Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

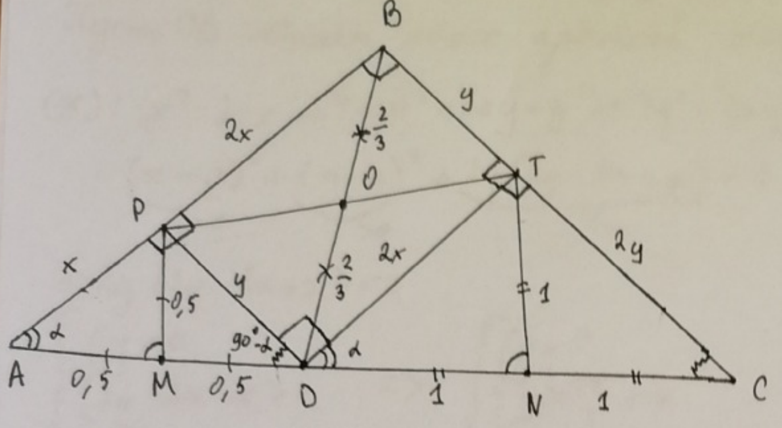
Шифр: **211005422**

ID профиля: **283390**

Вариант 12

Чистовик. ①

№1.



Найти: $\angle ABC = ?$
$S_{\triangle ABC} = ?$

Решение:

1) $\angle BPD = \angle BTD = 90°$
(эти углы вписаны в окр. и опираются на диаметр)

$\Rightarrow \angle APD = \angle DTC = 90°$
(смежные с равными)

2) $\angle AMP = \angle DNT$ (соотв. при пар-ных пр. PM и NT и секущей AC)

3) Рассмотрим $\triangle AMP$ и $\triangle DNT$:
$AM = PM$ (PM - медиана, проведённая к гипотенузе)
$DN = NT$ (NT - медиана, проведённая к гипотенузе)

$\Rightarrow \frac{AM}{DN} = \frac{PM}{NT}$
$\angle AMP = \angle DNT$ - по док. $\Big| \Rightarrow \triangle AMP \sim \triangle DNT$ (по 2 сторонам и $\angle$)

$\Rightarrow \angle PAM = \angle TDN = \alpha$

4) $\angle ADP = 90° - \alpha$
$\angle DCT = 90° - \alpha$ $\Big| \Rightarrow \angle ADP = \angle DCT$

5) Т.к. $4^х$-уг. BTDP - вписан в окр. (по усл.) $\angle PBT = \angle ABC = 180° - \angle PDT$

$\angle PDT = 180° - \angle ADP - \angle CDT = 180° - (90° - \alpha) - \alpha = 90°$

$\Rightarrow \angle ABC = 180° - 90° = 90° \Rightarrow$ BTDP - прямоугольник $\Rightarrow PD = BT$
$PB = DT$

6) $\triangle APD \sim \triangle DTC$ (по 2 $\angle$)

$$\Rightarrow \frac{AP}{DT} = \frac{PD}{CT} = \frac{AD}{DC} = \frac{AM+MD}{DN+NC} = \frac{2PM}{2NT} = \frac{2 \cdot 0{,}5}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}$$

Пусть $AP = x$
$PD = y$ $\Big| \Rightarrow DT = 2x$
$TC = 2y$ $\Rightarrow PB = 2x$
$BT = y$

211005422 (U283390 M1277710)

Чистовик ②

№1 (продолжение)

7) $\triangle APD$: $x^2+y^2=1$

$\triangle BPD$: $4x^2+y^2=\frac{16}{9}$

$\Rightarrow 3x^2=\frac{16}{9}-1=\frac{7}{9} \Rightarrow x=\sqrt{\frac{7}{27}}=\frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}$

$\Rightarrow y^2=1-x^2=1-\frac{7}{27}=\frac{20}{27} \Rightarrow y=\frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}$

8) $S_{\triangle ABC}=\frac{AB\cdot BC}{2}=\frac{3x\cdot 3y}{2}=\frac{9xy}{2}=\frac{9}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{35}}{3}=\sqrt{35}$

Ответ: $\angle ABC=90^\circ$; $S_{\triangle ABC}=\sqrt{35}$

Чистовик.

3

№2.

$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+3=2\sqrt{4+3x-x^2}$

ОДЗ: $\begin{cases} x+1\geq 0 \\ 4-x\geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x\geq -1 \\ x\leq 4 \end{cases}$

$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+3=2\sqrt{(x+1)(4-x)}$

$\begin{cases} t=\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x} \\ t\geq -3 \end{cases}$

$t^2=(\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x})^2=(x+1)-2\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{4-x}+(4-x)=$

$=x+1-2\sqrt{(x+1)(4-x)}+4-x=5-2\sqrt{(x+1)(4-x)}$

Т.о. $\begin{cases} t+3=2\sqrt{(x+1)(4-x)} \quad (1) \\ t^2=5-2\sqrt{(x+1)(4-x)} \quad (2) \\ t\geq -3 \end{cases}$

$(1)+(2)$: $t+3+t^2=5$

$t^2+t-2=0$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-2 \end{array}\right. \\ t\geq -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}=1 \quad (а) \\ \sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}=-2 \quad (б) \end{array}\right. \\ \sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}\geq -3 \end{cases}$

(а): $\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}=1$

$\Rightarrow 2\sqrt{(x+1)(4-x)}=1+3=4$

$\sqrt{(x+1)(4-x)}=2$

$(x+1)(4-x)=4$

$-x^2+3x+4=4$

$x^2-3x=0$

$x(x-3)=0$

$\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \end{array}\right.$ входят в ОДЗ

(б) $\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}=-2$

$\Rightarrow 2\sqrt{(x+1)(4-x)}=-2+3=1$

$4(x+1)(4-x)=1$

$4(-x^2+3x+4)=1$

$-4x^2+12x+16-1=0$

$-4x^2+12x+15=0$

$4x^2-12x-15=0$

$D=144+16\cdot 15=16(9+15)=16\cdot 24=2^7\cdot 3$

$x=\dfrac{12\pm 8\sqrt{6}}{8}=\dfrac{3\pm 2\sqrt{6}}{2}$ - оба корня входят в ОДЗ

Ответ: $x\in\{0;\ 3;\ 1,5\pm\sqrt{6}\}$

Чистовик.

№3

$2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0$ * — точка A

$ax^2+4a^2x-ay+4a^3+2=0$ — парабола

При $a=0$: $0\cdot x^2+4\cdot 0\cdot x-0\cdot y+4\cdot 0+2=0$ — неверно

$\Rightarrow a\neq 0$

Перепишем ур-ние для параболы:

$ay=ax^2+4a^2x+4a^3+2 \quad |:a,\ a\neq 0$

$y=x^2+4ax+4a^2+\frac{2}{a}$

$y=(x+2a)^2+\frac{2}{a} \Rightarrow$ координаты вершины $(-2a;\frac{2}{a})$

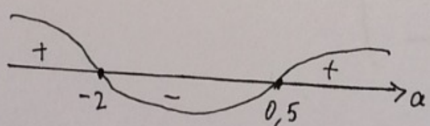
Определим, при каких значениях a точка B попадёт на прямую $x+y=3$!

$-2a+\frac{2}{a}=3$

$\frac{-2a^2+2-3a}{a}=0 \Rightarrow \begin{cases}2a^2+3a-2=0\\ a\neq 0\end{cases}$

$D=9+4\cdot 4=25$

$\left[\begin{array}{l} a=\frac{-3+5}{2\cdot 2}=\frac{1}{2} \\ a=\frac{-3-5}{4}=-2\end{array}\right.$



$\Rightarrow$ при $a\in(-\infty;-2)\cup(\frac{1}{2};+\infty)$ точка B будет лежать выше прямой

при $a\in(-2;0,5)$ — ниже прямой.

Рассмотрим (·)A

$5y^2+2y(x-3a)+x^2-2ax+2a^2=0$

$\underbrace{5y^2}_{>0}+2y(x-3a)+\underbrace{(x-a)^2}_{>0}+\underbrace{a^2}_{>0}=0$

$\Rightarrow 2y(x-3a)<0$

$y(x-3a)<0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}y<0\\ x>3a\end{cases}\\ \begin{cases}y>0\\ x<3a\end{cases}\end{array}\right.$

Чистовик.

№3 (продолжение)

(5)

Пусть (·)B лежит ниже прямой $x+y=3$. Тогда $-2<a<\frac{1}{2}$

$(*)$: $(x^2-2ax+a^2)+(a^2-2ay+y^2)+4y^2-4ay+2xy=0$

$$\underbrace{(x-a)^2}_{>0}+\underbrace{(y-a)^2}_{>0}+\underbrace{2y(2y-2a+x)}_{<0}=0$$

$\Rightarrow 2y(2y-2a+x)<0$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y<0\\2y-2a+x>0\end{cases}\\ \begin{cases}y>0\\2y-2a+x<0\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}y<0\\y>-\frac{x}{2}+a\end{cases}\\ \begin{cases}y>0\\y<-\frac{x}{2}+a\end{cases}\end{array}\right.$$

Чтобы точка A лежала ниже прямой $y+x=3$

Её координаты должны удовлетворять:

$$\begin{cases}y+x<3\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}y<0\\y>-\frac{x}{2}+a\end{cases}\\ \begin{cases}y\geq 0\\y<-\frac{x}{2}+a\end{cases}\end{array}\right.\\ -2<a<\frac{1}{2}\end{cases}$$

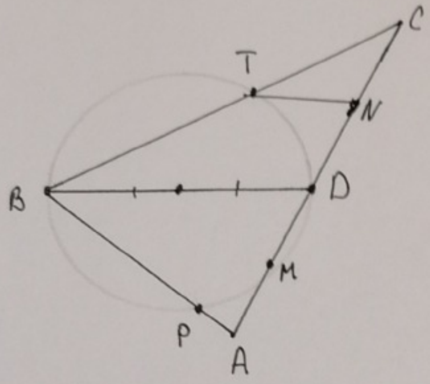
при этом

Черновик

(1)

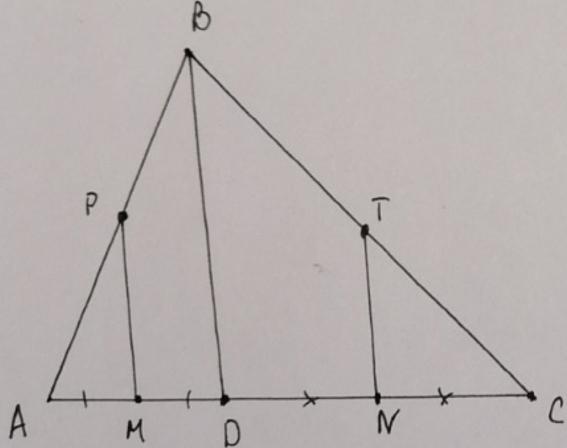
$\sin\alpha = \frac{BC}{3}$

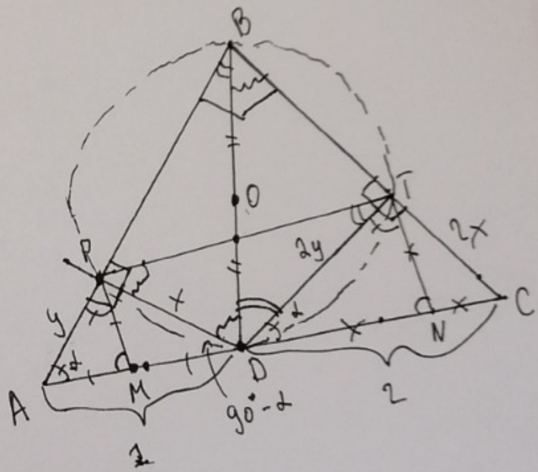
$\cos\alpha = \frac{AB}{3}$



$\angle ABC = 90^0$

BTDP - прямоуг.





$S_{\Delta ABD} = \frac{AD \cdot BD \cdot \sin\beta}{2} = \frac{4}{3}\sin\beta$

$MP = \frac{1}{2}$

$NT = 1$

$BD = \frac{4}{3}$

$S_{ABC} = ?$

$AC = 3$

$AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2\,AD \cdot BD \cdot \cos\beta$

$BC^2 = BD^2 + DC^2 + 2\,AD \cdot BD \cos\beta$

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$x^2 + BP^2 = BO^2$

$y^2 + BT^2 = DB^2$

$x^2 + y^2 + BP^2 + BT^2 = 2BO^2$

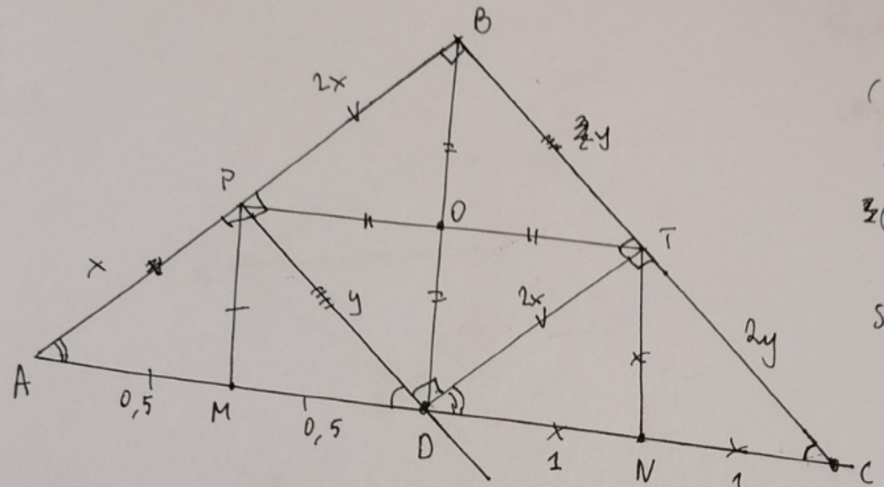
$1 + BP^2 + BT^2 = 2BO^2$

$x^2 + (AB - y)^2 = y^2 + (BC - 2x)^2$

$x^2 + AB^2 - 2yAB + y^2$

Черновик

2



$$(3x)^2+(3y)^2=9$$

$$9x^2+9y^2=9$$

$$\cancel{9}(x^2+y^2)=1$$

$$S=\frac{3x\cdot 3y}{2}=\frac{9xy}{2}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 4x^2+y^2=\frac{16}{9} \end{cases}$$

$$3x^2=\frac{7}{9}$$

$$x^2=\frac{7}{27}$$

$$y^2=\frac{20}{27}$$

$$S=\frac{9\,xy}{2}=\frac{9\cdot\frac{\sqrt{140}}{27\,3}}{2}=\frac{\sqrt{140}}{6}=\frac{2\sqrt{35}}{6}=\frac{\sqrt{35}}{3}$$

211005422 (U283390 M1277710)

Черновик.

№2. (3)

$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+3=2\sqrt{4+3x-x^2}$

$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+3=2\sqrt{-(x^2-3x+4)}$

$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+3=2\sqrt{-(x+1)(x-4)}$

ОДЗ:

$\begin{cases} x+1\geq 0 \\ -x+4\geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x\geq -1 \\ x\leq 4 \end{cases}$

~~ОДЗ~~

$t\geq 0$

$\underbrace{\sqrt{x+1}}_{u}-\underbrace{\sqrt{-(x-4)}}_{v}+3=2\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{-(x-4)}$

$u-v=2uv-3$

$3+u-2uv-v=0$

$u(1-2v)=v-3$

$u=\frac{v-3}{1-2v}$

$(\sqrt{x+1}-\sqrt{-(x-4)})^2=x+1-2\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{-(x-4)}+(-x)+4=$

$=5-2\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{-(x-4)}$

$2\sqrt{(x+1)(4-x)}=5-(\sqrt{x+1}-\sqrt{-(x-4)})^2$

$u-v+3=5-(u-v)^2$

$t+3=5-t^2$

$t^2+t-2=0$

$\left[\begin{array}{l} t=-2 \\ t=1 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \sqrt{x+1}-\sqrt{-x+4}=-2 \\ \sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}=1 \end{array}\right.$ ~~не подходит~~

$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}=1$

$(\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{4-x})=\sqrt{x+1}+\sqrt{4-x}$

$x+1-4-$

$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}=-2$

...

$\Rightarrow 2\sqrt{(x+1)(+4-x)}=1+3=4$

$\sqrt{(x+1)(4-x)}=2$

$(x+1)(4-x)=4$

$4x+\cancel{4}-x^2-x=\cancel{4}$

$-x^2+3x=0$

$x(-x+3)=0$

$\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=+3 \end{array}\right.$ – входит в ОДЗ

$144=4\cdot 38$

$144=12^2=(3\cdot 4)^2=3^2\cdot 4^2$

$2^4\cdot 3\cdot 2^3=2^7\cdot 3=(2^3)^2\cdot 2\cdot 3$

$\frac{3-2\sqrt{6}}{2}=$

$=1,5-\sqrt{6}+1=$

$=2,5-\sqrt{6}$

$\frac{3+2\sqrt{6}}{2}-4$

$1,5+\sqrt{6}$

$\frac{3+\sqrt{24}}{2}>-1$

$3+\sqrt{24}$

$3+2\sqrt{6}-8=$

$=2\sqrt{6}-5=$

$=\sqrt{24}-\sqrt{25}<0$

211005422 (U283390 M1277710)

Черновик.

№3.

$2a^2 - 2ax - 6ay + x^2 + 2xy + 5y^2 = 0$ – точка A

$ax^2 + 4a^2x - ay + 4a^3 + 2 = 0$ – парабола

$x + y = 3 \Rightarrow y = 3 - x$

$ay = ax^2 + 4a^2x + 4a^3 + 2 \Rightarrow a \neq 0$

$y = x^2 + 4ax + 4a^2 + \frac{2}{a} =$ $\quad x_B = -\frac{b}{2a} = \frac{-4a}{2} = -2a$

$= (x + 2a)^2 + \frac{2}{a}$

$B(-2a; \frac{2}{a})$

$5y^2 + 2y(x - 3a) + x^2 - 2ax + 2a^2 = 0$

$5y^2 + 2y(x-3a) + (x-a)^2 + a^2 = 0$

$2y(x - 3a) < 0$

$\left[\begin{array}{l} y < 0 \\ x < 3a \end{array}\right.$

$x^2 - 6ax + 9a^2 + 4a\cancel{x} - 7a$

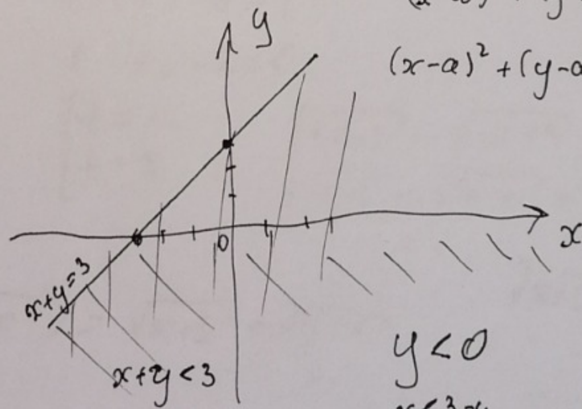
$y + x = 3$

$(x-a)^2 + (y-a)^2 + 4y^2 - 4ay + 2\cancel{xy} =$

$(x-a)^2 + (y-a)^2 + 2y(2y - 2a + x) = 0$

$y < 0$

$2y - 2a + x > 0$



$\frac{2}{a} = 3 + 2a$

$\frac{2 - 3a - 2a^2}{a} = 0$

$2a^2 + 3a - 2 = 0$

$D = 9 + 16 = 25$

$a = \frac{-3 \pm 5}{4}$

$\left[\begin{array}{l} a = -2 \\ a = \frac{1}{2} \end{array}\right. \quad a \neq 0$

$y < 0$

$x < 3 - y$

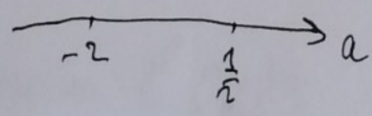
$x > 3a$

$x^2 + 2xy + \cancel{5}y^2 + 4y^2 - 2ax - 6ay + 2a^2 = 0$

$(x+y)^2 + 4y^2 - 2a(x + 3y) + 2a^2$

$x^2 + 6xy + 9y^2 - 4xy - 4y^2 + 2a^2 - 2a(x + 3y) = 0$

$(x + 3y)^2 - 4xy - 4y^2 + 2a^2 - 2a(x+3y) = 0$



$x^2 - 2ax + a^2 + a^2 - 6ay + 9y^2 - 4y^2 + 2xy =$

$= (x-a)^2 + (3y - a)^2 - 4y^2 + 2xy$

211005422 (U283390 M1277710)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211005422**

ID профиля: **283390**

Вариант 12

Чистовик

№4. (1)

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

Замена: $\begin{cases} t = x^2+y^2 \\ t > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} u = x^2y^2 \\ u > 0 \end{cases}$

$t^2 = (x^2+y^2)^2 = x^4+2x^2y^2+y^4 = (x^4+y^4)+2u$

$\Rightarrow x^4+y^4 = t^2-2u$

Т.о. $\begin{cases} \frac{1}{t} + u = \frac{5}{4} \\ 2(t^2-2u)+5u = \frac{9}{4} \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{1}{t}+u = \frac{5}{4} \\ 2t^2-4u+5u = \frac{9}{4} \end{cases}$

$$\begin{cases} \frac{1}{t}+u = \frac{5}{4} \quad (1) \\ 2t^2+u = \frac{9}{4} \quad (2) \end{cases}$$

$(2)-(1)$: $2t^2 - \frac{1}{t} = 1$

$\frac{2t^3-1-t}{t} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2t^3-t-1=0 \\ t>0 \end{cases}$ $t=1$ - корень

$$\begin{array}{l|l} 2t^3-t-1 & t-1 \\ \hline -2t^3-2t^2 & 2t^2+2t+1 \\ \quad 2t^2-t & \\ \quad -2t^2-2t & \\ \qquad t-1 & \\ \qquad -t-1 & \\ \qquad\ 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow \begin{cases} (t-1)(2t^2+2t+1)=0 \\ t>0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} t=1 \\ 2t^2+2t+1=0 \ (*) \end{array}\right. \\ t>0 \end{cases}$$

$(*)$: $D = 4-4\cdot2\cdot1 < 0$

$\Rightarrow 2t^2+2t+1 > 0$ всегда $\Rightarrow$ существует 1 корень: $t=1$

$\Rightarrow u = \frac{5}{4} - \frac{1}{t} = \frac{5}{4} - \frac{1}{1} = \frac{1}{4}$

Чистовик ②

№4 (продолжение)!

Т.о. $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2y^2=\frac{1}{4} \end{cases}$

Замена: $u=x^2;\ u\geq 0$

$v=y^2;\ v\geq 0$

$\Rightarrow \begin{cases} u+v=1 \\ uv=\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=1-v \\ uv=\frac{1}{4} \end{cases}$ (3)

(3): $(1-v)v=\frac{1}{4}$

$v-v^2-\frac{1}{4}=0$

$v^2-v+\frac{1}{4}=0$

$D=1-4\cdot\frac{1}{4}\cdot 1=0$

$\Rightarrow (v-\frac{1}{2})^2=0 \Rightarrow v=\frac{1}{2} \Rightarrow u=1-v=\frac{1}{2}$

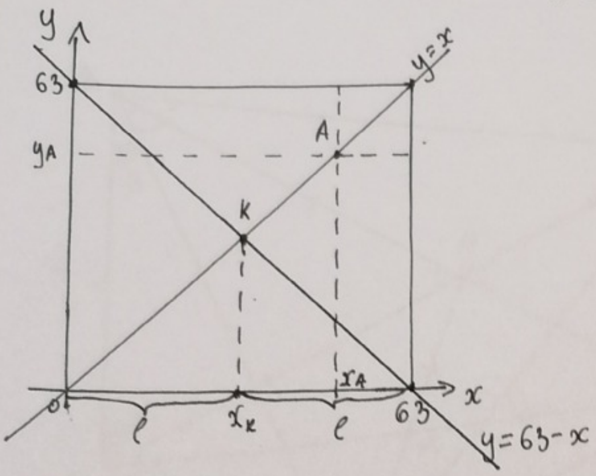
Т.о. $\begin{cases} x^2=\frac{1}{2} \\ y^2=\frac{1}{2} \end{cases}$ Имеем 4 пары: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y=-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y=-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \end{array}\right.$

Ответ: $(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2})$, $(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2})$, $(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2})$, $(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2})$

Чистовик

③

№5.



Заметим, что прямые $y=x$ и $y=63-x$ являются диагоналями нашего квадрата. Всего внутри квадрата находится $62^2 = \cancel{1364}\ 3844$ узла сетки.

На одной диагонали находится 62 узла (на прямой $y=x$ это узлы $(1;1)$, $(2;2)$...$(62;62)$, а на прямой $y=63-x$ это узлы $(62;1)$, $(61;2)$... ...$(1;62)$). Важно, что диагонали пересекаются не в узле сетки: $l = \frac{63}{2} = 31\frac{1}{2} \Rightarrow x_k = 31\frac{1}{2}$. Следовательно, всего на диагоналях $62 \cdot 2 = 124$ узла

Выберем произвольный узел A на одной из диагоналей. Второй узел B мы не можем выбрать на прямых $y = y_A$ и $x = x_A$. На отрезках этих прямых, заключённых внутри квадрата, находится по 62 узла (на отр. прямой $x = x_A$ это узлы $(x_A; 1)$, $(x_A; 2)$... $(x_A; 62)$, а на отр. прямой $y = y_A$ это узлы $(1; y_A)$; $(2; y_A)$.... $(62; y_A)$). Эти отр. пересекаются в узле $(x_A; y_A)$. Т.о. мы не можем выбрать в кач-ве узла B $62+61=123$ узла. Т.е. узел B мы можем выбрать $62^2 - 123$ способами

По правилу произведения мы можем выбрать 2 узла, так, чтобы они удовлетворяли условиям: $124 \cdot (62^2 - 123) = 124(3844 - 123) =$

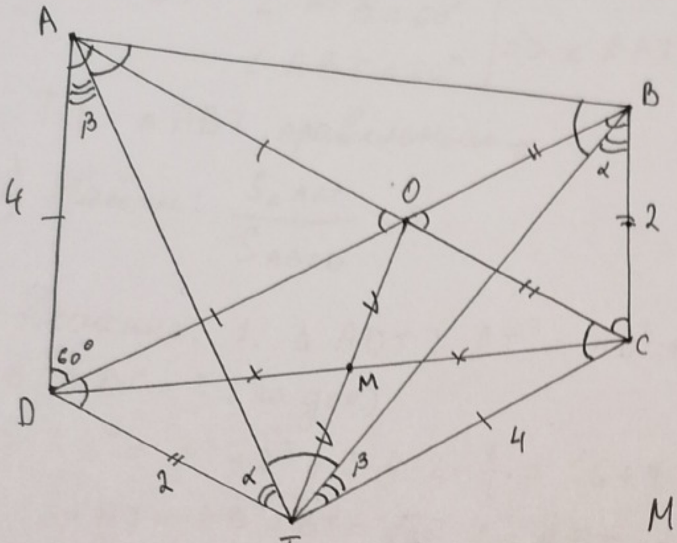
$= 124 \cdot 3721 = \cancel{157\,884}\ 461\,404$ способа

Ответ: $\cancel{157\,884}\ 461404$ способа.

211005422 (U283390 M1277711)

Чистовик.

№6.



1) Д-ть: $\triangle ABT$ – правильный

Д-во: 1. $\angle ADO = \angle OBC = 60°$ (по усл.)

$\Rightarrow AD \parallel BC$ ($\angle ADO$ и $\angle OBC$ – накрест лежащие при прямых AD и BC и секущей BD)

$\Rightarrow ABCD$ – трапеция

2. Рассмотрим 4х-уг. $DOCT$: M – точка пересечения диагоналей и середина OT и DC

$\Rightarrow$ 4х-уг. $DOCT$ – пар-мм по признаку.

$\Rightarrow OD = CT = AD$

$DT = OC = BC$

3. $\angle DOC = 180° - \angle AOD = 180° - 60° = 120°$

$\Rightarrow \angle OCT = 180° - \angle DOC = 180° - 120° = 60°$

$\Rightarrow \angle ODT = \angle OCT = 60°$ (противол. $\angle$ в пар-мме)

4. Рассмотрим $\triangle ADT$ и $\triangle TCB$:

$AD = CT$ (по док.)

$DT = BC$ (по док.)

$\angle ADT = \angle BCT = 120°$ (по док.)

$\Rightarrow \triangle ADT = \triangle TCB$ (по I пр.)

$\Rightarrow \angle ATD = \angle CBT$; $\angle DAT = \angle CTB$.

5. Заметим, что $\alpha + \beta = 180° - 120° = 60°$

$\Rightarrow \angle ATB = \angle DTC - \alpha - \beta = \angle DOC - (\alpha + \beta) = 120° - 60° = 60°$

6. Рассмотрим 4х-уг. $ATCB$:

$\angle ATB = \angle BCA \Rightarrow ATCB$ вписан в окр.

$\Rightarrow \angle ABT = \angle ACT = 60°$

Чистовик

№6 (продолжение)

7. $\triangle ABT$: $\left.\begin{array}{l}\angle ATB = 60^\circ \\ \angle ABT = 60^\circ\end{array}\right| \Rightarrow \angle BAT = 60^\circ$

Т.о. $\triangle ABT$ правильный #

2) Найти: $\dfrac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}} = ?$

Решение: 1. $\triangle ADT$: $AT^2 = AD^2 + DT^2 - 2\,AD \cdot DT \cdot \cos 120^\circ$

$DT = BC = 2$ (по док.)

$\Rightarrow AT^2 = 4^2 + 2^2 + 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 16 + 4 + 8 = 28$

$\Rightarrow AT = AB = BT = \sqrt{28}$ ($\triangle ABT$ – правильный)

$\Rightarrow S_{\triangle ABT} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BT \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{28} \cdot \sqrt{28} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{28}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 7\sqrt{3}$

2. Рассмотрим трапецию ABCD:

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2}(AO + OC)(DO + OB) \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$

3. Т.о. $\dfrac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}} = \dfrac{7\sqrt{3}}{9\sqrt{3}} = \dfrac{7}{9}$

Ответ: $\dfrac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}} = \dfrac{7}{9}$

Черновик

№4

(1)

$t, u > 0$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\underbrace{x^2+y^2}_{t}} + \underbrace{x^2y^2}_{u} = \dfrac{5}{4} \\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2 = \dfrac{9}{4} \end{cases}$$

$$t^2 = (x^2+y^2)^2 = x^4 + \underbrace{2x^2y^2}_{u} + y^4 \Rightarrow x^4+y^4 = t^2-2u$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{t} + u = \dfrac{5}{4} \\ 2(t^2-2u)+5u = \dfrac{9}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{1}{t} + u = \dfrac{5}{4} \\ 2t^2 - 4u+5u = \dfrac{9}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{1}{t} + u = \dfrac{5}{4} & (1) \\ 2t^2 + u = \dfrac{9}{4} & (2) \end{cases}$$

$(1)-(2)$: $2t^2 - \dfrac{1}{t} = \dfrac{4}{4} = 1$

$$\frac{2t^3-1-t}{t} = 0$$

	2	0	−1	−1
1	2	2	1	0

$2t^3 - t - 1 = 0$

$(t-1)(2t^2+2t+1) = 0$

$D = 4 - 4\cdot2\cdot1 < 0 \Rightarrow 2t^2+2t+1 > 0$ – всегда

$\Rightarrow t = 1 \qquad u = \dfrac{5}{4} - \dfrac{1}{t} = \dfrac{5}{4} - \dfrac{1}{1} = \dfrac{1}{4}$

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ x^2y^2 = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ \left[\begin{aligned} xy &= \dfrac{1}{2} \\ xy &= -\dfrac{1}{2} \end{aligned}\right. \end{cases}$$

1) $\begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ xy = \dfrac{1}{2} \quad |\cdot 2 \Rightarrow 2xy = 1 \end{cases}$

$x^2+2xy+y^2 = 2$

$(x+y)^2 = 2$

$x+y = \sqrt{2} \Rightarrow x = \sqrt{2} - y$

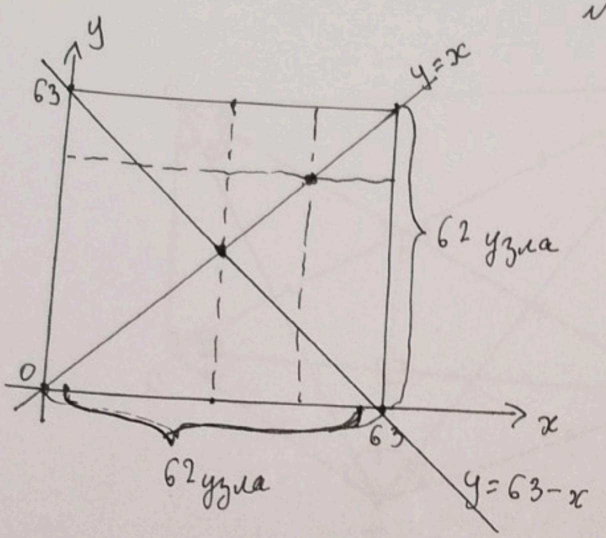
$x+y = -\sqrt{2}$

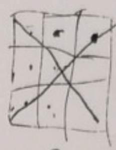
$xy = \dfrac{1}{2}$

Черновик

№5.

2





$5\cdot 4=20$

"изымаем" 123 узла

Всего внутри 62^2 узлов

на 1 диагонали 62 узла

всего $62+61=123$ узла на диагоналях

$123\cdot(62^2-123)=$ ~~123·2(31·2·31)~~ $=$ ~~152643~~

$62=2\cdot 31$

62×62: 124, 124, 3844 → 1364; $1364-123=1241$

1241×123: 3723, 2482, 1241 → 152643

62×62: 124, 124 → 3364

$1364-123=1241$

1364 | 62: 132, 6

1241×124: 4964, 2482, 1241 → 157884

62×62: 124, 372 → 3844

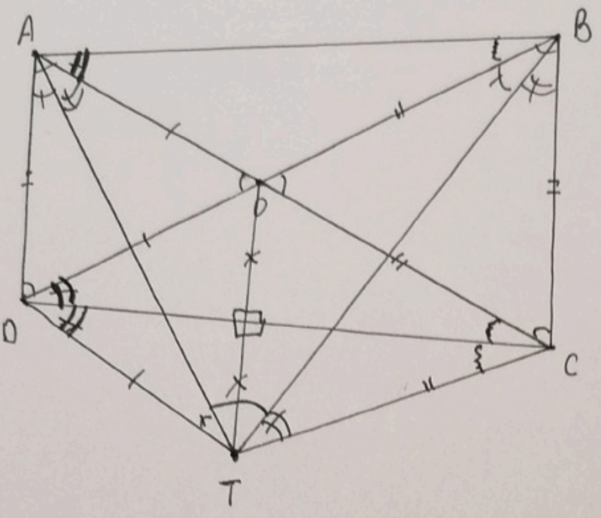
$3844-123=3721$

3721×124: 14884, 7442, 3721 → 461404

Черновик

№6.

3



$2\alpha + 2\beta = 120$

$\alpha + \beta = 60^\circ$

$60^\circ + 2(\alpha + \beta) = 180^\circ$

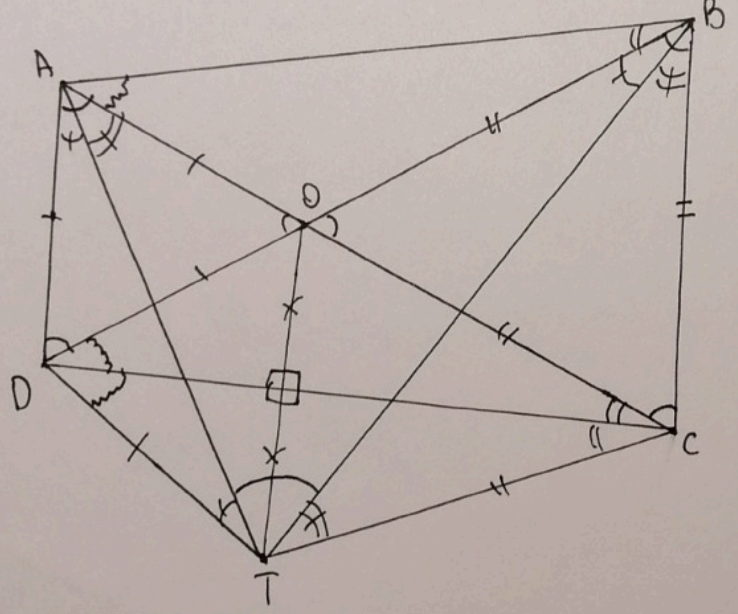
$\Rightarrow \alpha + \beta = 60$

$\Rightarrow \beta = \alpha$

$S = \frac{d_1 d_2}{2} \cdot \sin\alpha =$

$= \frac{\cancel{6}^{3} \cdot \cancel{6}^{3}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} = 9\sqrt{3}$

$\beta = \alpha$



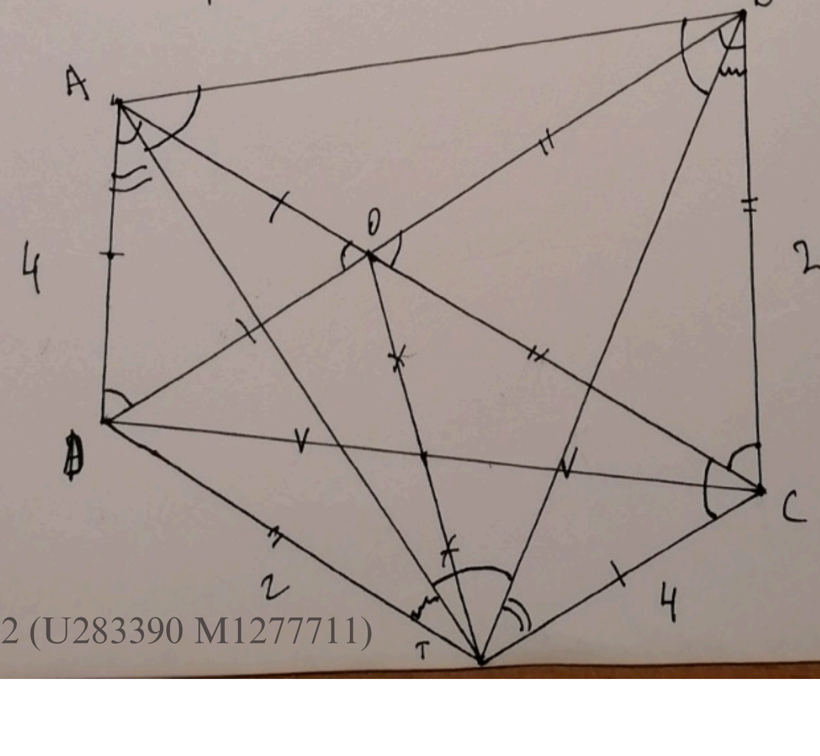
$h_1 = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$

$h_2 = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$

$h = 3\sqrt{3}$

$\frac{4+2}{2} \cdot 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$

$\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}} = ?$



$AT^2 = 16 + 4 + \cancel{2 \cdot \frac{1}{2}} \cdot 4 \cdot 2 =$

$= 16 + 4 + 8 = 28$

$\Rightarrow S_{\triangle ABT} = \frac{AT \cdot BT}{2} \cdot \sin 60^\circ =$

$= \frac{\cancel{28}^{7}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} = 7\sqrt{3}$