Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211005512**

ID профиля: **281739**

Вариант 12

Часть 1 — №2 — Вариант 12

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+3=2\sqrt{4+3x-x^2}$$

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}=2\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{4-x}-3$$

$$\sqrt{4-x}-\sqrt{x+1}=3-2\cdot\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{4-x}$$

$$\sqrt{4-x}-\sqrt{x+1}=\big((4-x)-2\cdot\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{4-x}+(x+1)\big)-2$$

$$\sqrt{4-x}-\sqrt{x+1}=(\sqrt{4-x}-\sqrt{x+1})^2-2$$

$$(\sqrt{4-x}-\sqrt{x+1})^2-(\sqrt{4-x}-\sqrt{x+1})-2=0$$

ОДЗ:

$$\begin{cases}x+1\geq 0\\4-x\geq 0\\4+3x-x^2\geq 0\end{cases}\qquad\begin{cases}x\geq -1\\x\leq 4\\(x-4)(x+1)\leq 0\end{cases}$$

$$x\in[-1;4]$$

Пусть $t=\sqrt{4-x}-\sqrt{x+1}$. $t^2-t-2=0$

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{4-x}-\sqrt{x+1}=-1\\\sqrt{4-x}-\sqrt{x+1}=2\end{array}\right.\qquad\Leftarrow\qquad\left[\begin{array}{l}t=-1\\t=2\end{array}\right.$$

I $\sqrt{4-x}-\sqrt{x+1}=-1$

$$\sqrt{4-x}-\sqrt{x+1}<0$$

$$\Downarrow$$

$$4-x<x+1$$

$$x>\frac{3}{2}$$

$$\begin{cases}x>\frac{3}{2}\\(4-x)-2\sqrt{4+3x-x^2}+(x+1)=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}x>\frac{3}{2}\\\sqrt{4+3x-x^2}=2\end{cases}$$

$$\begin{cases}x>\frac{3}{2}\\4+3x-x^2=4\end{cases}$$

II $\sqrt{4-x}-\sqrt{x+1}=2$

$$\sqrt{4-x}-\sqrt{x+1}>0$$

$$\Downarrow$$

$$4-x>x+1$$

$$x<\frac{3}{2}$$

$$\begin{cases}x<\frac{3}{2}\\(4-x)-2\sqrt{4+3x-x^2}+(x+1)=4\end{cases}$$

$$\begin{cases}x<\frac{3}{2}\\\sqrt{4+3x-x^2}=\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}x<\frac{3}{2}\\4+3x-x^2=\frac{1}{4}\end{cases}$$

$$\begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ x^2 - 3x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < \frac{3}{2} \\ x^2 - 3x - \frac{15}{4} = 0 \end{cases}$$

$D = 24$

$$\begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ x \in \{0; 3\} \end{cases}$$

$x = 3$ — входит в ОДЗ

$$\begin{cases} x < \frac{3}{2} \\ x \in \left\{\frac{3}{2} - \sqrt{6}; \frac{3}{2} + \sqrt{6}\right\} \end{cases}$$

$x = \frac{3}{2} - \sqrt{6}$

входит в ОДЗ, т.к.

$\frac{3}{2} - \sqrt{6} > \frac{3}{2} - 2{,}5$

$\frac{3}{2} - \sqrt{6} > -1$

Ответ: $x \in \left\{\frac{3}{2} - \sqrt{6}; 3\right\}$.

№3

точка A: $2a^2 - 2ax - 6ay + x^2 + 2xy + 5y^2 = 0$

Решим ур-ие отн-то x:

$x^2 + 2(y-a)x + (5y^2 - 6ay + 2a^2) = 0$

$D = 4y^2 - 8ay + 4a^2 - 20y^2 + 24ay - 8a^2 =$

$= -16y^2 + 16ay - 4a^2 = -4(4y^2 - 4ay + a^2)$

$D = -4(2y-a)^2$

$D \leq 0$ => решение есть только при $D = 0$,

т.е. $2y - a = 0$ => $y = \frac{a}{2}$

Тогда $x = \frac{2(a-y)}{2} = a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$ $\quad A\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$

точка B: $a\cdot x^2+4a^2\cdot x-a\cdot y+4a^3+2=0$

$a\cdot y=a\cdot x^2+4a^2\cdot x+4a^3+2 \quad \Big| :a$ ($\neq 0$, т.к. это парабола)

$y=x^2+4a\cdot x+4a^2+\frac{2}{a}$

при $a=0$:

$0=2$

неверно!

(что это?)

$y=(x+2a)^2+\frac{2}{a}$

$\Downarrow$

$x_B=-2a$ и $y_B=\frac{2}{a}$

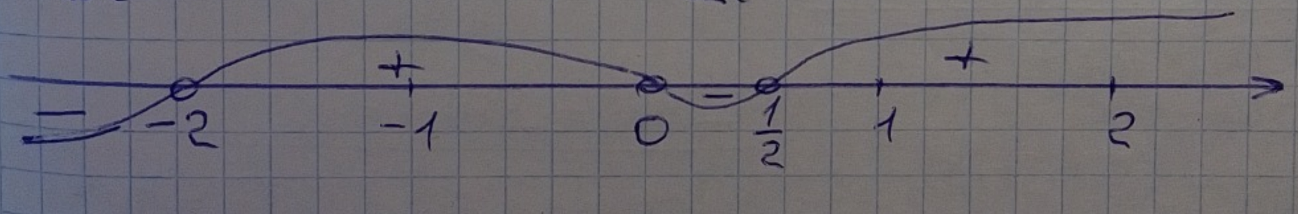
$B\left(-2a;\frac{2}{a}\right)$

$x+y=3$

$y=3-x$ => чтобы A и B лежали по одну сторону:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} y_A<3-x_A \\ y_B<3-x_B\end{cases}\\ \begin{cases} y_A>3-x_A \\ y_B>3-x_B\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} \frac{a}{2}<3-\frac{a}{2} \\ \frac{2}{a}<3+2a\end{cases}\\ \begin{cases} \frac{a}{2}>3-\frac{a}{2} \\ \frac{2}{a}>3+2a\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} a<3 \\ \frac{2a^2+3a-2}{a}>0\end{cases}\\ \begin{cases} a>3 \\ \frac{2a^2+3a-2}{a}<0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} a<3 \\ a(2a^2+3a-2)>0\end{cases}\\ \begin{cases} a>3 \\ a(2a^2+3a-2)<0\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} a<3 \\ a(2a-1)(a+2)>0\end{cases}\\ \begin{cases} a>3 \\ a(2a-1)(a+2)<0\end{cases}\end{array}\right.$$



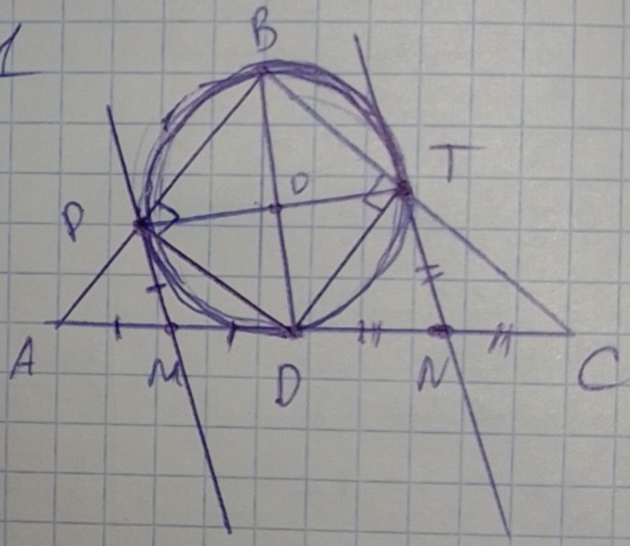
метод интервалов

$$\left[\begin{aligned}&\begin{cases}a<3\\ a\in(-2;0)\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right)\end{cases}\\ &\begin{cases}a>3\\ a\in(-\infty;-2)\cup\left(0;\frac{1}{2}\right)\end{cases}\end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned}&a\in(-2;0)\cup\left(\frac{1}{2};3\right)\\ &a\in\varnothing\end{aligned}\right.$$

Ответ: $a\in(-2;0)\cup\left(\frac{1}{2};3\right)$.

№1



Дано: $\triangle ABC$, $D\in AC$

ω с диаметром BD

$\omega\cap AB=\{B;P\}$

$\omega\cap BC=\{B;T\}$

M – сер. AD, N – сер. CD

$PM\parallel TN$

а) $\angle ABC=?$

б) $MP=\frac{1}{2}$, $NT=1$, $BD=\frac{4}{3}$

$S_{ABC}=?$

Решение:

1) Проведём PD и TD

Углы BPD и BTD вписаны в ω и опираются на диаметр BD.

$\Downarrow$

$\angle BPD=\angle BTD=90^\circ$

Но тогда $\angle APD=\angle CTD=90^\circ$

$\triangle APD$ и $\triangle CTD$ – п/у $\Leftarrow$ (как смежные с ними)

2) $\triangle APD$ и $\triangle CTD$ – п/у
PM и TN – медианы в п/у $\triangle$ $\Bigg\} \Rightarrow$ $\underline{AM = PM = MD}$
и
$\underline{DN = TN = CN}$

3) По усл-ию: $\underline{PM \parallel TN}$ $\Rightarrow \angle PMD = \angle TNC$
(как соответств. при $\cap \parallel$ прямых PM и TN секущей MN)

$\underline{PM = MD} \Rightarrow \underline{\angle MPD = \angle MDP}$, т.к. $\underline{\triangle MDP - р/б}$

$\underline{TN = CN} \Rightarrow \underline{\angle NTC = \angle NCT}$, т.к. $\underline{\triangle NCT - р/б}$

Тогда $\angle MDP = \dfrac{180° - \angle PMD}{2}$
$\angle NCT = \dfrac{180° - \angle TNC}{2}$
$\angle PMD = \angle TNC$ (доказано выше) $\Bigg\} \Rightarrow$ $\underline{\angle MDP = \angle NCT}$
~~PMD = TNC~~

4) $\angle MDP$ и $\angle NCT$ – соответств. при $\cap$ прямых PD и TC секущей MC
$\underline{\angle MDP = \angle NCT}$ (из п. 3) $\Bigg\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\underline{BC \parallel PD}$ (по пр. $\parallel$ прямых)

5) $BC \parallel PD$
$BC \perp DT$ $\Bigg\} \Rightarrow \underline{PD \perp DT} \Rightarrow \underline{PB \perp BC}$
$\Downarrow$
$\angle ABC = 90°$

Тогда BTDP – прямоугольник

6) $\underline{\angle ABC = 90°} \Rightarrow \underline{PT - диаметр}$

Пусть $BD \cap PT = O$ – центр ω

7) $\underline{MP = \frac{1}{2}} \Rightarrow \underline{AM = PM = DM = \frac{1}{2}}$

$\underline{TN = 1} \Rightarrow \underline{DN = TN = CN = 1}$

$S_{APD} = \dfrac{AP \cdot PD}{2}$

$S_{DTC} = \dfrac{DT \cdot TC}{2}$

~~$S_{ABC} = AB \cdot T$~~

$S_{BPTD} = BP \cdot BT = TD \cdot PD$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211005512**

ID профиля: **281739**

Вариант 12

①

<u>PM ∥ TN</u>   <u>$\angle ABC = ?$</u> $\triangle ABC$

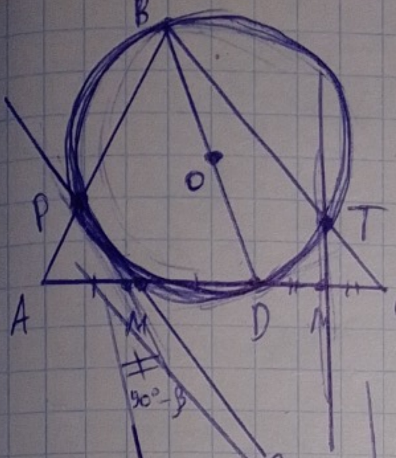
<u>M – сер. AD</u>, <u>N – сер. CD</u>, $D \in AC$

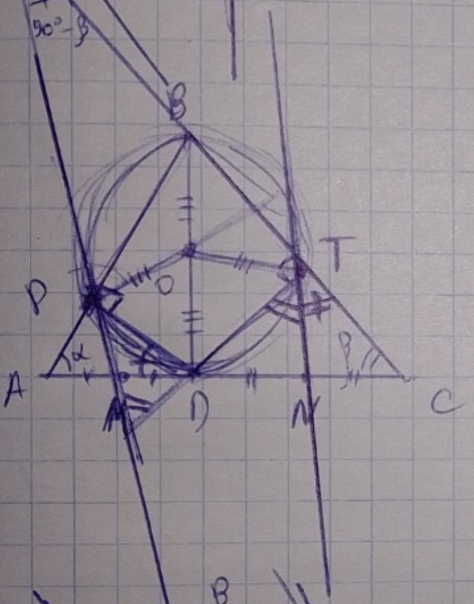
<u>Черновик</u>

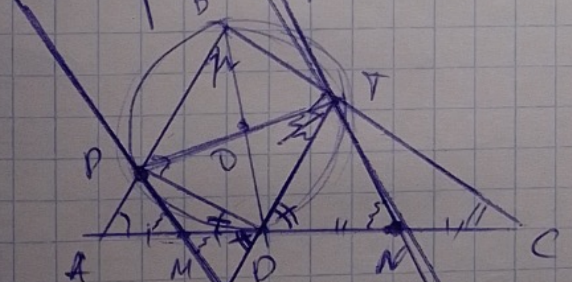
<u>BD – диаметр ω</u>

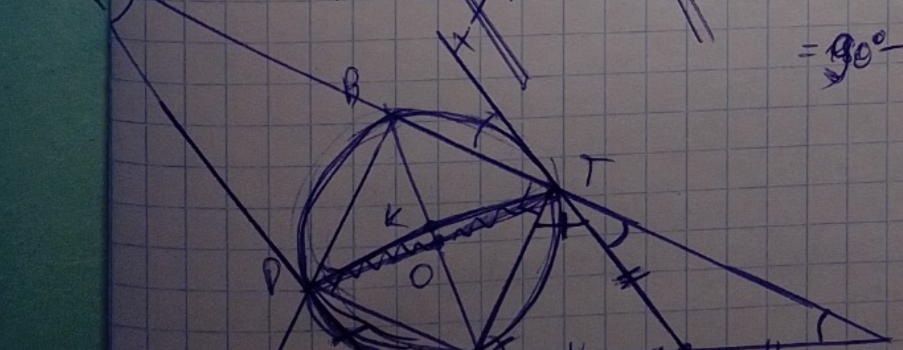
$\omega \cap AB = P$, $\omega \cap BC = T$

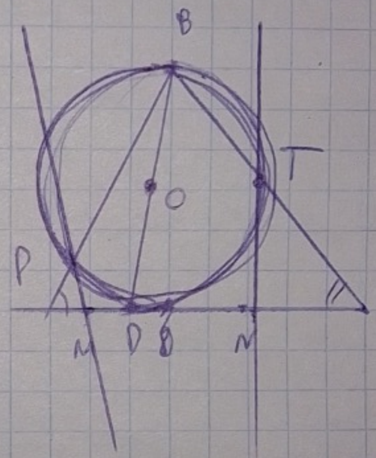
$\angle ABC = ?$











$\angle APM = 90^\circ - \angle MPD =$

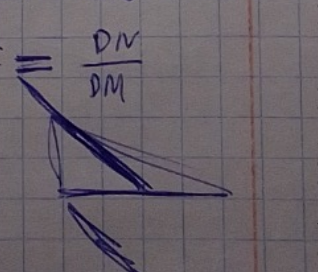
$= 90^\circ - \cancel{180} (\angle A + \angle C - \angle MXD) =$

$= 90^\circ - (\angle A + \angle C - \angle DTN) =$

$= 180^\circ - (\angle A + \angle DNT) =$ $BK \cdot KD = PK \cdot KT$

$= \cancel{90^\circ} - (\angle A + \cancel{9}0^\circ - \angle DTN - \cancel{180^\circ} + \angle C)$

$\frac{TK}{AL} = \frac{DN}{DM}$



Черновик

№2

(2)

$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+3=2\sqrt{4+3x-x^2}$

$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+3=2\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{4-x}$

~~$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}=(x+1)+2\sqrt{x+1}$~~

$\sqrt{4-x}-\sqrt{x+1}=3-2\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{4-x}$

$\sqrt{4-x}-\sqrt{x+1}=(4-x)-2\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{4-x}+(x+1)-2$

$\sqrt{4-x}-\sqrt{x+1}=(\sqrt{4-x}-\sqrt{x+1})^2-2$

$t^2-t-2=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{4-x}-\sqrt{x+1}=-1, \\ \sqrt{4-x}-\sqrt{x+1}=2 \end{array}\right.$

$x+1>4-x$
$2x>3$
$x>\frac{3}{2}$

$x+1<4-x$

$\left[\begin{array}{l} 5-2\sqrt{4+3x-x^2}=1 \\ 5-2\sqrt{4+3x-x^2}=4 \end{array}\right.$

$x<\frac{3}{2}$

$\left[\begin{array}{l} 4+3x-x^2=4 \\ 4+3x-x^2=\frac{1}{4} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x^2-3x=0 \\ x^2-3x-\frac{15}{4}=0 \end{array}\right.$

$D=9+15=24$

$\left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=\frac{3\pm2\sqrt{6}}{2}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{6} \end{array}\right.$

$\frac{3}{2}\pm\sqrt{6}$

$\frac{3}{2}+\sqrt{6}<\frac{3}{2}+2{,}5=4$

$\frac{3}{2}-\sqrt{6}>\frac{3}{2}-2{,}5>-1$

~~$1-2+3=2\cdot2$~~

$2-1+3=2\cdot2$ – верно

$x\in\left\{\frac{3}{2}-\sqrt{6};3\right\}$

ОДЗ:

$\begin{cases} x\geq-1 \\ x\leq4 \\ x^2-3x-4\leq0 \end{cases}$

$\begin{cases} x\in[-1;4] \\ (x-4)(x+1)\leq0 \end{cases}$

$x\in[-1;4]$

Черновик

$$\sqrt{4-\frac{3}{2}+\sqrt{6}}-\sqrt{\frac{5}{2}-\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{5}{2}+\sqrt{6}}-\sqrt{\frac{5}{2}-\sqrt{6}}=x$$

3

$$x^2=5-2\sqrt{\frac{25}{4}-6}=5-2\cdot\frac{1}{2}=4 \Rightarrow x=2$$

№3

$2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0$ — т. A

$ax^2+4a^2x-ay+4a^3+2=0$ — пар. с верш. т. B

т. A и B — по 1 стор. от пр. $l: x+y=3$, $A\notin l$, $B\notin l$ — a — ?

$ax^2+4a^2x-ay+4a^3+2=0$ $\qquad a\neq 0$

$ay=a\cdot x^2+4a^2x+4a^3+2$

$y=x^2+4a\cdot x+4a^2+\frac{2}{a}$ $\qquad y=(x+2a)^2+\frac{2}{a}$

$x_0=-2a$, $y_0=\frac{2}{a}$

$B\left(-2a;\frac{2}{a}\right)$

$\cancel{\left(\frac{1}{2}x^2+2xy+2y^2\right)+\left(9y^2-6ay\right)\geq 0}$

$x^2+2(y-a)x+(5y^2-6ay+2a^2)=0$

$D=4y^2-8ay+4a^2-20y^2+24ay-8a^2=-16y^2+16ay-4a^2=$

$=-4(4y^2-4ay+a^2)=-4(2y-a)^2$ $\qquad a=2y$ ✓✓✓✓✓✓✓

$x^2-2xy+y^2=0$ $\qquad x=y$ $\qquad x=y=\frac{a}{2}$

$A\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right)$ и $B\left(-2a;\frac{2}{a}\right)$

$y = 3 - x$

Черновик

4

$$\left[\begin{cases} a < 3 \\ \frac{4+a^2}{2a} < 3 \end{cases} \quad \begin{cases} a > 3 \\ \frac{4+a^2}{2a} > 3 \end{cases}\right.$$

$$\left[\begin{cases} \frac{a}{2} < 3 - \frac{a}{2} \\ \frac{2}{a} < 3 - \frac{a}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{a}{2} > 3 - \frac{a}{2} \\ \frac{2}{a} > 3 - \frac{a}{2} \end{cases}\right.$$

$$\left[\begin{cases} a < 3 \\ \frac{2}{a} + \frac{a}{2} < 3 \end{cases} \quad \begin{cases} a > 3 \\ \frac{2}{a} + \frac{a}{2} > 3 \end{cases}\right.$$

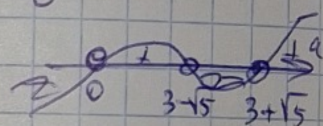
$$\left[\begin{cases} a < 3 \\ a(a^2 - 6a + 4) < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a > 3 \\ a(a^2 - 6a + 4) > 0 \end{cases}\right.$$

$t + \frac{1}{t} < 3$

$t^2 - 3t + 1 < 0$

~~$\begin{cases} a < 3 \\ a(a-2)(a \end{cases}$~~

$$\left[\begin{cases} a < 3 \\ a(a - 3 - \sqrt{5})(a - 3 + \sqrt{5}) < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a > 3 \\ a(a - 3 - \sqrt{5})(a - 3 + \sqrt{5}) > 0 \end{cases}\right.$$

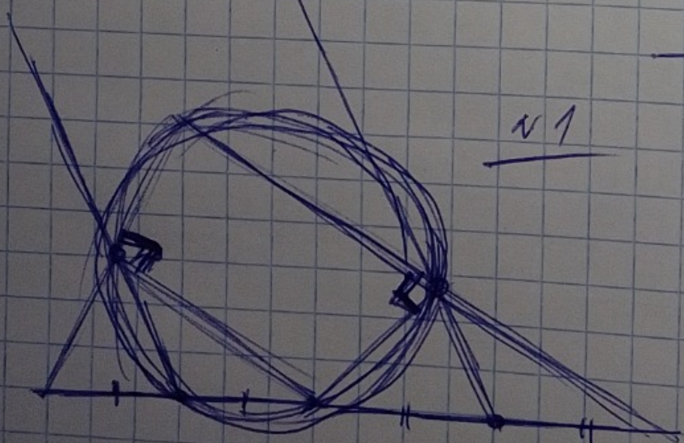


$$\left[\begin{cases} a < 3 \\ a \in (-\infty; 0) \cup (3 - \sqrt{5}; 3 + \sqrt{5}) \end{cases} \quad \begin{cases} a > 3 \\ a \in (-\infty; 3 - \sqrt{5}) \cup (3 + \sqrt{5}; +\infty) \end{cases}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} a \in (-\infty; 0) \cup (3 - \sqrt{5}; 3) \\ a \in (3 + \sqrt{5}; +\infty) \end{array}\right.$$

$a \in (-\infty; 0) \cup (3 - \sqrt{5}; 3) \cup (3 + \sqrt{5}; +\infty)$

№ 1



Черновик

5

№4

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2} + x^2\cdot y^2 = \dfrac{5}{4} \\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2 = \dfrac{9}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2} = \dfrac{5}{4} - x^2\cdot y^2 \\ 2(x^2+y^2)^2 = \dfrac{9}{4} - x^2\cdot y^2 \end{cases}$$

$$\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{5}{4} = 2(x^2+y^2)^2 - \frac{9}{4}$$

$$2(x^2+y^2)^2 - 1 - \frac{1}{x^2+y^2} = 0$$

$$2t^2 - 1 - \frac{1}{t} = 0$$

$$2t^3 - t - 1 = 0$$

$$(2t^3-2t^2)+(2t^2-2t)+(t-1)=0$$

$$(t-1)(2t^2+2t+1)=0$$

$$t=1$$

$$62(62\cdot 118+3)$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2\cdot y^2 = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 = 1-x^2 \\ x^2 - x^4 = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

$$x^4 - x^2 + \frac{1}{4} = 0$$

$$\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

$$x^2 = \frac{1}{2}$$

$$x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

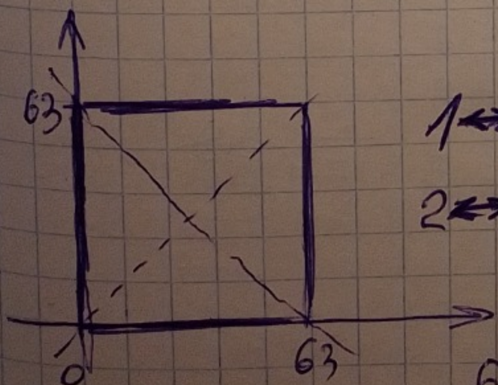
№5

$(0;0)$, $(0;63)$, $(63;0)$, $(63;63)$

2 узла внутри (не вкл. границу)

хотя бы 1 лежал на $y=x$ или $y=63-x$

$x_A \neq x_B$, $y_A \neq y_B$



~~62~~,

$1 \leftrightarrow 62\cdot 2$

$2 \leftrightarrow$ $62\cdot 62 - 62\cdot 2 - 61\cdot 2$, не лежит на l_1 или l_2

$2 \leftrightarrow$ $62\cdot 2 - 1$, лежит на l_1 или l_2

$$62\cdot 2\cdot\left(62\cdot 60 - 61\cdot 2 + \frac{62\cdot 2-1}{2}\right) = 62(62\cdot 120 - 61\cdot 4 + 62\cdot 2 - 1) =$$

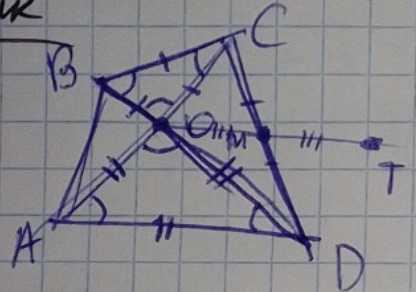
$$= 62(62\cdot 122 - 61\cdot 4 - 1) = 62(62\cdot 122 - 62\cdot 4 + 3)$$

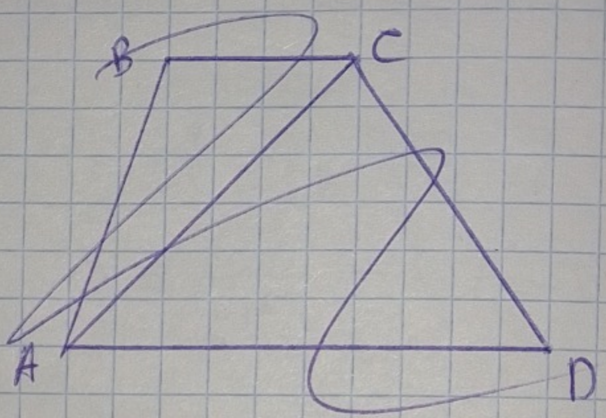
Черновик

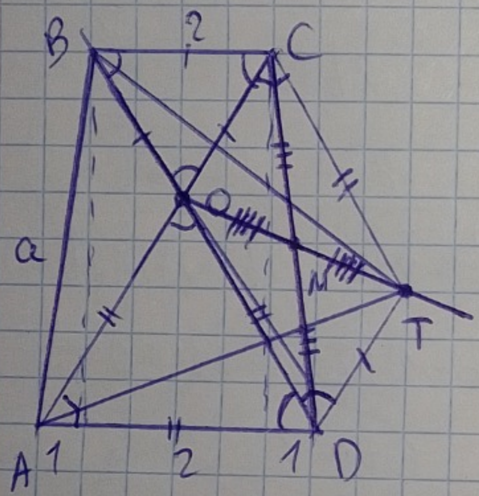
№6

ABCD – трапеция Р/б

(6)







Д-ть: $\triangle ABT$ – правильный

~~Д-во $\triangle AOT$ и $\triangle BCT$~~

Д-во $\triangle AOT$ и $\triangle TCB$: $\triangle AOT = \triangle TCB$

и $\triangle AOB$

$\Rightarrow AB = BT = AT$

$BC = 2$, $AD = 4$

$S_{ABT} : S_{ABCD} = ?$

$$S_{ABT} = \frac{\sqrt{3}\,a^2}{4}$$

$$S_{ABCD} = \frac{2+4}{2} \cdot \sqrt{a^2-1} = 3\sqrt{a^2-1}$$

$$6 = \sqrt{9+a^2-1} = \sqrt{a^2+8}$$

$$a^2+8 = 36$$

$$a^2 = 28$$

$$S_{ABT} = \frac{\sqrt{3}\cdot 28}{4} = 7\sqrt{3}$$

$$S_{ABCD} = 3\sqrt{27} = 9\sqrt{3}$$

$7 : 9$

Чистовик

№4

⑥

ОДЗ:

$x^2+y^2 \neq 0$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2} + x^2\cdot y^2 = \dfrac{5}{4} \\ 2x^4+2y^4+5x^2\cdot y^2 = \dfrac{9}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2\cdot y^2 = \dfrac{5}{4} - \dfrac{1}{x^2+y^2} \\ 2(x^4+2x^2y^2+y^4) = \dfrac{9}{4} - x^2\cdot y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2\cdot y^2 = \dfrac{5}{4} - \dfrac{1}{x^2+y^2} \\ x^2\cdot y^2 = \dfrac{9}{4} - 2(x^2+y^2)^2 \end{cases}$$

$$\frac{9}{4} - 2(x^2+y^2)^2 = \frac{5}{4} - \frac{1}{x^2+y^2}$$

$$2(x^2+y^2)^2 - 1 - \frac{1}{x^2+y^2} = 0 \;\Big|\cdot(x^2+y^2) \neq 0 \text{ по ОДЗ}$$

$$2(x^2+y^2)^3 - (x^2+y^2) - 1 = 0$$

Пусть $t = x^2+y^2\ (t>0)$: $2t^3 - t - 1 = 0$

$$(2t^3-2t^2)+(2t^2-2t)+(t-1)=0$$

$$(t-1)(2t^2+2t+1)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} t-1=0 \\ 2t^2+2t+1=0 \end{array}\right. \qquad D<0$$

$$t=1$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2\cdot y^2 = \dfrac{5}{4} - \dfrac{1}{1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2\cdot y^2 = \dfrac{1}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} y^2 = 1-x^2 \\ x^2(1-x^2) = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Чистовик

(8)

Тогда первый узел мы выбираем n способами.

Второй узел выбираем $N - n - 2$ способами.

кол-во точек, не лежащих на диагоналях, для к-рых $x_A = x_B$ или $y_A = y_B$

Заметим, что 1 узел не может принадлежать двум диагоналям сразу, т.к. ур-ие $x = 63 - x$ не имеет целых решений

$$N_1 = n(N - n - 120) = 62 \cdot 2 \cdot (62^2 - 62 \cdot 2 - 120) = $$
$$= 62 \cdot 2 \cdot 60^2 = 62 \cdot 7200$$

2) Оба узла лежат на диагоналях.

Тогда первый узел мы выбираем n способами.

Второй узел выбираем $n - 3$ способами

кол-во узлов, лежащих на диагоналях, для которых $x_A = x_B$ или $y_A = y_B$

$N_2 = n(n-3) : 2$, т.к. узел A и B могут меняться

$N_2 = 62 \cdot 2 \cdot (62 \cdot 2 - 3) : 2$

~~$N_0 = N_1 + N_2$~~

$N_2 = 62 \cdot 121$

~~$N_0 = N_1 + N_2 = n(N - 123)$~~

~~$N_0 = 62 \cdot 2 \cdot (62^2 - 123) =$~~

~~$= 62 \cdot 7442 = 461404$~~

$N_0 = N_1 + N_2 = 62 \cdot 7321$

~~Ответ:~~

~~461404 способами.~~

$$\begin{array}{r} \times\ 7321 \\ 62 \\ \hline +\ 14642 \\ 43926 \\ \hline 453902 \end{array}$$

Ответ: 453 902 способами.

№6

Дано:

выпуклый 4-уг. ABCD

$AC \cap BD = O$

$\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ — прав.

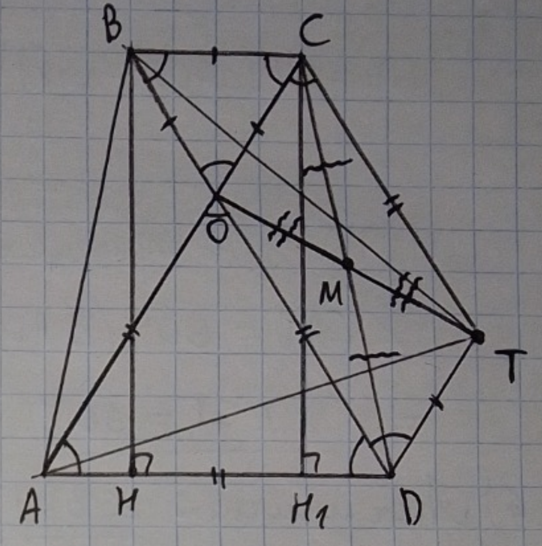
т. T симметр. т. O отн-то M

M — сер. CD

Д-ть: $\triangle ABT$ — прав.

$BC = 2$, $AD = 4$

$S_{ABT} : S_{ABCD} = ?$



(9)

Чистовик

Решение:

1) Проведём CT и DT.

2) т. T симметр. т. O отн-то M

$\Downarrow$

M — сер. OT (OM = MT)

3) Рассмотрим $\triangle OMD$ и $\triangle TMC$:

$\left.\begin{array}{l} OM = MT \text{ (см п. 2)} \\ CM = MD \text{ (M — сер. CD)} \\ \angle OMD = \angle TMC \text{ (вертик.)} \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle OMD = \triangle TMC$

$\Downarrow$

$OD = TC$

Также из р-ва следует: $\angle MOD = \angle MTC \Rightarrow$

$\Rightarrow OD \parallel TC$, т.к. $\angle MOD$ и $\angle MTC$ — соответств. при прямых OD и CT и секущей OT

4) $\left.\begin{array}{l} OD \parallel TC \\ OD = TC \end{array}\right\} \Rightarrow ODTC$ — параллелограмм $\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} OC \parallel DT \\ OC = DT \end{array}\right.$

(10) 5) $OD = TC$ (из п. 3)

$OD = AD$ ($\triangle AOD$ – прав.) $\Big\} \Rightarrow \underline{AD = TC} \Rightarrow ADTC$ – р/б трапеция т.к. $\underline{OD \parallel TC}$ (из п. 4)

$ADTC$ – р/б трапеция $\Rightarrow \angle ACT = \angle CAD$

$\angle CAD = 60°$ ($\triangle AOD$ – прав.) $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{\angle ACT = 60°}$

6) Аналогично: $\underline{\angle BDT = 60°}$

7) $\angle ADT = \underset{(\triangle AOD - р/с)}{\angle ADO} + \angle BDT = 60° + 60° = \underline{120°}$

$\angle TCB = \underline{120°}$ (аналогично)

$\angle AOB = 180° - \angle BOC = 180° - 60° = \underline{120°}$

8) Рассмотрим $\triangle AOB$, $\triangle ADT$ и $\triangle TCB$.

$\angle ADT = \angle TCB = \angle AOB$ (из п. 7)

$AO = AD = TC$ (из п. 5)

$BO = TD = BC$ (из п. 6) $\Big\} \Rightarrow \underline{\triangle AOB = \triangle ADT = \triangle TCB}$

$\Downarrow$

$\underline{AB = BT = AT}$

$\Downarrow$

(ЧТД) $\underline{\triangle ABT \text{ – правильный}}$

9) Пусть $AB = a. \Rightarrow S_{ABT} = \dfrac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$

Проведём $BH \perp AD$ и $CH_1 \perp AD$

$\underline{H \in AD}$ $\underline{H_1 \in AD}$

Тогда BCH_1H – прямоугольник $\Rightarrow \underline{HH_1 = BC = 2}$

$ABCD$ – р/б трапеция, т.к. её диагонали равны $\Rightarrow \underline{AH = DH_1 = 1}$

10) По th Пифагора: $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - 1}$ (11)

$BH = \sqrt{BD^2 - DH^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$

Тогда $a^2 - 1 = 27 \Rightarrow a^2 = 28$

11) $$\left.\begin{aligned} S_{ABCD} &= \frac{BC+AD}{2} \cdot BH = \frac{2+4}{2} \cdot 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3} \\ S_{ABT} &= \frac{\sqrt{3}\,a^2}{4} = 7\sqrt{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

из п. 9

$\Rightarrow S_{ABT} : S_{ABCD} = 7 : 9$

Ответ: $S_{ABT} : S_{ABCD} = 7 : 9$.

Чистовик

7

$$x^2-x^4=\frac{1}{4}$$

$$x^4-x^2+\frac{1}{4}=0$$

$$\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2=0$$

$$x^2=\frac{1}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ x=-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y^2=\frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y^2=\frac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ✓
$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ✓
$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ✓
$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ✓

№5

$y=x$ и $y=63-x$ — диагонали квадрата

Требуется выбрать два узла сетки A и B так, чтобы хотя бы один из них принадлежал любой диагонали, при этом $x_A \neq x_B$ и $y_A \neq y_B$

Всего узлов сетки внутри квадрата $N=62\cdot 62$.

Узлов на диагоналях: $n=62\cdot 2$

Рассмотрим два случая:

1) Один из узлов не лежит на диагоналях.