Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211005426**

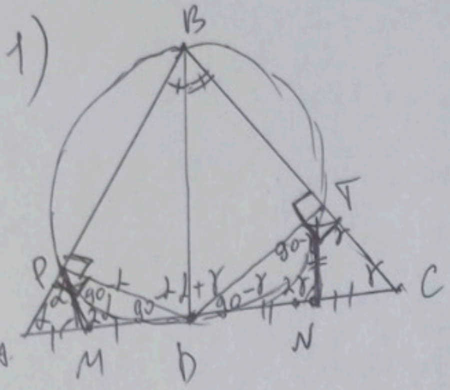
ID профиля: **874778**

Вариант 12

Чистовик

Решение

№ 1)



а) проведём PD и DT

$\angle APD = \angle DTC = 90^\circ$.

$PM = AM = MD$; $DN = NT = NC$

т.к. $\triangle APD$ - прямоугольный и $\triangle TDC$. А в п/у треугольнике медиана из прямого угла равна половине стороны, которую она делит

$\triangle DNT$ и $\triangle TNC$ - р/б

$\triangle AMP$ и $\triangle PMD$ - р/б; $\angle PMD = 2\angle$

$\angle A = \angle = \angle APM$; $\angle MPD = \angle PDM = 90 - \angle$; $\angle DNT = 2\gamma$

$\angle NTC = \angle TCN = \gamma$; $\angle TDN = \angle DTN = 90^\circ - \angle$;

$\angle PDT = 180^\circ - 90 + \angle - 90^\circ + \gamma = \angle + \gamma$

т.к. $PM \parallel NT$, то $\angle AMP = \angle DNT \Rightarrow 2\gamma = 180^\circ - 2\angle$

Дано:
$PM \parallel TN$
$ND = NC$
$AM = MD$

$\angle ABC - ?$

$2\gamma + 2\angle = 180$

$\gamma + \angle = 90$

т.к. $\angle ABC = 180^\circ - \gamma - \angle \Rightarrow \angle ABC = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

Ответ: $\angle ABC = 90^\circ$

б) Дано:
$MP = \frac{1}{2}$
$NT = 1$
$BD = \frac{4}{3}$

$S_{ABC} - ?$

$S_\triangle = \frac{h \cdot l}{2} = \frac{\frac{4}{3} \cdot (1 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2)}{2} = \frac{4 \cdot 3}{3 \cdot 2} = 2$

h - высота
l - основание

Ответ: $2 = S_{ABC}$.

211005426 (U874778 M1277686)

Чистовик

стр. 2.

№2) $\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} = 2\sqrt{4+3x-x^2} - 3$ | возведем в квадрат

$x+1+4-x-2\cdot\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{4-x} = 4(x+1)(4-x) - 6\sqrt{4+3x-x^2}+9$

$5 - 2\sqrt{4+3x-x^2} = 4\sqrt{4+3x-x^2}^{\,2} - 12\sqrt{4+3x-x^2}+9$

$4\left(\sqrt{4+3x-x^2}^{\,2}\right) - 10\sqrt{4+3x-x^2} + 4 = 0$ | : 2

$2\left(\sqrt{4+3x-x^2}^{\,2}\right) - 5\sqrt{4+3x-x^2} + 2 = 0$

ОДЗ:

$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \end{cases} \Downarrow$

$x \in [-1;4]$

Замена $\sqrt{4+3x-x^2} = a;\ a \geq 0$

$2a^2 - 5a + 2 = 0$

$\left[\begin{array}{l} a = 2 \\ a = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{4+3x-x^2} = 2 \\ \sqrt{4+3x-x^2} = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 4+3x-x^2 = 4 \\ 4+3x-x^2 = \frac{1}{4} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \\ x = \frac{3-2\sqrt{6}}{2} \\ x = \frac{3+2\sqrt{6}}{2} \end{array}\right.$

при $x=0$: $\sqrt{1} - \sqrt{4} + 3 = 2\cdot\sqrt{4+3\cdot0-0^2}$

$1-2+3 = 2\cdot 2$

$2 = 4 \Rightarrow$ ответ не подходит

при $x=3$ $\sqrt{4} - \sqrt{1} + 3 = 2\sqrt{4+3\cdot3-3^2}$

$2-1+3 = 2\cdot2$

$4=4$ — ответ подходит

при $x = \frac{3+2\sqrt{6}}{2}$

$2\sqrt{4+3x-x^2} = 2\cdot\sqrt{4+\frac{(3+2\sqrt{6})\cdot 3}{2} - \frac{9+4\cdot6-2\cdot3\cdot2\sqrt{6}}{4}} =$

$= \underbrace{\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3}_{>1}^{=1} \Rightarrow$ ответ не подходит

211005426 (U874778 M1277686)

Чистовик

№2) при $x = \frac{3-2\sqrt{6}}{2}$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = \sqrt{\frac{3-2\sqrt{6}}{2} + \frac{2}{2}} - \sqrt{\frac{8}{2} - \frac{3-2\sqrt{6}}{2}} + 3 =$$

$$= \sqrt{\frac{3-2\sqrt{6}}{2} + \frac{2}{2}} - \sqrt{\frac{8-3+2\sqrt{6}+3}{2}} + 3 = \sqrt{\frac{5-2\sqrt{6}}{2}} - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{6}}{2}} + 3 = 1$$

$$2 \cdot \sqrt{4+3x-x^2} = 2 \cdot \sqrt{4+3 \cdot \frac{3 \cdot 2\sqrt{6}}{2} - \left(\frac{3 \cdot 2\sqrt{6}}{2}\right)^2} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 8$$

$\Rightarrow$ Ответ подходит

Ответ: $x = \left\{3;\ \frac{3-2\sqrt{6}}{2}\right\}$

Чистовик

№3) $2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0$

$y=\frac{1}{5}\left(-\sqrt{-a^2+4ax-4x^2}+3a-x\right)=$

$=\frac{1}{5}\left(-\sqrt{-(a-2x)^2}+3a-x\right)$

Заметим, что такое возможно, только если

$a-2x \Rightarrow x=\frac{a}{2}$

$\Downarrow$

$y=\frac{1}{5}(0+3a-x)$

$y=\frac{1}{5}\left(3a-\frac{a}{2}\right)=2,5:5a=\frac{1}{2}a$

$x;y=\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right)$

$ax^2+4a^2x-ay+4a^3+2=0$

$ax^2+4a^2x+4a^3+2=ay \;|:a \quad (a\neq 0)$

$x^2+4ax+4a^2+\frac{2}{a}=y$

вершина: $x_в=\frac{-4a}{2}=-2a$

$y_в=(-2a)^2+4\cdot(-2a)\cdot a+4a^2+\frac{2}{a}=4a^2-8a^2+4a^2+\frac{2}{a}=\frac{2}{a}$

одна точка $\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right)$ – A

вторая точка $\left(-2a;\frac{2}{a}\right)$

либо обе выше $\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\frac{2}{a}>3+2a\\ \frac{a}{2}>3-\frac{a}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}\frac{2}{a}<3+2a\\ \frac{a}{2}<3-\frac{a}{2}\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow$

$x+y=3$

либо обе ниже $\Rightarrow$

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\in(-\infty;-2)\vee\left(0;\frac{1}{2}\right)\\ a\in(3;+\infty)\end{cases} \Rightarrow \text{нет точек}\\ \begin{cases}a\in(-2;0)\vee\left(\frac{1}{2};+\infty\right)\\ a\in(-\infty;3)\end{cases}\Rightarrow\end{array}\right.$

Ответ: $(-2;0)\vee\left(\frac{1}{2};3\right)$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211005426**

ID профиля: **874778**

Вариант 12

Чистовик

№4) $\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \\ 2x^4 + 2y^4 + 5x^2y^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$

Сделаем замену $x^2+y^2 = a$
$x^2 \cdot y^2 = b$

$x^4 + y^4 = (x^2+y^2)^2 - 2x^2y^2 = a^2 - 2b$

Система примет вид:

$\begin{cases} \frac{1}{a} + b = \frac{5}{4} \\ 2(a^2 - 2b) + 5b = \frac{9}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} + b = \frac{5}{4} \\ 2a^2 - 4b + 5b = \frac{9}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} + b = \frac{5}{4} \\ 2a^2 + b = \frac{9}{4} \end{cases}$

$2a^2 + b - \frac{1}{a} - b = \frac{9}{4} - \frac{5}{4}$

$2a^2 - \frac{1}{a} = \frac{4}{4} = 1$

$2a^2 - \frac{1}{a} = 1 \; / \cdot a, \; a \neq 0$

$2a^3 - 1 = a$

$2a^3 - a - 1 = 0$

$(a-1)\underbrace{(2a^2+2a+1)}_{>0} = 0$

вернемся обратно $\Downarrow$ т.к. $D = 4 - 4 \cdot 2 < 0$

$a = 1$

$b = \frac{9}{4} - 2 \cdot 1 = \frac{1}{4}$

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 \cdot y^2 = \frac{1}{4} \end{cases}$

$\Downarrow$

$(1 - y^2) y^2 = \frac{1}{4}$

$y^2 - y^4 = \frac{1}{4}$

$y^4 - y^2 + \frac{1}{4} = 0$

$\frac{1}{4}(2y^2 - 1)^2 = 0 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{2}$

$x^2 = \frac{1}{2}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} y = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right. \end{cases}$

$\Downarrow$

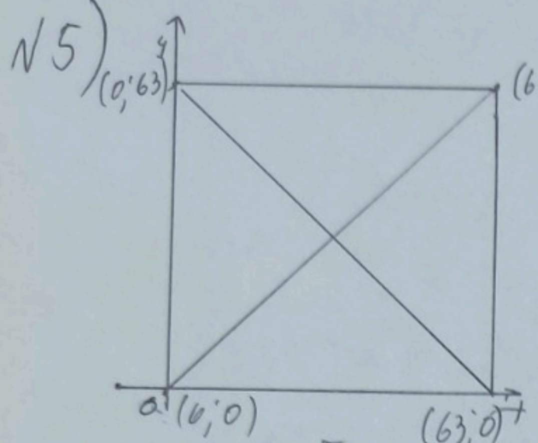
Ответ: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

211005426 (U874778 M1277687)

Чистовик

Не включая границу
узлы на каждой из прямых
$63-1=62$ узла, причем т. пересеч.
не является узлом, а является
серединой
прямых
в центре

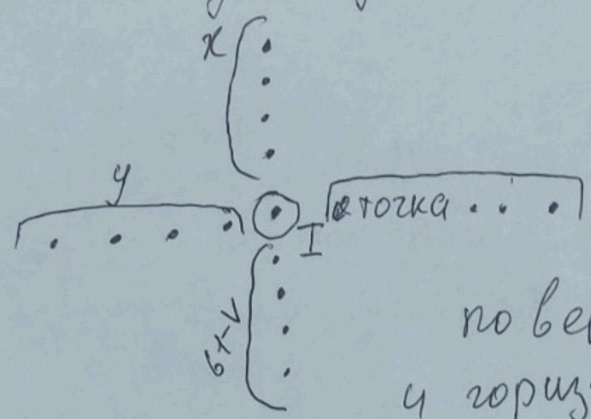
№5)



всего узлов внутри
квадрата $62\cdot62$

Посчитаем кол-во || исходов

Первым выбираем точку с одной из прямых
$62+62=124$ варианта выбрать точку с прямых
Для каждой из этих точек существует варианты выбора
2-ой точки ~~[illegible]~~ :
паралл-ные осям.



по вертикали
и горизонтали
остается 61 точка
без I-й
всего $61+61$

вариантов
выбрать точки
парал-ную осям $=(61+61)\cdot(62+62)=122\cdot124$

всего вариантов выбрать
вторую точку $62\cdot62-\underbrace{1}_{\text{одну уже выбрали}}$

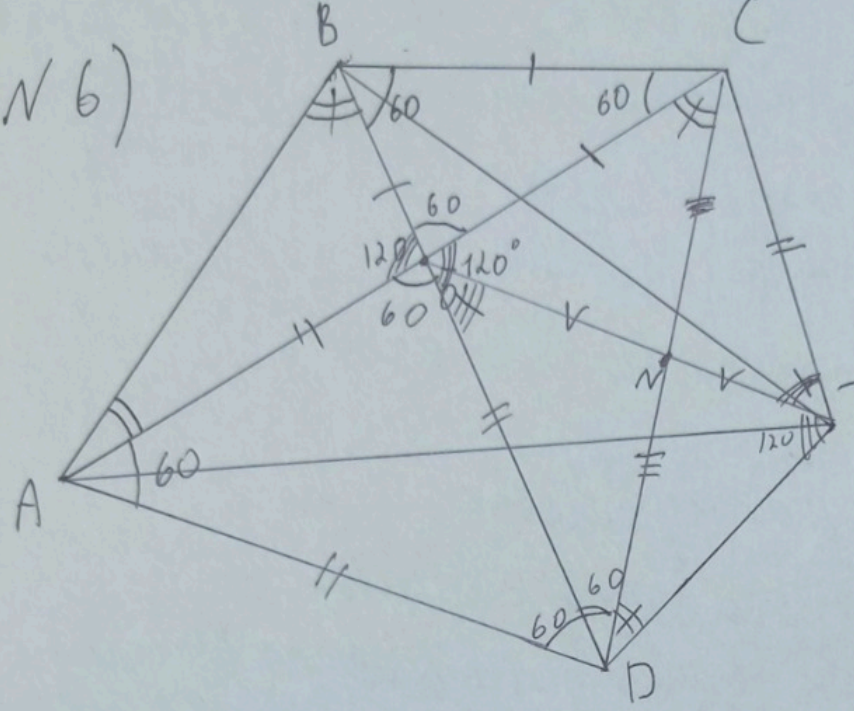
$\underbrace{124}_{\text{I-я точка}}\cdot\underbrace{(62\cdot62-1)}_{\text{II точка}}-122\cdot124=3843\cdot124-124\cdot122=124(3843-122)=$
$=124\cdot3721=461404$

всего вариантов
выбора 2-ой точки

Ответ: 461404

Чистовик

N 6)



а) Доказать ABT – правильный треугольник

Решение

Соединим CT и TD

диагонали четырехугольника OCTD т.п. делятся пополам

⇓

OCTD – параллелограмм

⇓

CT ∥ OD и OC ∥ DT

⇓

DT = OC
CT = OD

∠ODC = ∠OCT
∠CDT = ∠OCD
∠COT = ∠OTD
∠TOD = ∠CTO

∠CBD + ∠BCT = 180° ⇐ т.к. CT ∥ BD ⇐ то BCTD – трапеция
т.к. CO ∥ DT, то ACTD – трапеция

60° + 60° + ∠OCT = 180°

⇓

∠OCT = 60°

⇓

60° = ∠ODT; ⇒ ∠COD = ∠CTD = 120°

т.к ∠BOA = 360° − 120° = 120° ⇒ △ABO = △OCD по 2-ум сторонам и углу между ними

⇓

∠ABD = ∠ACD
∠BAC = ∠BDC

△BOA = △BCT по 2ум сторонам и углу между ними
(120°; BO = BC; DA = CT) ⇓

BT = AB – соотв

△ADT = △BCT по 2ум сторонам и углу между ними
(∠ = 120°; AD = CT; DT = BC)

⇓

AT = BT ⇒ AT = BT = AB ⇒ △ABT – равносторонний

211005426 (U874778 M1277687)

№6) б) если $BC=2$, то $2=BO=OC=DT$

если $AD=4$, то $4=AO=OD=CT$

Дано:
$BC=2$
$AB=4$
$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$ - ?

$AB^2 = BO^2 + AO^2 - 2\cos(120^\circ)\cdot 2\cdot 4 = 20-10\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = 20+8 = 28$

$\Downarrow$

$AB = 2\sqrt{7} = AT = BT$

$\Downarrow$

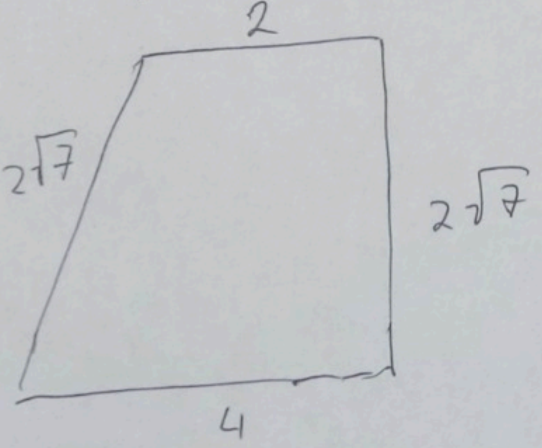
$S_{\text{равностороннего}} = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(2\sqrt{7}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}\cdot 28}{4} = 7\sqrt{3}$

Рассмотрим $\triangle CTD$

$CT=4$
$DT=2$ => $CD=2\sqrt{7}$ по теореме cos
$\angle CTD=120^\circ$

$CD^2 = 2^2+4^2-2\cos(120^\circ)\cdot 2\cdot 4 = 28$

$CD = 2\sqrt{7}$



$S_{ABCD} = \frac{1}{2}\cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\angle BOC = \frac{1}{2}\cdot(2+4)\cdot(2+4)\cdot\sin 60^\circ =$

$\frac{6\cdot 6}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$

$\Downarrow$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{7\sqrt{3}}{9\sqrt{3}} = \frac{7}{9}$

Ответ: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{7}{9}$