Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211005368**

ID профиля: **173598**

Вариант 12

Чистовик

№ 2

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$$

$x+1 \geq 0$; $4-x \geq 0$ $\qquad$ $x \geq -1$; $x \leq 4$ $\qquad$ $x \in [-1; 4]$

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} = 2\sqrt{-x^2+3x+4} - 3 \qquad (1)$

$(x+1)(4-x) = 4x - x^2 + 4 - x = -x^2 + 3x + 4 \qquad (\geq 0$ при $x \in [-1; 4])$

возведём обе части уравнения в квадрат, а потом проверим подходят ли корни для нашего уравнения.

$$\underbrace{(x+1) + (4-x)}_{5} - 2\sqrt{-x^2+3x+4} = 4(-x^2+3x+4) - 12\sqrt{-x^2+3x+4} + 9$$

Пусть $t = \sqrt{-x^2+3x+4}$, $t \geq 0$

$5 - 2t = 4t^2 - 12t + 9$

$4t^2 - 10t + 4 = 0$

$2t^2 - 5t + 2 = 0$

$D = 25 - 4 \cdot 4 = 9$

$t_1 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$

$t_2 = \frac{5+3}{4} = 2$

$\sqrt{-x^2+3x+4} = \frac{1}{2}$

$-x^2+3x+4 = \frac{1}{4}$

$x^2 - 3x - 3\frac{3}{4} = 0$

$D = 9 + 15 = 24$

$x_1 = \frac{3+2\sqrt{6}}{2}$

$x_2 = \frac{3-2\sqrt{6}}{2}$

$\sqrt{-x^2+3x+4} = 2$

$-x^2+3x+4 = 4$

$x^2 - 3x = 0$

$x = 0$; $x = 3$

при $x=0$ (1): $-1 = 1$, т.е. $x=0$ не подходит

при $x=3$ (1): $1 = 1$, т.е.

$x = 3$ подходит

№2 продолжение.

Теперь рассмотрим $x = \frac{3 \pm 2\sqrt{6}}{2}$

$2\sqrt{-x^2+3x+4} - 3$ при этих значениях равно:

$2 \cdot \frac{1}{2} - 3 = -2$

$\frac{3+2\sqrt{6}}{2} > 3$, т.к. $\sqrt{6} > 2 \Rightarrow 3+2\sqrt{6} > 7 \Rightarrow 3+2\sqrt{6} > 6$

Если это значение удовлетворяет $x \in [-1; 4]$, то оно не подойдёт, т.к. при этом

$\left.\begin{matrix} x+1 > 1 \\ 4-x < 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} > 0$, но $-2 < 0 \Rightarrow \frac{3+2\sqrt{6}}{2}$ - не уд.

$\frac{3-2\sqrt{6}}{2} < 0$, т.к. $2\sqrt{6} > 4 \Rightarrow 2\sqrt{6} > 3$.

$\left.\begin{matrix} x+1 < 1 \\ 4-x > 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} < 0.$

Из наших уравнений модули частей уравнения должны быть равны, значит, если $\frac{3-2\sqrt{6}}{2}$ удовлетворяет $x \in [-1; 4]$, то это корень нашего уравнения.

$\frac{3-2\sqrt{6}}{2} < 0 \Rightarrow \frac{3-2\sqrt{6}}{2} < 4$

$6 < 6{,}25 \Rightarrow \sqrt{6} < 2{,}5 \Rightarrow 2\sqrt{6} < 5 \Rightarrow 3-2\sqrt{6} > -2 \Rightarrow$

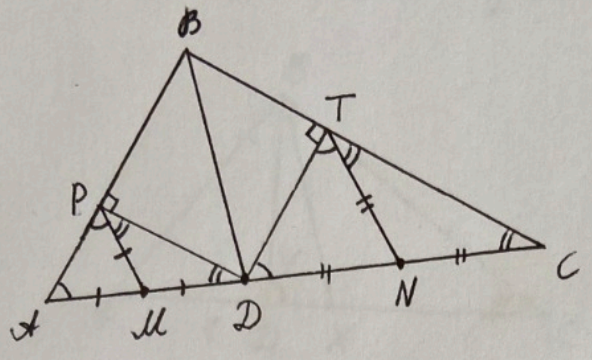
$\Rightarrow \frac{3-2\sqrt{6}}{2} > -1 \Rightarrow$ этот корень подходит!

Ответ: $x \in \left\{ \frac{3-2\sqrt{6}}{2}; 3 \right\}$

Чистовик

№ 1 (а)

а) Вписанный угол окружности, опирающийся на диаметр равен 90° => $\angle BPD = \angle BTD = 90°$



$\angle BPD = \angle BTD = 90° \Rightarrow \angle APD = \angle CTD = 90° \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle APD$ и $\triangle CTD$ – прямоугольные => PM и TN – медианы прямоугольных треугольников, проведённые к гипотенузе. => $PM = AM = MD$, $TN = DN = NC$.

$PM \parallel TN \Rightarrow \angle AMP = \angle DNT$, $\angle PMD = \angle TNC$ =>

$\Rightarrow \triangle APM \sim \triangle DTN$, $\triangle PMD \sim \triangle TNC \Rightarrow$

~~[illegible]~~ Учитывая, что эти треугольники равнобедренные:

$\angle PAM = \angle APM$, $\angle MPD = \angle NCT$

$\angle PAM = \angle BAC$, $\angle NCT = \angle ACB$

$\angle BAC + \angle ACD = \angle APM + \angle MPD = \angle APD = 90°$

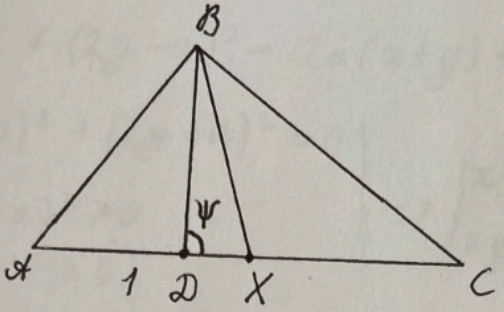
$\angle ABC = 180° - (\angle BAC + \angle ACD) = 90°$

Ответ: $\angle ABC = 90°$.

Чистовик

№1 (б)

б) Из доказанного в пункте (а): $\angle ABC = 90^\circ$, $MP = \frac{1}{2} AD$, $NT = \frac{1}{2} DC$



$AD = 2MP = 1$

$DC = 2NT = 2$

Пусть X – центр AC, тогда $DX = \frac{1}{2}$, $CX = \frac{3}{2}$.

BX – медиана, провед. из прямого угла $\Rightarrow BX = \frac{1}{2} AC = \frac{3}{2}$

Пусть $\angle BDC = \psi$, тогда высота $\triangle ABC$: $h = BD \cdot \sin\psi$

Рассмотрим $\triangle BDX$:

$$BX^2 = BD^2 + DX^2 - 2\, BD \cdot DX \cdot \cos\psi$$

$$\frac{9}{4} = \frac{16}{9} + \frac{1}{4} - \frac{4}{3}\cos\psi$$

$$2 - \frac{16}{9} = -\frac{4}{3}\cos\psi = \frac{2}{9}$$

$\cos\psi = -\frac{1}{6}$. $\quad \sin\psi \geq 0 \Rightarrow \sin\psi = \sqrt{1 - \frac{1}{36}} = \frac{\sqrt{35}}{6}$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot h = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \frac{\sqrt{35}}{6} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{35}}{6} = \frac{\sqrt{35}}{3}$$

Ответ: $S_{ABC} = \frac{\sqrt{35}}{3}$

Чистовик

№3

$$2a^2 - 2ax - 6ay + x^2 + 2xy + 5y^2 = 0$$

$$(x^2 + 2xy + y^2) + (4y^2 - 4ay + a^2) - 2ax - 2ay + a^2 = 0$$

$$(x+y)^2 + (2y-a)^2 - 2a(x+y) + a^2 = 0$$

$$(x+y-a)^2 + (2y-a)^2 = 0$$

$$(x+y-a)^2 \geq 0$$

$$(2y-a)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y-a=0 \\ 2y-a=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y=0 \\ 2y-a=0 \end{cases} \qquad x = y = \frac{a}{2}$$

$$A\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$$

$$ax^2 + 4a^2x - ay + 4a^3 + 2 = 0$$

$$2 \neq 0 \Rightarrow a \neq 0$$

$$x^2 + 4ax + 4a^2 + \frac{2}{a} = y$$

$$y = (x+2a)^2 + \frac{2}{a}$$

$$B\left(-2a; \frac{2}{a}\right)$$

A и B лежат по одну сторону от $x+y=3 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ получаем два варианта:

1.) $\begin{cases} \frac{a}{2} + \frac{a}{2} > 3 \\ -2a + \frac{2}{a} > 3 \end{cases}$ 2.) $\begin{cases} \frac{a}{2} + \frac{a}{2} < 3 \\ -2a + \frac{2}{a} < 3 \end{cases}$

Чистовик

№3 (продолжение)

$$\begin{cases} a > 3 \\ -2a + \frac{2}{a} > 3 \end{cases}$$

$$-2a + \frac{2}{a} - 3 = 0$$

$a \neq 0$

$-2a^2 - 3a + 2 = 0$

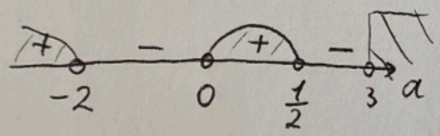
$2a^2 + 3a - 2 = 0$

$D = 9 + 16 = 5^2$

$a_1 = \frac{-3+5}{4} = +\frac{1}{2}$

$a_2 = \frac{-3-5}{4} = -2$

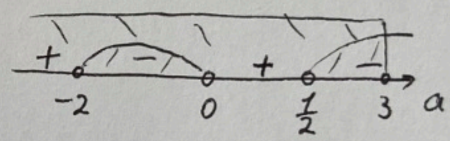
$$-2a + \frac{2}{a} - 3 > 0$$



$a > 3 \Rightarrow a \in \varnothing$

$$\begin{cases} a < 3 \\ -2a + \frac{2}{a} < 3 \end{cases}$$

$$-2a + \frac{2}{a} - 3 < 0$$

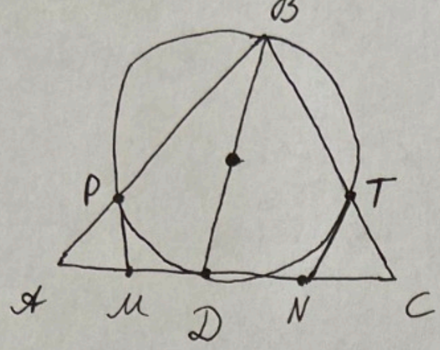


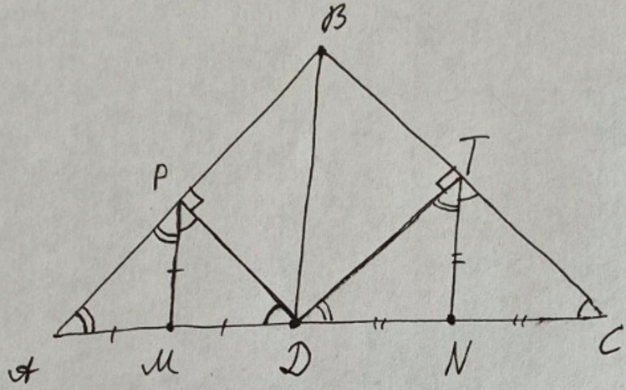
$a \in (-2; 0) \cup (\frac{1}{2}; 3)$

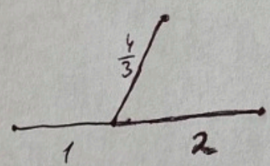
Ответ: $a \in (-2; 0) \cup (\frac{1}{2}; 3)$

Черновик

N 1







Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211005368**

ID профиля: **173598**

Вариант 12

Чистовик

№ 4

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

$$2x^4+2y^4+4x^2y^2+x^2y^2 = 2(x^2+y^2)^2 + x^2y^2$$

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \\ 2(x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

$$2(x^2+y^2)^2 - \frac{1}{(x^2+y^2)} = 1$$

$$x^2+y^2 = t$$

$$2t^2 - \frac{1}{t} = 1$$

$t \neq 0$

$$2t^3 - t - 1 = 0$$

$$2t^3 - 2t^2 + 2t^2 - 2t + t - 1 = 0$$

$$2t^2(t-1) + 2t(t-1) + (t-1) = 0$$

$$(t-1)(2t^2+2t+1) = 0$$

$t = 1$

$2t^2+2t+1 = 0$

$D = 4-8 < 0 \Rightarrow$ нет корней.

$$x^2+y^2 = 1$$

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ 1 + x^2y^2 = \frac{5}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ x^2y^2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Чистовик

№ 4 (продолжение)

$x^2 = a,\ a \geq 0.$

$y^2 = b,\ b \geq 0.$

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ ab = \frac{1}{4} \end{cases}$$

a и b – корни квадратного уравнения:

$$\xi^2 - \xi + \frac{1}{4} = 0$$

$$\xi^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}\xi + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

$$\left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

$$a = b = \frac{1}{2}$$

$$x^2 = y^2 = \frac{1}{2}$$

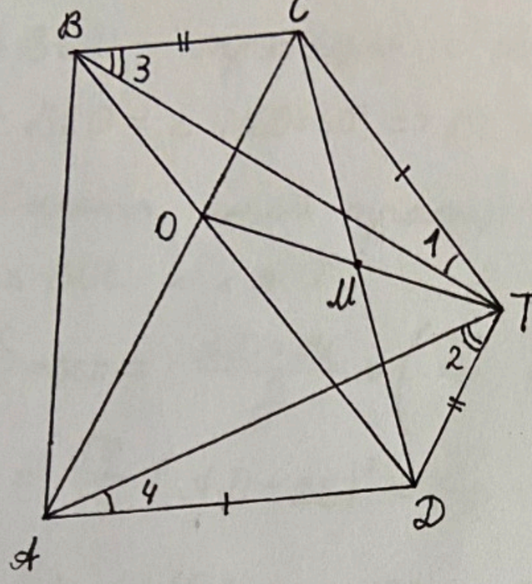
Есть четыре решения.

Ответ: $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

N 6 Чистовик

а)



Достроим четырёхугольник OCTD.

M – середина CD;

M – середина OT, т.к. O и T симметричны отн. M.

Диагонали OCTD точкой пересечения делятся пополам =>

=> OCTD – параллелограмм =>

=> $CT = OD = AD$; $DT = OC = BC$

$\angle COD = 180° - \angle BOC = 180° - 60° = 120° = \angle CTD$

$\angle OCT = \angle TDO = 180° - \angle COD = 60°$

$\angle BCO = \angle ADO = 60°$

$\left.\begin{array}{l}\angle ADT = \angle ADO + \angle TDO = 120° \\ \angle BCT = \angle BCO + \angle OCT = 120°\end{array}\right| \Rightarrow \angle ADT = \angle BCT = 120°$

$\left.\begin{array}{l}DT = BC \\ AD = CT \\ \angle ADT = \angle BCT\end{array}\right| \Rightarrow \triangle BCT = \triangle ADT \Rightarrow BT = AT,\ \angle 1 = \angle 4,$

$\angle 2 = \angle 3$

$\angle 1 + \angle 2 = \angle 1 + \angle 3 = 180° - \angle BCT = 180° - 120° = 60°$

$\angle ATB = \angle CTD - (\angle 1 + \angle 2) = 120° - 60° = 60°$

$\left.\begin{array}{l}\angle ATB = 60° \\ BT = AT\end{array}\right| \Rightarrow$ $\boxed{\triangle ABT \text{ – правильный треугольник}}$

3

211005368 (U173598 M1274599)

№6 (продолжение)

б) $ABCD$ — трапеция с основаниями AD и BC

($\angle BCO = \angle OAD = 60^\circ \Rightarrow BC \parallel AD$)

Высота этой трапеции равна сумме высот $\triangle BOC$ и $\triangle AOD$.

$$S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AD + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot BC \right) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} (AD+BC)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 6^2 = 9\sqrt{3}$$

В $\triangle AOB$ $\angle AOB = \angle COD = 120^\circ$.

$$AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2\,AO \cdot BO \cdot \cos 120^\circ =$$

$$= AD^2 + BC^2 + AD \cdot BC$$

$$AB = \sqrt{4^2 + 2^2 + 8} = \sqrt{16+4+8} = 2\sqrt{7}$$

$$S_{ABT} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 4 \cdot 7 = 7\sqrt{3}$$

$$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{7\sqrt{3}}{9\sqrt{3}} = \frac{7}{9}$$

Ответ: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{7}{9}$

Чистовик

№5

Узлы внутри квадрата имеют координаты, которые лежат в интервале [1; 62].
Если мы выбрали узел внутри квадрата, то второй узел можно выбрать 61^2 способами (мы хотим, чтобы узлы не были на прямой ∥ оси, т.е. обе координаты узлов должны быть разными. Если задан один узел, имеющий какие-то координаты, то другой узел может иметь любую координату от 1 до 62 кроме одной по каждой оси, т.е. 61 вариант по каждой оси; всего 61^2 вариант).
Прямые $y = x$, $y = 63 - x$ – диагонали квадрата. Внутри квадрата на каждой диагонали лежат 62 узла. Всего на двух диагоналях 124 узла, т.к. точка пересечения не лежит на узле ($x = 63 - x \Leftrightarrow 2x = 63 \Leftrightarrow x = \frac{63}{2}$ – не целое число).

Для каждой из этих 124 точек мы можем 61^2 способами выбрать пару, чтобы эти два узла удовлетворяли всем условиям. Но при этом мы дважды учитываем пары узлов на диагоналях, поэтому для получения ответа из $124 \cdot 61^2$ надо вычесть количество пар узлов на диагоналях.
Для каждого узла на диагонали можно выбрать 121 другой узел (124 – начальный узел – два узла с совпадающей координатой на другой диагонали).

211005368 (U173598 M1274599)

Чистовик

№5 (продолжение)

Пар узлов на диагоналях $\frac{124 \cdot 121}{2}$ (делить на 2, т.к. каждую пару мы рассматриваем дважды: рассматривая пары для первого узла и рассматривая пары для второго узла).

Итого, искомое количество:

$$124 \cdot 61^2 - \frac{124 \cdot 121}{2} = \frac{124}{2} \cdot (61^2 \cdot 2 - 121) =$$

$$= 62 \cdot (122 \cdot 61 - 122 + 1) = 62 \cdot (122 \cdot 60 + 1) =$$

$$= 62 (7320 + 1) = 62 \cdot 7321 = \cancel{60 \cdot 733 + 2 \cdot 733} =$$

$$\cancel{= 1466 + 700 \cdot 60 + 33 \cdot 60 = 1466 + 42000 + 1980 =}$$

$$= \cancel{43466 + 1980 = 45466 - 20 = 45446}$$

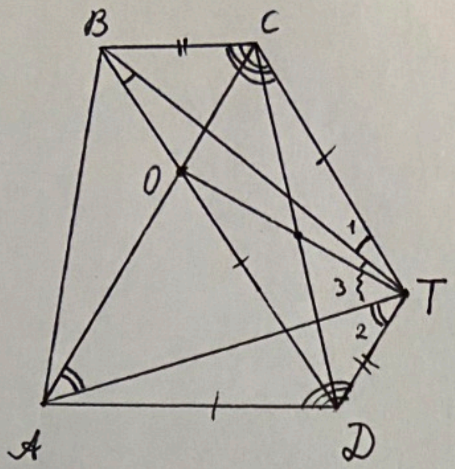
~~Ответ: 45446~~

$$62 \cdot 7321 = 14642 + 439260 =$$

$$= 440260 + 13642 = 453260 + 642 = 453902$$

Ответ: 453902

Черновик



$\cancel{\angle 3 = 360^\circ - (360^\circ - 120^\circ)}$