{4}\\ 4+3x-x^2=4\end{array}\right.\\ -1\leq x\leq 4\end{cases}$ $\quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l} 4x^2-12x-15=0\\ x=3\\ x=0\end{array}\right.\\ -1\leq x\leq 4\end{cases}$

$\begin{cases}\left[\begin{array}{l} x_{1,2}=\frac{12\pm\sqrt{12^2+16\cdot 15}}{8}\\ x=3\\ x=0\end{array}\right.\\ -1\leq x\leq 4\end{cases}$ $\quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l} x_{1,2}=\frac{3\pm 2\sqrt{6}}{2}\\ x=0\\ x=3\end{array}\right.\\ -1\leq x\leq 4\end{cases}$

1

~~Корни $x=0$ и $x=3$ подходят~~, ~~нужно проверить~~, ~~попадают ли в промежуток $-1\leq x\leq 4$ корни~~
~~$x_{1,2}=\frac{3\pm 2\sqrt{6}}{2}$~~

Чистовик

№2 (продолжение)

математика, 10
Вариант 12
Часть 1

Получим: $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \\ x=\dfrac{3+2\sqrt{6}}{2} \\ x=\dfrac{3-2\sqrt{6}}{2} \end{array}\right.$ подставим в исходное и проверим.

1) $x=0$ $\quad \sqrt{1}-\sqrt{4}+3=2\sqrt{4}$

$1-2+3=2\cdot 2$; $2=4$ – неверно, это посторонний корень.

2) $x=3$ $\quad \sqrt{4}-\sqrt{1}+3=2\sqrt{4+9-9}$

$2-1+3=2\sqrt{4}$; $4=2\cdot 2$ – верно, этот корень подходит

3) $x=\dfrac{3+2\sqrt{6}}{2}$ Заметим, что $\sqrt{4-\dfrac{3+2\sqrt{6}}{2}}=$

$$=\sqrt{\frac{5-2\sqrt{6}}{2}}=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{1+\frac{3+2\sqrt{6}}{2}}=\sqrt{\frac{5+2\sqrt{6}}{2}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

2

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+1-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+1+3=2\sqrt{\frac{(5-2\sqrt{6})(5+2\sqrt{6})}{4}}$$

$5=2\cdot\dfrac{\sqrt{25-24}}{2} \Rightarrow 5=\cancel{2}1$ – неверно $\Rightarrow$ не подходит.

продолжение см. на листе 7

Чистовик

Математика, 10
Вариант 12
Часть 1

№3

$2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0$ - A

(2) $ax^2+4a^2x-ay+4a^3+2=0$

Из (2): $y=x^2+4ax+4a^2+\frac{2}{a}$ - парабола с вершиной В.

$-\frac{b}{2a}=\frac{-4a}{2}=-2a \Rightarrow y(-2a)=4a^2-8a^2+4a^2+\frac{2}{a}=\frac{2}{a}$

$B(-2a;\frac{2}{a})$

$2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0$

$x^2+x(2y-2a)+(5y^2-6ay+2a^2)=0$

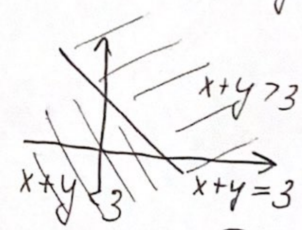
$x_{1,2}=\frac{2a-2y\pm\sqrt{4y^2-8ay+4a^2-20y^2+24ay-8a^2}}{2}=$

$=a-y\pm\sqrt{\underbrace{-4y^2-a^2+4ay}_{\geq 0}}$ $\Rightarrow 4y^2+a^2-4ay\leq 0$

$(2y-a)^2\leq 0 \Rightarrow y=\frac{a}{2}$

$\Rightarrow x=a-y=\frac{a}{2}$

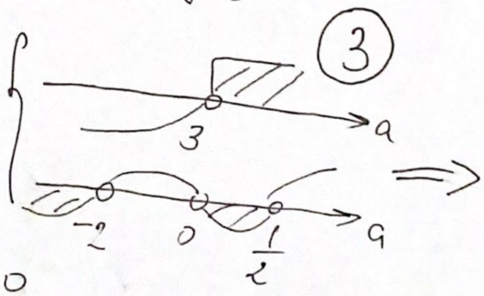
Значит, $B(-2a;\frac{2}{a})$; $A(\frac{a}{2};\frac{a}{2})$



Два варианта:

1) $\begin{cases}\frac{a}{2}+\frac{a}{2}>3\\ -2a+\frac{2}{a}>3\end{cases}$ $\begin{cases}a>3\\ \frac{2a^2+3a-2}{a}<0\end{cases}$

$\begin{cases}a>3\\ \frac{-2a^2+2}{a}>\frac{3a}{a}\end{cases}$ $\begin{cases}a>3\\ \frac{(2a-1)(a+2)}{a}<0\end{cases}$



Чистовик

математика, 10
вариант 12
часть 1

№3 (продолжение)

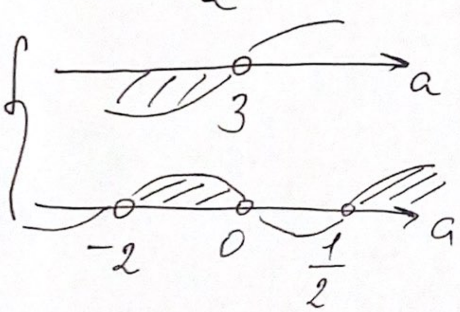
$\Rightarrow$ у данной системы нет решений

2) $\begin{cases} \dfrac{a}{2} + \dfrac{a}{2} < 3 \\ -2 + \dfrac{2}{a} < 3 \end{cases}$

$\begin{cases} a < 3 \\ \dfrac{-2a^2+2}{a} < \dfrac{3a}{a} \end{cases}$

$\begin{cases} a < 3 \\ \dfrac{2a^2+3a-2}{a} > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} a < 3 \\ \dfrac{(2a-1)(a+2)}{a} > 0 \end{cases}$



$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} -2 < a < 0 \\ \dfrac{1}{2} < a < 3 \end{array} \right. \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Ответ: $a \in (-2;0) \cup \left(\dfrac{1}{2};3\right)$.

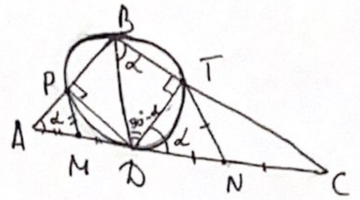
Чистовик

математика, 10

вариант 12

часть 1

N 1



PM // TN

a) найти $\angle ABC$

пусть $\angle DBT = \alpha \Rightarrow \angle BDT = 90^\circ - \alpha$ (т.к. $\angle BTD = 90^\circ$, ведь он смотрит на диаметр).

~~Таже~~ Также $\angle TDC = \alpha$ (так как угол между касательной и хордой равен углу, смотрящему на эту хорду $\Rightarrow \angle TDC = \angle DBT$

т.к. $\angle BTD = 90^\circ$, то $\angle DTC = 180^\circ - \angle BTD = 90^\circ \Rightarrow TN$ - мед. в прямоуг. Δ-ке $\Rightarrow DN = TN = NC \Rightarrow \Delta DTN$ - р/б.

$\angle DTN = \angle TDN = \alpha \Rightarrow \angle DNT = 180 - 2\alpha$

т.к. $PM // TN$, то $\angle DNT = \angle AMP \Rightarrow \angle AMP = 180 - 2\alpha$

Заметим, что ΔAPD - прямоугольный Δ-ник. ($\angle APD = 180^\circ - \angle BPD = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ т.к. $\angle BPD$ смотрит на диаметр). $\Rightarrow PM$ - медиана в премоуг Δ-ике

$\Rightarrow PM = AM = MD \Rightarrow \Delta AMP$ - р/б. $\Rightarrow \angle PAM = \angle APM =$

$$= \frac{180 - \angle AMP}{2} = \alpha \Rightarrow \angle PDA = 90^\circ - \angle PAD = 90^\circ - \alpha$$

Заметим, что $\angle BDT = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \angle BDC = \angle BDT + \angle TDC =$
$= 90 - \alpha + \alpha = 90^\circ$

$\angle BDP = \angle ADB - \angle ADP = 90 - (90 - \alpha) = \alpha$

5

$\angle PDT = \angle PBD + \angle BDT = \alpha + 90 - \alpha = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle PBT = \angle ABC = 180^\circ - \angle PDT = 90^\circ$

~~$\angle ABT$~~ $\angle ABC = 90^\circ$

Чистовик

Математика, 10
вариант 12
часть 1

N1 (продолжение)

б) $MP = \frac{1}{2}$ | найти: $S_{\triangle ABC} = ?$

$NT = 1$

$BD = \frac{4}{3}$

Как доказали в пункте (а) $NT = DN = CN \Rightarrow AC = AM + MD + DN + NC = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 + 1 = 3$ $\rightarrow MP = AM = MD$. Также в пункте (а) доказали, что BD - высота $\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{4}{3} = 2 \Rightarrow \underline{S_{\triangle ABC} = 2}$

Ответ: $\angle ABC = 90°$; $S_{\triangle ABC} = 2$.

6

Чистовик   Математика, 10
Вариант 12, часть 1

N2 (продолжение (еще одно))

4) $x = \frac{3-2\sqrt{6}}{2}$ Аналогично, $\sqrt{\frac{1+\frac{3-2\sqrt{6}}{2}}{4-\frac{3-2\sqrt{6}}{2}}} = \sqrt{\frac{5-2\sqrt{6}}{2}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - 1 - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - 1 + 3 = 1 \Rightarrow 1 = 1$ – подходит.

$\Rightarrow$ Ответ: $\left\{3; \frac{3-2\sqrt{6}}{2}\right\}$.

Черновик Математика, 10 кл.

Вариант 12

часть 1

N2

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\underbrace{\sqrt{4+3x-x^2}}_{\sqrt{(x+1)(4-x)}}$

$(\sqrt{x+1} + \sqrt{4-x})^2 = 3 + 2\sqrt{4+3x-x^2}$

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} = 2\sqrt{4+3x-x^2} - 2\sqrt{4+3x-x^2} - 3 + 2\sqrt{\dots}$

$\underbrace{\sqrt{4-x} - \sqrt{x+1}} = 3 - 2\sqrt{(x+1)(4-x)}$

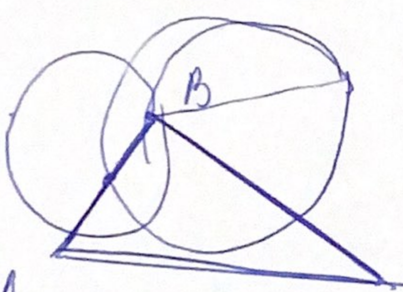
$^2 \Rightarrow 3 - 2\sqrt{\dots} = 3 - 2\sqrt{\dots}$

верно

ОДЗ: $x+1 \geq 0$ $x \geq -1$

$4-x \geq 0$ $x \leq 4$ $\Rightarrow x \in [-1; 4]$.

N1



$3 - 2\sqrt{\dots} = 4(4+3x-x^2) - 12\sqrt{} + 9$

$3 - 2\sqrt{} = 16 + 12x - 4x^2 - 12\sqrt{} + 22$ $|:2$

$14\sqrt{} = -4x^2 + 12x + 11$

$7\sqrt{} = -2x^2 + 6x + 11$ $|^2$

N2

$D = (\sqrt{2})^2$

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} = 2\sqrt{\dots} - 3$

$3 - 2\sqrt{\dots} = 2\sqrt{\dots} - 3$

$6 = 4\sqrt{\dots}$

$3 = 2\sqrt{\dots}$

$9 = 4(4+3x-x^2)$

$9 = 16 + 12x - 4x^2$

$4x^2 - 12x - 7$

$D = 144 + 16 \cdot 7$

$256 = 16^2$

$16^2 = 4^4 = 2^8$

(1)

$\times 16$, 16, $+96$, 16, 256; $\times 3$, 16, 108; $+144$, 256

~~Чистовик~~ Черновик

Математика, 10, Вариант 12, часть 1

№2 (продолжение)

Сравним числа $\frac{3-2\sqrt{6}}{2} \vee -1 \quad |\cdot 2$

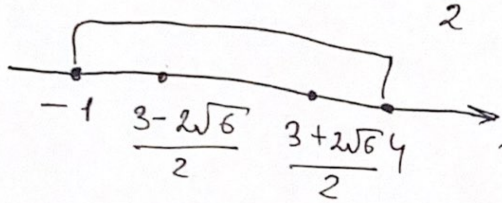
$3-2\sqrt{6} \vee -2$; $5 \vee 2\sqrt{6} \quad |:2$; $\frac{5}{2} \vee \sqrt{6} \quad |()^2$;

$\frac{25}{4} \vee 6 \quad |\cdot 4$; $25 \vee 24 \Rightarrow \frac{3-2\sqrt{6}}{2} > -1$

Сравним числа $\frac{3+2\sqrt{6}}{2} \vee 4 \quad |\cdot 2$

$3+2\sqrt{6} \vee 8$; $2\sqrt{6} \vee 5 \quad |:2$; $\sqrt{6} \vee \frac{5}{2} \quad |()^2$; $6 \vee \frac{25}{4} \quad |\cdot 4$;

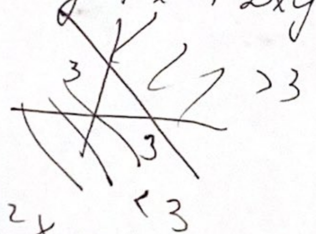
$24 \vee 25 \Rightarrow \frac{3+2\sqrt{6}}{2} < 4$



$\Rightarrow$ Ответ: $\left\{\frac{3\pm 2\sqrt{6}}{2}; 0; 3\right\}$

$2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0$ – A

$x+y=3$



$ax^2+4a^2x-ay+4a^3+2=0$ – парабола с вершиной в т. B

②

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211005568**

ID профиля: **374522**

Вариант 12

Чистовик.

математика, 10кл.
Вариант 12
Часть 2

№4

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \\ 2x^4 + 2y^4 + 5x^2y^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

Замена: $\begin{cases} x^2 = a \\ y^2 = b \end{cases}$

$$\begin{cases} \frac{1}{a+b} + ab = \frac{5}{4} \\ 2a^2 + 2b^2 + 5ab = \frac{9}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a+b} + ab = \frac{5}{4} \\ 2(a^2 + b^2 + 2ab) + ab = \frac{9}{4} \end{cases}$$

Замена: $\begin{cases} d = a+b \\ c = ab \end{cases}$

Тогда: $\begin{cases} \frac{1}{d} + c = \frac{5}{4} \\ 2d^2 + c = \frac{9}{4} \end{cases}$ $\begin{cases} 2d^2 - \frac{1}{d} = 1 \\ \frac{1}{d} + c = \frac{5}{4} \end{cases}$ $\begin{cases} 2d^3 - d - 1 = 0 \\ \frac{1}{d} + c = \frac{5}{4} \end{cases}$

$$\begin{cases} (d-1)(2d^2+2d+1) = 0 \\ \frac{1}{d} + c = \frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} d = 1 \\ 2d^2 + 2d + 1 = 0 \text{ нет корней } (D<0) \end{array}\right. \\ \frac{1}{d} + c = \frac{5}{4} \end{cases}$$

$\begin{cases} d = 1 \\ c = \frac{1}{4} \end{cases}$ вернемся к прошлой замене $\Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ ab = \frac{1}{4} \end{cases}$ $\begin{cases} a(1-a) = \frac{1}{4} \\ a + b = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} a^2 - a + \frac{1}{4} = 0 \\ a + b = 1 \end{cases}$ $D = 1 - 4 \cdot \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

$a = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{2}$; ~~вернёмся к прошлой~~

вернёмся к x и y: $\begin{cases} x^2 = \frac{1}{2} \\ y^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{\sqrt{2}};\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x = -\frac{1}{\sqrt{2}};\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x = -\frac{1}{\sqrt{2}};\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ x = \frac{1}{\sqrt{2}};\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$

Ответ: $\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right); \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right); \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right); \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\}$

1

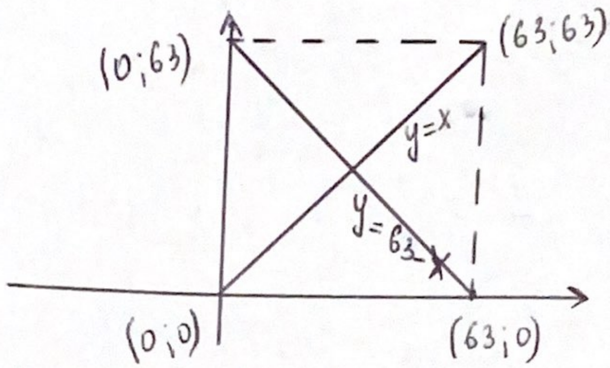
Чистовик

№5

математика, 10

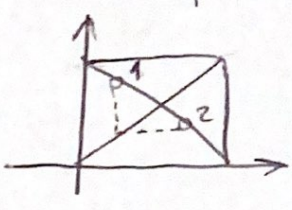
Вариант 12

Часть 2.



1) Случай, когда обе точки принадлежат диагоналям: количество способов выбрать одну точку на двух диагоналях: $62+62=124$ (на каждой диагонали по 62 доступные точки, т.к. границы квадрата мы не включаем).

Количество способов выбрать другую: если на той же диагонали, что и первую, то $62-1=$ $=61$ способ, если на другой, то $62-2=60$ способов (потому что ещё вычеркиваем две точки, принадлежащие верт. и горизонт.:



точки 1 и 2 - те, что мы вычли.

$\Rightarrow$ в данном случае $\frac{\cancel{(64+64)(61+60)}}{2} =$

$$\frac{(62+62)(61+60)}{2} = \frac{124 \cdot 121}{2},$$ где

124 способа выбрать одну на диаг. 2

121 способ выбрать другую на диагоналях

деление на 2 - убираем повторяющиеся пары.

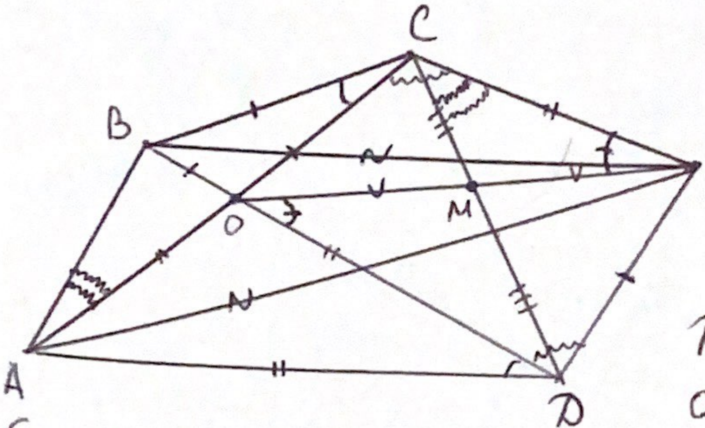
математика, 10 кл.
Чистовик Вариант 12
№5 (продолжение) часть 2.

2) Это случай, когда одна на диагонали, а другая нет: как уже знаем, на диаг. выбрать 124 способа.
Другую: 62^2 - всего внутри
124 - те, что на диагоналях
120 - те, что на них осях (это все точки вида 14 2 (см. первый случай)).
прямых, параллель.
Значит, способ выбрать другую: $62^2 - 124 - 120$
Здесь всего $124(62^2 - 124 - 120)$ способов
Тут все пары разные.
Ответ: $\frac{124 \cdot 121}{2} + 124(62^2 - 124 - 120)$.

③

Чистовик
№7

Математика, 10 кл.
Вариант 12
Часть 2.



1) Док-ть: ABT- правильный Δ-ник.

Док-во: заметим, что OCTD - параллелограмм (так как точка пересечения диагоналей делит их пополам). => CT=OD и CO=TD.

Докажем, что BT = AT. Для этого рассм. Δ-ники ΔBCT и ΔADT. В них мы знаем, что BC=TD (т.к. CO=TD и CO=BC=BO, поскольку Δ BOC - прав.) и знаем, что CT=AD (по той же причине).

$\angle BCT = \underbrace{\angle BCO}_{=60^\circ} + \angle OCT = 60^\circ + \angle OCT$
(Δ BOC - прав.)

$\angle OCT = \angle ODT$
(противоп. углы п-мма)

$\angle ADT = \underbrace{\angle ADO}_{=60^\circ} + \angle ODT = 60^\circ + \angle ODT$
(Δ ADO - прав.)

=> ΔADT = Δ BCT по св-ву рав-ва Δ-ников (стор; угол; стор) - 1 пр-к. =>
=> доказали, что BT = AT (как соотв. элем. в рав-ных Δ-никах).

Докажем, что AB=BT=AT

Знаем, что BT = AT => Δ ABT - р/б. =>
=> ∠ ABT = ∠ BAT

4

Δ BOA = Δ OCD (BO=CO ; AO = DO, ∠BOA = ∠COD (верт.))

Чистовик

математика, 10 класс

N6 (продолжение) Вариант 12

Часть 2

Так как OCTD - п-мм $\Rightarrow \triangle CTD = \triangle OCD \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle BOA = \triangle TCD \Rightarrow \angle ABD = \angle TDC$ и $\angle BAC = \angle TCD$

$\angle CTO = \angle TOD$ (при $\parallel$ прямых)

$\angle COD = 120°$ (внешний у $\triangle BOC \Rightarrow 180° - 60° = 120°$)

$\angle COT = \angle COD - \angle DOT = 120°$

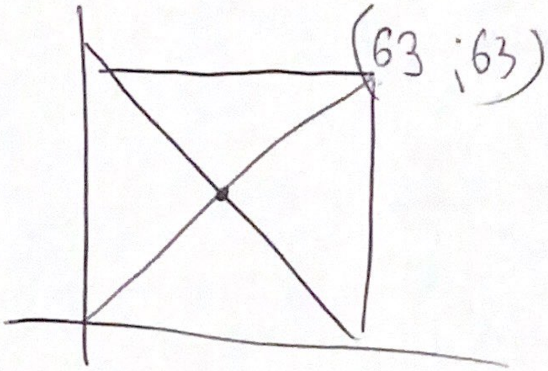
В $\triangle COT$: $\angle OCT = 180° - 120° = 60° \Rightarrow$

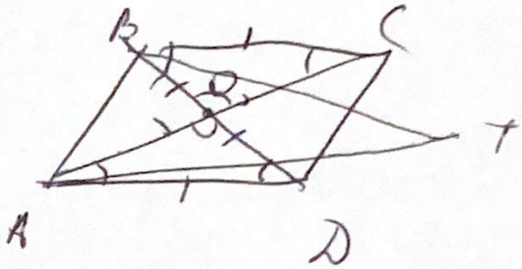
$\Rightarrow \angle ODT$ - тоже $60°$.

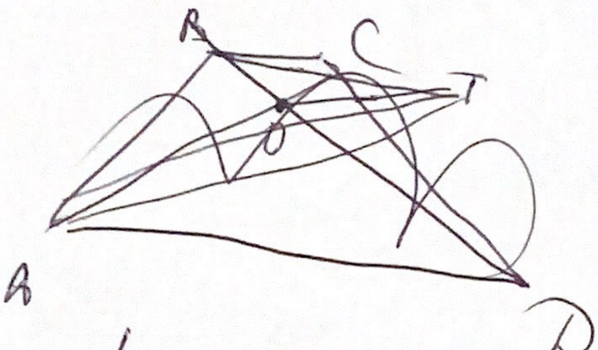
5

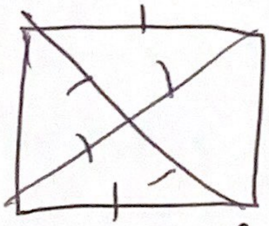
Черновик

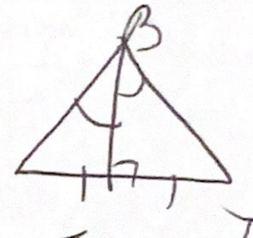
математика, 10
вариант 12
часть 2

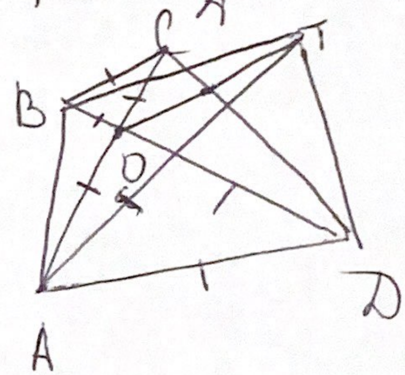












$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \dfrac{5}{4} \\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2 = \dfrac{9}{4} \end{cases}$$

$x^2=a$; $y^2=b$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a+b} + ab = \dfrac{5}{4} \\ 2(a+b)^2 + ab = \dfrac{9}{4} \end{cases}$$

пусть $a+b=t$
$ab=S$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{t} + S = \dfrac{5}{4} \\ 2t^2 + S = \dfrac{9}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{t} = \dfrac{5}{4} - S \\ S = \dfrac{9}{4} - 2t^2 \end{cases}$$

1

Черновик

Математика, 10 кл.
Вариант 12
Часть 2.

$x^2=a$

$y^2=b$ $\begin{cases} \dfrac{1}{a+b}+ab=\dfrac{5}{4} \\ 2a^2+2b^2+5ab=\dfrac{9}{4} \quad (*) \end{cases}$

(*)

$$\underbrace{2(a^2+b^2+2ab)}_{(a+b)^2 \text{ } \underbrace{(a+b)}_{d}}+\underbrace{ab}_{c}=\frac{9}{4}$$

нули: 1

$$\begin{cases} \dfrac{1}{d}+c=\dfrac{5}{4} \\ 2d^2+c=\dfrac{9}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overbrace{2d^2-d=1}^{2d^3-d-1=0} \\ \dfrac{1}{d}+c=\dfrac{5}{4} \end{cases}$$

$(d-1)(2d^2+2d+1)$

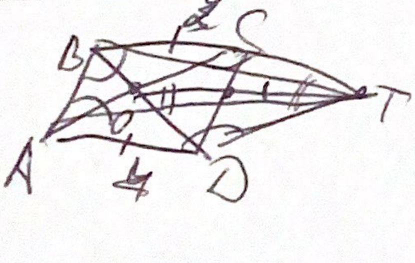
$D=4-8=-4$

$-4<0$

$D<0$

$d=1 \rightarrow c=\dfrac{1}{4}$

...



②