Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

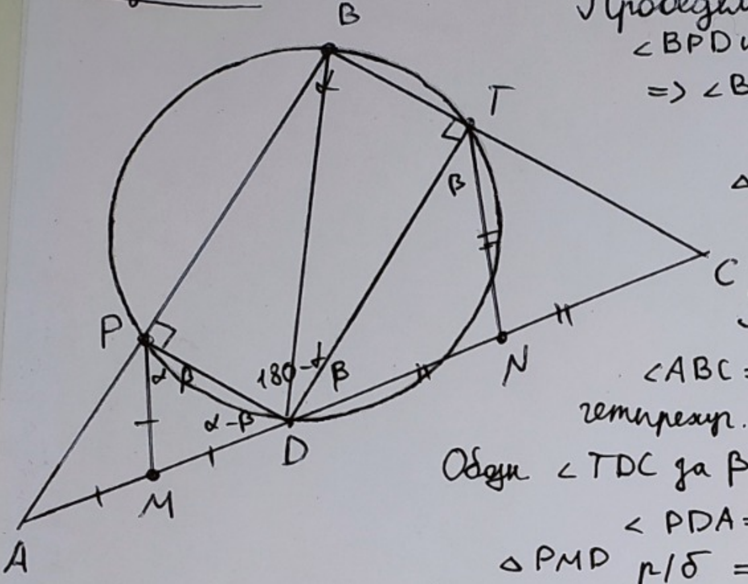
Шифр: **211005466**

ID профиля: **126865**

Вариант 12

Чистовик (1)

Задача 1.



Проведем отрезки DT и PD.

$\angle BPD$ и $\angle BTD$ опирается на диаметр $BD \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BPD = \angle BTD = 90°$.

$\angle CTD = 180° - \angle BTD = 90°$, аналог $\angle APD = 90°$

$\triangle CTD$ и $\triangle APD$ – прямоугольные

$\Rightarrow$ медиана $PM = \frac{AD}{2} = MD = AM$

и $NT = NC$.

Теперь обозначим искомый угол ABC за α

$\angle ABC = \angle PBT$.

четырехуг. PBTD впис $\Rightarrow \angle PDT = 180° - \angle PBT = 180° - \alpha$

Обозн $\angle TDC$ за β. Т.к. $\angle TDN + \angle TDP + \angle PDA = 180°$,

$\angle PDA = 180° - (180 - \alpha) + \beta = \alpha - \beta$.

$\triangle PMD$ р/б $\Rightarrow \angle DPM = \angle PDM = \alpha - \beta$.

Аналог $\angle DTN = \beta$.

Сумма углов в $\triangle$ 180°, $\angle PMD = 180° - \angle DPM - \angle PDM = 180° - 2\alpha + 2\beta$

$\angle DNT = 180° - 2\beta$.

Т.к. $PM \parallel TN$, $\angle PMD + \angle TND = 180°$

$180° - 2\alpha + 2\beta + 180° - 2\beta = 180°$

$2\alpha = 180° \Rightarrow \alpha = 90°$

а) Ответ: $\angle ABC = 90°$

$MP = \frac{1}{2}$, $NT = 1$, $BD = \frac{4}{3}$. Т.к. $MP = MD = MA$, то $AD = 1$,

аналог $CD = 2$. $\Rightarrow AC = 3$

в BTDP все углы $90° \Rightarrow$ это прямоугольник

значит, диагонали в нем равны и $BD = PT$

Заметим, что $DT = 2 \cdot \cos\beta \cdot TN = 2\cos\beta$

а $PD = 2 \cdot \sin\beta \cdot MD = \sin\beta$.

Т.к. $\triangle PDT$ прямоуг, $PT^2 = PD^2 + DT^2$

$\frac{16}{9} = \sin^2\beta + 4 \cdot \cos^2\beta$

$\frac{7}{9} = 3\cos^2\beta \Rightarrow \cos\beta = \sqrt{\frac{7}{27}}$

$\sin\beta = \sqrt{\frac{20}{27}}$

$S_{ABC} = AB \cdot BC \underset{\text{т.к. прямоуг}}{=} AC \cdot \sin\beta \cdot AC \cdot \cos\beta = 9 \cdot \sqrt{\frac{20}{27}} \cdot \sqrt{\frac{7}{27}} =$

$= \frac{\sqrt{140}}{3}$

б) Ответ: $S_{ABC} = \frac{\sqrt{140}}{3}$

211005466 (U126865 M1275721)

$x+1>0$, $4-x>0$

$x \in [-1;4]$

$\sqrt{x+1}$ ~~+...~~ $+3$

$x+1-4+x=$ ~~...~~

$-3\sqrt{x+1}-3\sqrt{4-x}$

~~...~~

$+2\cdot(x+1)\sqrt{4-x}+2$

$2(4-x)\sqrt{x+1}$

$(2x-1)\sqrt{4-x}$

$+(5-2x)\sqrt{x+1}$

$x^2+2xy+y^2$

$a^2-6ay+9y^2$

$a^2-6ay+9y^2$

$a^2-2ax+x^2$

$-4y^2+2xy$

$(3y-a)^2+(y-a)^2$

~~2~~ $2-6+1+2+5$

Черновик

$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+3=2\sqrt{4+3x-x^2}$

$\sqrt{x+1}$

$2\sqrt{(x+1)(4-x)}$

$4+4x-x-x^2$

$2xy-x+y-3$

$a=\sqrt{x+1}$ $\quad b=a^2+5$

$a-b+3=2ab$

$a+3=2ab+b$ $\quad b=\sqrt{-a^2+5}$

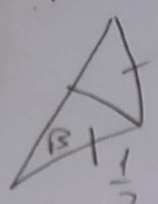
$b=\frac{a+3}{2a+1}=\sqrt{-a^2+5}$

$x\in[-1,4]$

$\sqrt{5}+3=2\cancel{5}$ $2,5+\sqrt{5}$

зерн

герн



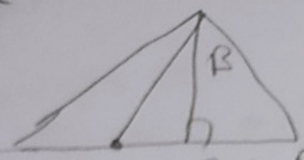
$2\cos\alpha \cdot \frac{1}{2}$

$\cos\beta$

$AP = \cos\beta$

$AB = 3\cos\beta$

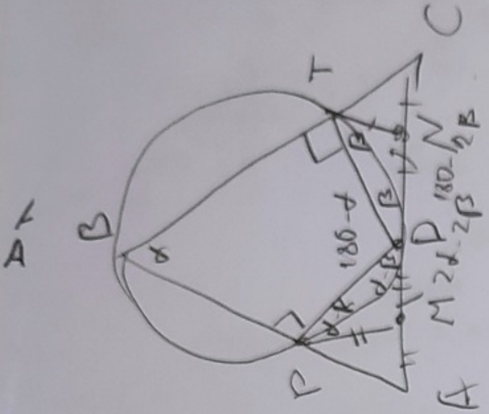
$PD = \sin\beta$



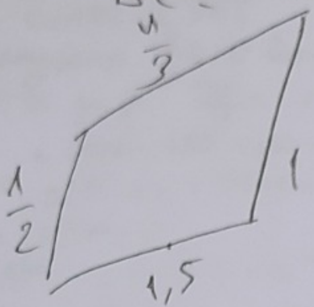
$3\sin\beta \cdot \sin\beta$

2

$2 - 3\sin\beta^2$



$BC = 3\sin\beta$



$\frac{16}{9} - (2 - 3\sin\beta)^2$

$\frac{16}{9} - 4 + 12\sin\beta^2$
$- 9\sin\beta^4$

$\sqrt{1} - \sqrt{4} + 3 = 2 \cdot \sqrt{4}$

$1 - 2 + 3 = 4$

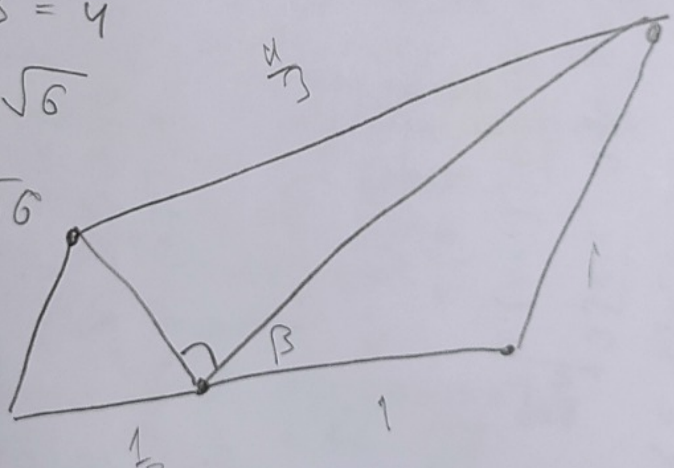
$\sqrt{2} - \sqrt{3} + 3 = 2 \cdot \sqrt{6}$

$\sqrt{3} - \sqrt{2} + 3 = 2 \cdot \sqrt{6}$

$\sqrt{x}$

$a - b + 3 = 2ab^2$

$b - a + 3 = 2ab$



$\sqrt{x} - \sqrt{5-x} + 3$

$2\sqrt{x(5-x)}$

$x + 5 - x - 2\sqrt{x(5-x)} =$

$= 4x(5-x) + 9 + 12\sqrt{\ }$

$\cos\beta$

$2\cos\beta$

$\sin\beta$

$\cos\beta = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$

$\sin^2\beta + 4\cos^2\beta$

$1 + 3\cos^2\beta = \frac{16}{9}$

$9\cos^2\beta = \frac{7}{9 \cdot 3}$

211005466 (U126865 M1275721)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211005466**

ID профиля: **126865**

Вариант 12

Чистовик ①

Задача 4

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

вычтем из нижнего верхнее

$$2x^4+2y^4+4x^2y^2 = 1 + \frac{1}{x^2+y^2}$$

$$2(x^2+y^2)^2 = \frac{1+x^2+y^2}{x^2+y^2}$$

Обозн. $a = x^2+y^2$

$$2a^2 = \frac{a+1}{a}$$

$$2a^3-a-1=0$$

$$(a-1)(\underbrace{2a^2+2a+1}_{D<0})=0$$

$4<8$ корней нет $\Rightarrow a=1$

$x^2+y^2=1.$

Заменим x^2+y^2 в исходном выражении

$$\frac{1}{1}+x^2y^2=\frac{5}{4} \Rightarrow x^2y^2=\frac{1}{4} \Rightarrow xy=\pm\frac{1}{2}$$

1° $xy=\frac{1}{2}$ $\quad x^2+y^2-2xy=(x-y)^2=1-2\cdot\frac{1}{2}=0 \Rightarrow x=y$

$$x^4=\frac{1}{4} \Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}=y$$

1) $x=y=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\frac{1}{\frac{2}{4}+\frac{2}{4}}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4=\frac{5}{4} \ ✓$$

$$2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4+2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4+5\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4=\frac{9}{4} \ ✓$$

2) $x=y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ничего не меняется, потому что в условии только квадраты, а $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

2° $xy=-\frac{1}{2}$ $\quad x^2+y^2+2xy=(x+y)^2=1+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=0 \Rightarrow -x=y$

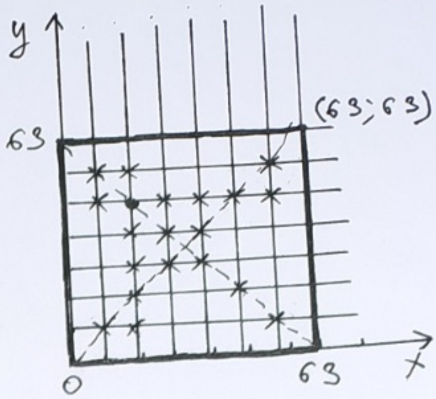
Выражение симметрично отн. x и y, поэтому НУО $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

но x и y везде в квадрате, поэтому все аналогично самому первому случаю.

Ответ: $\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right);\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right);\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right);\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$

211005466 (U126865 M1275722)

Чистовик (2)



Задача 5

Заметим, что прямые $x=y$ и $y=63-x$, это диагонали квадрата.

~~из~~ узлов каждой из диагоналей внутри квадрата 62, а также точек любой прямой, ~~пар~~ параллельной какой-то из осей, 62.

Теперь разобьем выбор двух узлов на случаи.

1° ~~первая точка~~ один узел на $x=y$, другой не на $y=63-x$ и не на $x=y$

на $x=y$ 62 узла. Ост. $\underbrace{62\cdot 62}_{\text{всего узлов}} - \underbrace{62}_{\text{на } x=y} - \underbrace{62}_{\text{на } y=63-x} - \underbrace{62 - 62}_{\text{пр.} \parallel \text{осям}} + \underbrace{4}_{\text{пересечение}}$

$62\cdot 62 - 4\cdot 61$

Значит способов $62\cdot(62\cdot 62 - 4\cdot 61)$

2° один узел на $y=63-x$, другой не на диаг

Аналогично 1° $62\cdot(62\cdot 62 - 4\cdot 61)$

3° один на $x=y$, другой на $y=63-x$

(у диаг нет общих узлов, поэтому подслучаи не совпадают.)

$62\cdot(62 - \underbrace{2}_{\text{лет. на одной верт. или гор.}})$

4° оба на $x=y$

$\frac{62\cdot 61}{2}$ очев

5° оба на $y=63-x$ аналог

$\frac{62\cdot 61}{2}$

Просуммируем эти числа

$2\cdot 62\cdot(62\cdot 62 - 4\cdot 61) + 62\cdot(62-2) + 62\cdot 61$

$62(2\cdot 62\cdot 62 - \overset{7}{\cancel{8}}\cdot 61 + 62 - 2 + \cancel{61}) = 62\cdot(2\cdot 62\cdot 62 - 6\cdot 61 - 1)$

В столбик видимо считать надо...

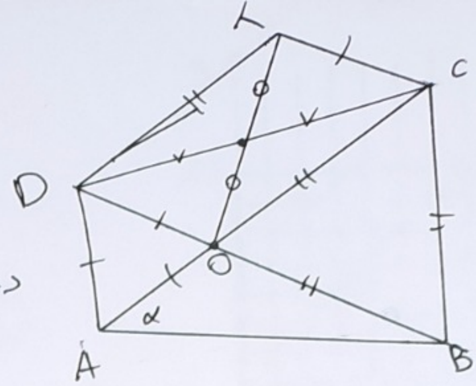
$62\cdot 7321 = \underline{453902}$

Ответ: 453 902

211005466 (U126865 M1275722)

Чистовик (3)

Задача 6



Осимметрим T отн. середины CD.
В четырехуг TCOD диагонали точкой пересечения делятся пополам =>
=> это параллелограмм.
$TC = OD, \quad DT = OC.$

Обозначим $\angle BAO$ за α
$\angle BOA = \angle COD = 120^\circ$
$\triangle DOC = \triangle BOA$ по двум ст. и углу
$\Rightarrow \angle ODC = \alpha$
$\angle TDC = \angle DCO = \angle OBA = 180^\circ - 120^\circ - \alpha = 60 - \alpha$
ч/з парал.

$\angle TDA = \underset{\angle TDC}{60-\alpha} + \underset{\angle CDO}{\alpha} + \underset{\angle ODA}{60^\circ} = 120^\circ$

$\triangle TDA = \triangle BOA \quad (BO = OC = DT,\ AO = DA, \angle TDA = \angle BOA = 120^\circ)$
$\Rightarrow AB = AT.$

Аналог. $AB = BT$ => в $\triangle ABT$ все стороны равны, т.е. он правильный.

б) Посчитаем площадь ABCD.

$S_{COB} = BC \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} BC = 2 \cdot \sqrt{3}$

$S_{BOA} = S_{COB} \cdot \frac{AO}{CO} = S_{COB} \cdot \frac{AD}{BC} = 4\sqrt{3}$

$S_{COD} = S_{BOA} = 4\sqrt{3}$

$S_{AOD} = S_{BOA} \cdot \frac{AO}{CO} = 8\frac{\sqrt{3}}{2}$

$S_{ABCD} = S_{COB} + S_{BOA} + S_{AOD} + S_{DOC} = 18\sqrt{3}$

$S_{ABT} = AB^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

по теореме косинусов
$AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2 \cdot \cos 120 \cdot AO \cdot BO = 16 + 4 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 =$
$= 28$

$S_{ABT} = 28 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 14 \cdot \sqrt{3}$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{14\sqrt{3}}{18\sqrt{3}} = \frac{7}{9}$

Ответ: $\frac{7}{9}$

211005466 (U126865 M1275722)

Черновик 2

$\frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4}$

$2x^4+2y^4+5x^2y^2$

$\frac{\sqrt2}{2}\cdot\frac{\sqrt2}{2}\cdot\frac{\sqrt2}{2}\cdot\frac{\sqrt2}{2}$

$2x^4+2y^4+4x^2y^2 = \frac{1}{x^2+y^2}+1$

$2(x^2+y^2)^3 = x^2+y^2+1$

$xy = \frac{1}{2}$

$x^2+y^2-2xy=0$

$x=y$

$-x=y$

$x^2+y^2=1$

$\cancel{2}+x^2y^2=\frac{1}{4}$

$2+x^2y^2=\frac{9}{4}$

$x^2y^2=\frac{1}{4}$

$xy=\pm\frac{1}{2}$

$x^4=\frac{1}{4}$ $\quad x=\pm\frac{\sqrt2}{2}$

a

$2a^3=a$

$2a^3-a-1=0$

$a=1$

$2-1-1$

$2a^3+2a^2-2a^2-2a$ $+a$

$2a^3-2a^2+2a^2-2a$ $+a-1$

$(a-1)(2a^2+2a+1)=0$

$2a^3-2a^2$

$+2a^2-2a$

$+a-1$

$-a-1$

$\frac{4}{16}$

$2\cdot62\cdot(62\cdot62-4\cdot61)$

$+62(62-2)$

$+62\cdot61$

$62(2\cdot62\cdot62-8\cdot61$

$+62-2$

$+61$

$2\cdot2\cdot61\cdot62$

$2\cdot62\cdot62-7\cdot61$

$+64$

$6\cdot6-\cancel{4}-5-5-4$

$6\cdot6-\cancel{14}-14$

$6\cdot4$

$-6-6-6-6+4$

7321×62: 14642, 43926, 453902

$6\times6-6$

124×62: 248, 744, 7688

$7-1$

$7688-366=7322$

$63=63-0$

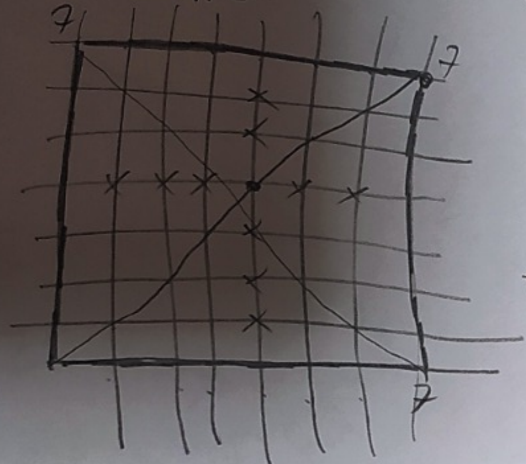
$0=63-63$

62×62

$61\times6=366$

7688

7321



$AB^2 = \overset{a}{BO}^2 + \overset{b}{AO}^2 - 2 \cdot \cos 120^\circ \cdot BO\,AO$

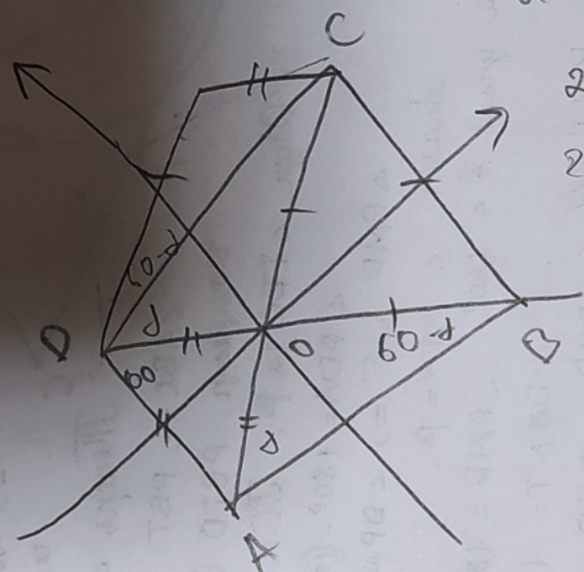
$AT^2 = 2AD^2 - 2\cos(180 - 2\alpha) \cdot AD^2$

$BT^2 = 2BC^2 - 2\cos(60 + 2\alpha) \cdot BC^2$

$a^2 + b^2 - a \cdot b$

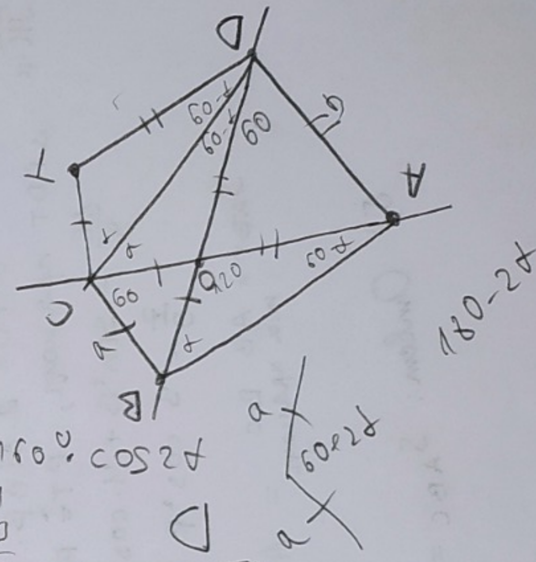
$2b^2 + 2 \cdot \cos 2\alpha \cdot b^2$

$2a^2 -$

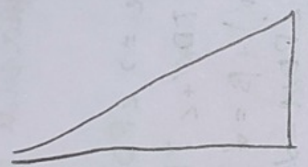


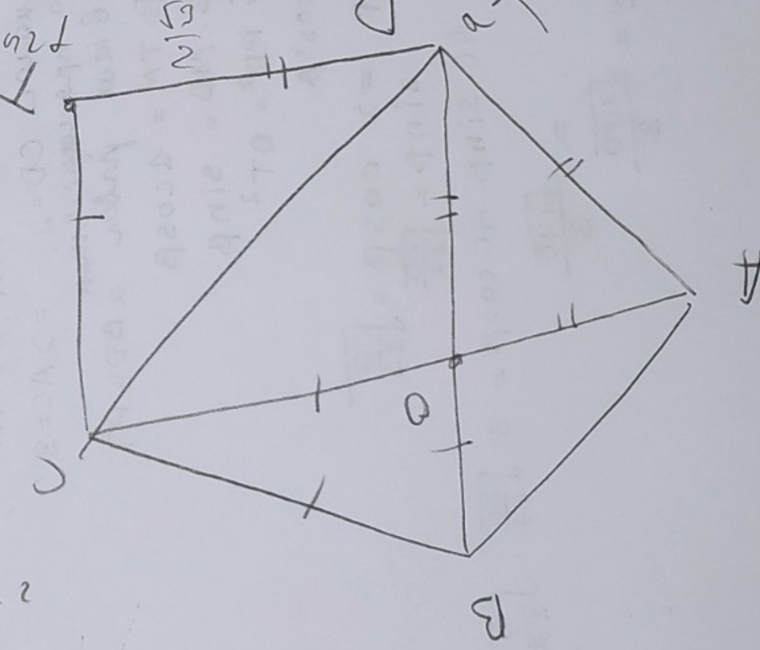
$\cos 60^\circ \cdot \sin 2\alpha - \sin 60^\circ \cdot \cos 2\alpha$

$\frac{1}{2} \cdot \sin 2\alpha \qquad \frac{\sqrt{3}}{2}$



$$\frac{a^2 - b^2 - ab}{2b^2}$$





$2a^2 - \text{[illegible]} \sin 2\alpha \cdot a^2 + \sqrt{3} \cdot \cos 2\alpha \cdot a^2$

$$2a^2 + \frac{\sqrt{3}a^4 - \sqrt{3}a^2b^2 - \sqrt{3}a^3b}{2b^2} -$$

211005466 (U126865 M1275722)