Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211005348**

ID профиля: **290531**

Вариант 12

Чистовик

№2

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+3=2\sqrt{4+3x-x^2}$$

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+3=2\sqrt{(x+1)(4-x)}$$

~~Дз~~ ОДЗ: $\begin{cases}x+1\geq 0\\ 4-x\geq 0\end{cases}$ $\begin{cases}x\geq -1\\ x\leq 4\end{cases}$ $x\in[-1;4]$.

т.к. $x+1\geq 0$ и $4-x\geq 0$, то $\sqrt{(x+1)(4-x)}=\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{4-x}$

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}-2\sqrt{x+1}\sqrt{4-x}+3=0.$$

Пусть $a=\sqrt{x+1},\ a>0 \Rightarrow a^2=x+1$

$b=\sqrt{4-x},\ b>0 \Rightarrow b^2=4-x$ $\Big| \Rightarrow x=a^2-1=4-b^2$

$\Downarrow$

$\underline{a^2+b^2=5}$

$$a-b-2ab+3=0$$

$$a^2+b^2-a^2-b^2+a-b-2ab+3=0.$$

$$(a-b)^2+a-b-(\underbrace{a^2+b^2}_{5})+3=0.$$

$$(a-b)^2+(a-b)-2=0.$$

$$t=a-b$$

$$t^2+t-2=0 \Rightarrow \left[\begin{aligned}t&=-2\\ t&=1\end{aligned}\right.$$

1

Чистовик №2 продолжение

Значит
$$\left[\begin{array}{l} a-b=-2 \\ a-b=1 \end{array}\right.$$
$$\Updownarrow$$
$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}=-2 \\ \sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{4-x}-\sqrt{x+1}=2 \\ \sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}=1 \end{array}\right.$$

Возведём в квадрат

$$\left[\begin{array}{l} 4-x+x+1-2\sqrt{4-x}\sqrt{x+1}=4 \\ x+1+4-x-2\sqrt{4-x}\sqrt{x+1}=1 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} -2\sqrt{4-x}\sqrt{x+1}=-1 \\ -2\sqrt{4-x}\sqrt{x+1}=-4 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \sqrt{4-x}\sqrt{x+1}=0,5 \\ \sqrt{4-x}\sqrt{x+1}=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} (4-x)(x+1)=0,25 \\ (4-x)(x+1)=4 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} -x^2+3x+4-0,25=0\,/\cdot 4 \\ -x^2+3x+4-4=0.\,/(-1) \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} -4x^2+12x+15=0 \\ x^2-3x=0 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 4x^2-12x-15=0 \quad (1) \\ x(x-3)=0. \end{array}\right.$$

(1) $\frac{D}{4}=36+4\cdot 15=96$ $\quad x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{96}}{4}=\frac{3\cdot 2\pm 4\sqrt{6}}{4}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{6}$

Корни: $x=0\in ОДЗ$
$x=3\in ОДЗ$
$x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{6}$

надо сравнить $\frac{3}{2}+\sqrt{6} \vee 4.$
$2\sqrt{6} \vee \frac{5}{\cancel{4}}$
$24<25 \Rightarrow \frac{3}{2}+\sqrt{6}<4.$

2

211005348 (U290531 M1273331)

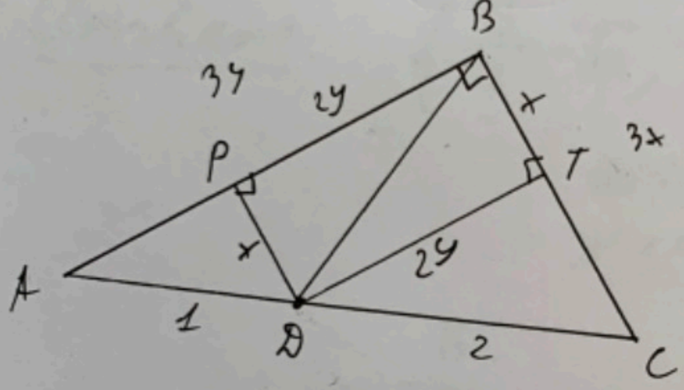
Чистовик № 1 (а) продолжение

$\angle AMP = \angle DNT \Rightarrow 2\alpha = 180 - 2\beta \Rightarrow \alpha + \beta = 90$

$\angle ABC = \alpha + \beta = 90.$

а) Ответ: $\angle ABC = 90°$

№ 1 (б).



1) как док-но в 1 (а) $DP \perp AB$ и $DT \perp BC$ и $\angle ABC = 90°$
$\Downarrow$
$PDTB$ - прямоуг.

2) Пусть $PD = x$
$DT = 2y$
$\Downarrow$
$BT = x$
$PB = 2y$

3) как док-но в 1 (а) $AM = MP = MD \Rightarrow \overset{AD}{\overset{\parallel}{AM + MD}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$

$NT = ND = NC \Rightarrow DC = DN + NC = 1 + 1 = 2.$

4) $DP \perp AB$ и $BC \perp AB \Rightarrow \triangle APD \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{PD}{AD} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow$

$\Rightarrow BC = \frac{x}{1} \cdot 3 = 3x.$

$AB \perp B$ и $DT \perp BC \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DTC \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{DT}{DC} \Rightarrow$

$\Rightarrow AB = \frac{2y}{2} \cdot 3 = 3y.$

5) По Th Пифагора: $\triangle ABC$: $(3y)^2 + (3x)^2 = 3^2$

$\boxed{x^2 + y^2 = 1}$ (*)

4

211005348 (U290531 M1273331)

Чистовик №1 (б) продолж.

По Th Пифагора: $\triangle BTD$:

$$x^2 + (2y)^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2$$

$$x^2 + 4y^2 = \frac{16}{9}$$

(*) $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow x^2 = 1 - y^2$

$$1 - y^2 + 4y^2 = \frac{16}{9}$$

$$3y^2 = \frac{7}{9}$$

$$y^2 = \frac{7}{27} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{7}{27}}$$

и

$$x^2 = 1 - \frac{7}{27} = \frac{20}{27} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{20}{27}}$$

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} xy = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{7}{27} \cdot \frac{20}{27}} = \frac{\sqrt{35}}{27}$$

б) Ответ: $S = \frac{\sqrt{35}}{27}$

№3

Ориентиров. расстояние от точки до прямой

$\rho = \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ~~б/знак~~. Значит точки лежат

по одну сторону, тогда произведение ор. расст. > 0.

5

Чистовик №2 продолж.

ещё надо сравнить $\frac{3}{2}-\sqrt{6} \vee -1$.

$\frac{3}{2}+1 \vee \sqrt{6}$

$5 \vee 2\sqrt{6}$

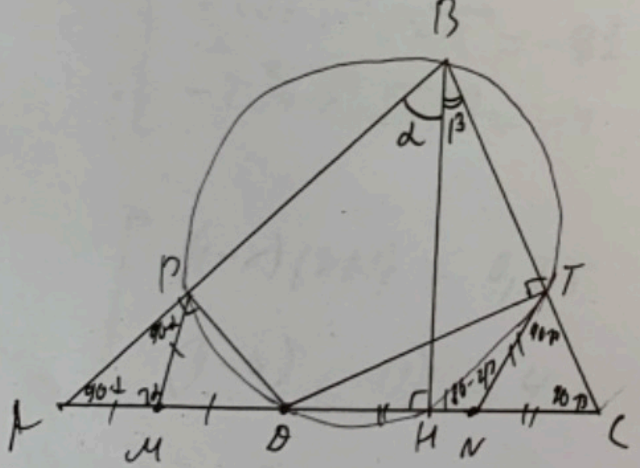
$25 > 24 \Rightarrow \frac{3}{2}-\sqrt{6} > -1$

Значит все решения входят в ОДЗ.

<u>Ответ</u>: $\left\{\frac{3}{2}-\sqrt{6};\ 0;\ 3;\ \frac{3}{2}+\sqrt{6}\right\}$.

~~ЛВз~~

N 1(а)



1) BH - высота в $\triangle ABC$.

(·)H ∈ ω - окружн. с диам BD.

Т.к. из (·)H BD видеп под прямым углом. ($\angle BHD = 90°$)

2) $\angle BPD = \angle BTD = 90°$, т.к. опир на диам.

⇓

$\triangle APD$ и $\triangle DTC$ - прямоуг ⇒

⇒ $AM = MP = MD$; $DN = NC = TN$.

3) ~~Т.К. ЛЛDP - высо~~ ~~то~~ Пусть $\angle ABH = \alpha$; $\angle CBH = \beta$ ⇒

⇒ $\angle BAH = 90 - \alpha$; $\angle BCH = 90 - \beta$ ⇒ $\angle APM = 90 - \alpha$ ($MP = AM$) ⇒

⇒ $\angle AMP = 2\alpha$; $\angle NTC = \angle NCT = 90 - \beta$ ($NT = NC$) ⇒

⇒ $\angle DNT = 180 - 2\beta$; т.к. $MP \parallel NT$, то

3

211005348 (U290531 M1273331)

Чистовик №3 продолжение

$A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$

$x+y=3$

$x+y-3=0.$

$$\rho_A = \frac{x_1+y_1-3}{\sqrt{1+1}}$$

$$\rho_B = \frac{x_2+y_2-3}{\sqrt{1+1}}$$

Итого $\frac{x_1+y_1-3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{x_2+y_2-3}{\sqrt{2}} > 0. / \cdot 2.$

осталось найти такие a, что:

$$\boxed{(x_1+y_1-3)(x_2+y_2-3) > 0. \ (*)}$$

Найдём коорд (.)B:

$$ax^2+4a^2x-ay+4a^3+2=0$$

$$ax^2+4a^2x+4a^3+2=ay \quad /: a\neq 0$$

$a=0$ – не подх $(0\neq 2)$.

$x^2+4ax+4a^2+\frac{2}{a}=y$. – это парабола.

её вершина $x_0=\frac{-4a}{2}=-2a.$

подставим $-2a$, чтобы найти y

$$y=(-2a)^2+4a\cdot(-2a)+4a^2+\frac{2}{a}=4a^2-8a^2+4a^2+\frac{2}{a}=\frac{2}{a}.$$

$B: \left(-2a; \frac{2}{a}\right).$

6

211005348 (U290531 M1273331)

Чистовик №3 продолжение.

Найдём коорд (.) A:

$2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0.$

$x^2-2ax+a^2+a^2+2xy+5y^2-6ay=0.$

$\cancel{(x-a)^2+(3y-a)^2+2xy+2y^2=0}$

~~Заметим, что $x=a$, $y=a$ - реш. $(a-a)^2+(3a-a)^2=4a^2$?~~

$x^2-2ax+a^2+(3y)^2-2\cdot a\cdot 3y+a^2=4y^2-2xy.$

$(x-a)^2+(3y-a)^2=4y^2-2xy.$

Заметим $x=a$; $y=a$ - корх.

других очевидно нет.

A: $(a;a)$

подставим (.)B в (*)

$(x_1+y_1-3)(-2a+\frac{2}{a}-3)>0.$

$(x_1+y_1-3)\left(\frac{-2a^2+2-3a}{a}\right)>0.$

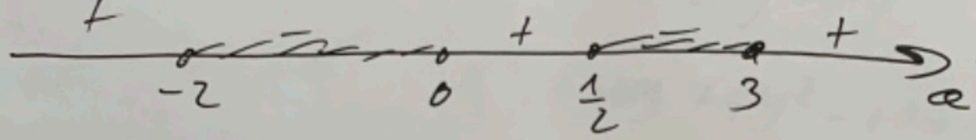
$(x_1+y_1-3)\left(\frac{2a^2+3a-2}{a}\right)<0.$

$(x_1+y_1-3)\left(\frac{(2a-1)(a+2)}{a}\right)<0.$

211005348 (U290531 M1273331)

Чистовик №3 прод.

$$\frac{(a-3)(2a-1)(a+2)}{a} < 0.$$



Ответ: $(-2;\,0) \cup \left(\frac{1}{2};\,3\right)$.

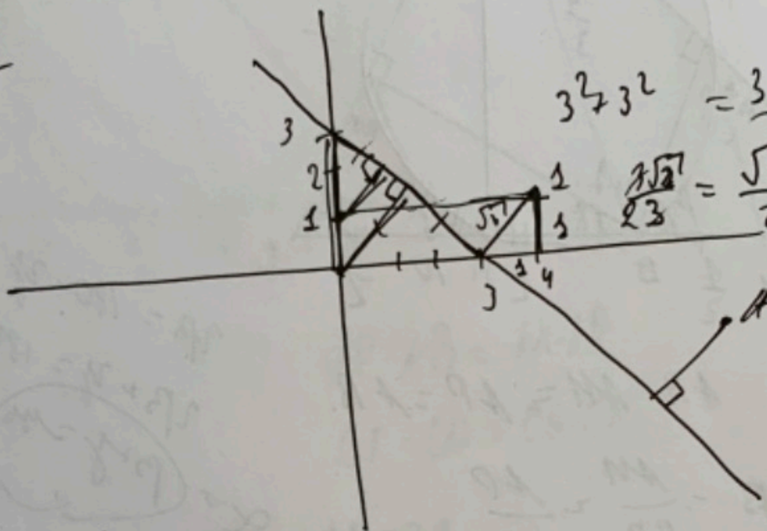
8

211005348 (U290531 M1273331)

Черновик.

$$2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0.$$

$y=3-x$



$3^2+3^2 \quad =\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$\frac{3\sqrt{2}}{2\cdot3}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\rho=\frac{ax_0+by_0+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$x=0 \quad y=1$

$$\rho=\frac{0+1-3}{\sqrt{1+1}}=\frac{-2}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}.$$

$x+y-3=0.$

$x=4$

$y=1$

$$\rho=\frac{4+1-3}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

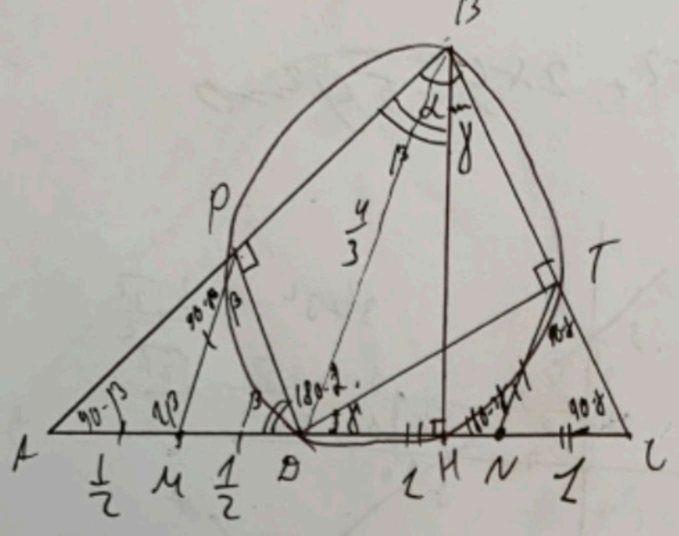
$$\rho=\frac{x_0+y_0-3}{\sqrt{2}}\cdot\frac{x_1+y_1-3}{\sqrt{2}}>0. \quad /\cdot 2$$

$$(x_0+y_0-3)(x_1+y_1-3)\geq 0.$$

$$\left(-2a+\frac{2}{a}-3\right)($$

211005348 (U290531 M1273331)

Черновик.



PM ∥ TN

$\angle\alpha = ?$

$2\beta = 180 - 2\gamma$

$2\beta + \gamma = 180$

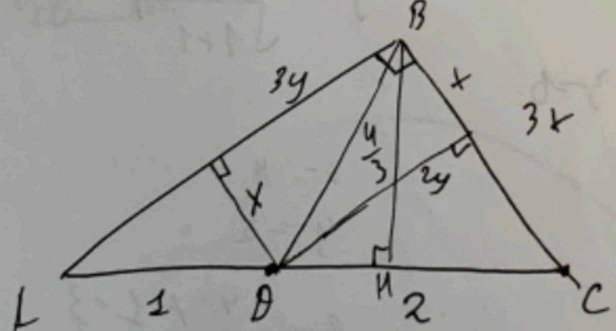
$\alpha = \beta + \gamma = 90$

$AD \cdot AH = AP \cdot AB.$

$\sin\beta = \frac{AH}{AB} = \frac{AP}{AD}$

$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot y = \sqrt{\frac{20}{27} \cdot \frac{7}{27}} \cdot \frac{1}{2} =$

$= \frac{\sqrt{20 \cdot 7}}{2 \cdot 27} = \frac{\sqrt{35}}{27}.$



$x = \sqrt{1 - \frac{7}{27}} =$

$= \sqrt{\frac{20}{27}}$

$y = \sqrt{\frac{7}{27}}$

$AD \cdot AH =$

$9y^2 + 9x^2 = 9.$

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1. \\ x^2 + 4y^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \end{cases}$

$y^2 = \frac{7}{27}$

$x^2 = 1 - y^2$

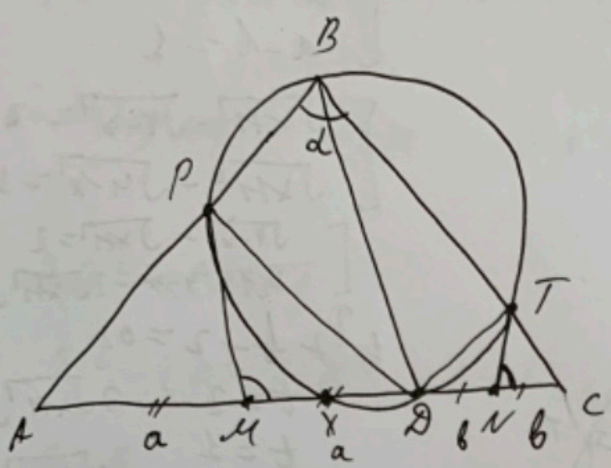
$1 - y^2 + 4y^2 = \frac{16}{9}.$

$1 + 3y^2 = \frac{16}{9}$

$3y^2 = \frac{7}{9}.$

211005348 (U290531 M1273331)

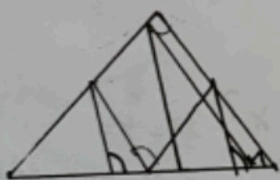
Черновик.

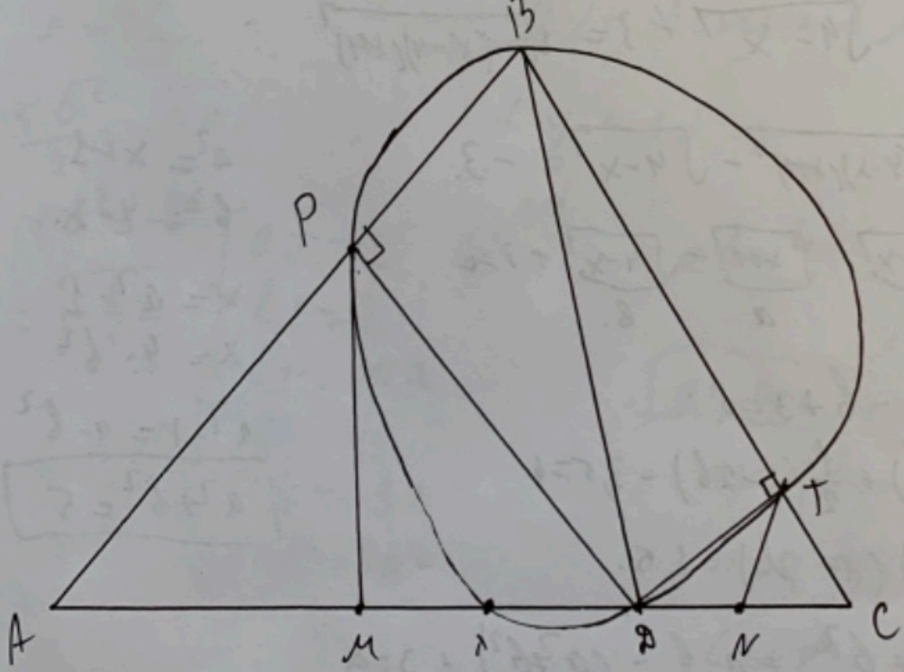


$AP \cdot AB = AX \cdot AD$

$CT \cdot CB = CD \cdot CX.$

$AD = 2a.$
$CD = 2b.$





$\frac{96}{4} = \frac{80}{4} + \frac{16}{4} = 20 + 4 = 24 = 6 \cdot 4.$

$6 \cdot 4 \cdot 4.$

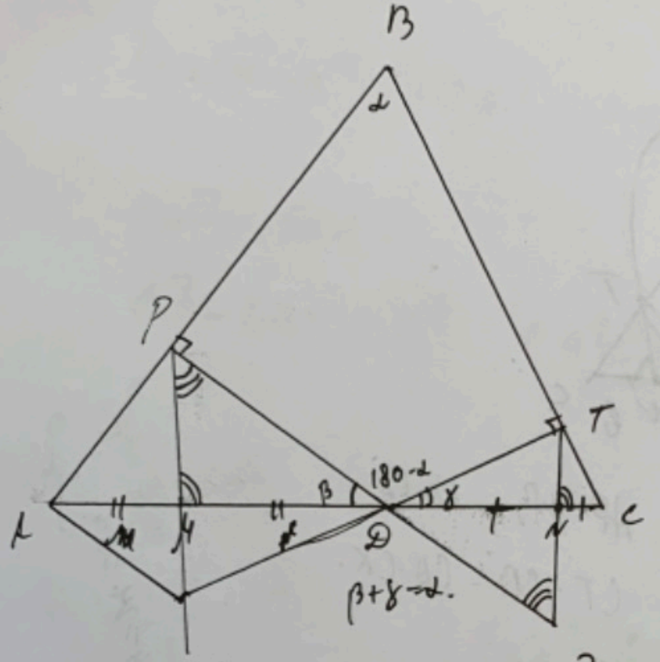
$32 \cdot 3.$

$16 \cdot 6.$

$16 \cdot 6.$

211005348 (U290531 M1273331)

Черновик.



$$\left[\begin{array}{l} a-b=-2 \\ a-b=1 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}=-2 \\ \sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}=1. \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{4-x}-\sqrt{x+1}=2 \\ x+1+4-x-2\sqrt{x+1}\sqrt{4-x}=1 \end{array}\right.$$

$$t^2+t-2=0.$$

$$t=-2 \qquad 2\sqrt{x+1}\sqrt{4-x}=4$$

$$t=1 \qquad \sqrt{x+1}\sqrt{4-x}=2$$

$$t=a-b.$$

$$(a-b)^2+(a-b)=2.$$

$$(a-b)(a-b+1)=2.$$

$$x^2-3x-4=$$
$$=(x-4)(x+1)$$

$$\sqrt{x+1}\ \cancel{4}-\sqrt{4-x}+3=2\sqrt{-(x-4)(x+1)}$$

$$\sqrt{x+1}-2\sqrt{(4-x)(x+1)}-\sqrt{4-x}=-3.$$

$$\underbrace{\sqrt{x+1}}_{a}-2\underbrace{\sqrt{4-x}}_{b}\cdot\underbrace{\sqrt{x+1}}_{a}-\underbrace{\sqrt{4-x}}_{b.}+3=0$$

$$a-2ab-b+3=0.$$

$$a(1-2b)+\frac{1}{2}(1-2b)-3,5=0.$$

$$(a+0,5)(1-2b)=3,5.$$

$$a^2-2ab+b^2+a-b-(a^2+b^2)+3=0$$

$$(a-b)^2+a-b-(\overset{5}{a^2+b^2})+3=0.$$

$$a^2=x+1$$
$$b^2=4-x.$$

$$x=a^2-1$$
$$x=4-b^2$$

$$a^2-1=4-b^2$$

$$\boxed{a^2+b^2=5}$$

211005348 (U290531 M1273331)

Черновик.

$$2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0$$

$$x^2+2xy+y^2+2a^2-2a(x+3y)+4y^2=0.$$

$\cancel{2a^2-2ax+}$

$$a^2-2ax+x^2+a^2-6ay+5y^2$$

$$\begin{cases} \frac{2f}{b}=5 \\ \frac{2e}{b}=-6a \\ \frac{2f}{b}=2a^2. \end{cases}$$

$$(x-\quad)(y-\quad)=0.$$

$$(ax^2+bx+c)(dy^2+ey+f)=0.$$

$2f=5b$

$bf=-2a$

$f=\frac{5b}{2}.$

$\frac{5b^2}{4}=-2a.$

$5b^2=-8a.$

$b=\sqrt{-\frac{8}{5}a}$

$$ax^2\cdot dy^2+ax^2ey+afx^2+$$
$$+bdxy^2+bexy+bfx+cdy^2+$$
$$+cey+cf=0.$$

$$\begin{cases} af=1 \\ be=2 \\ bf=-2a \\ cd=5 \\ ce=-6a \\ cf=2a^2 \end{cases}$$

$a=\cancel{...}$

$c=\frac{2}{b}$

$$adx^2y^2+acx^2y+$$
$$+bdxy^2=0.$$

$$\boxed{adxy+acx+bdy=0.}$$

$$ax(dy+c)+bdy+bc=bc.$$

$$ax(dy+c)+b(dy+c)=bc$$

$$(ax+b)(dy+c)=bc$$

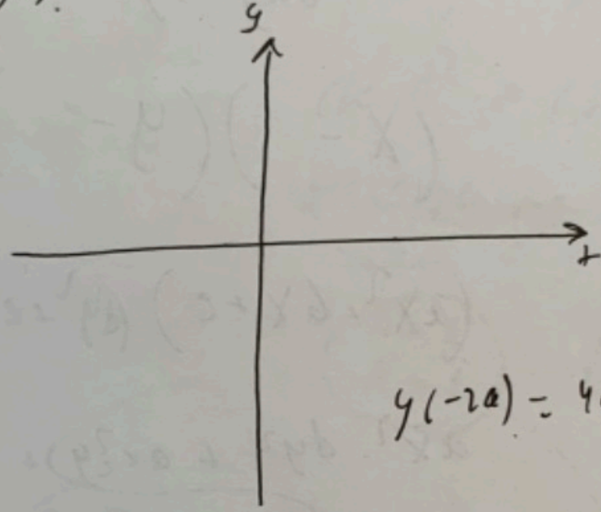
211005348 (U290531 M1273331)

Черновик.

A: $2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0$

$ax^2+4a^2x-ay+4a^3+2=0$ – параб с в. В.

$x+y=3.$



$y(-2a)=4a^2-8a^2+4a^2+\frac{2}{a}=$

$=\frac{2}{a}$

$x^2-2ax+a^2+9y^2-6ay+a^2-4y^2-2xy=0$

$(x-a)^2+(3y-a)^2-2y(2y+x)=0$

$ax^2+4a^2x-ay+4a^3+2=0$

$ay=ax^2+4a^2x+4a^3+2 \quad |:a\neq 0.$

$y=x^2+4ax+4a^2+\frac{2}{a}$

$\frac{-b}{2a}=\frac{-4a}{2}=-2a.$

$\boxed{B:\left(-2a;\frac{2}{a}\right)}$

211005348 (U290531 M1273331)

$x^2 - 2ax + a^2 + a^2 + 2xy + 5y^2 - 6ay = 0$

$(x-a)^2 + (3y)^2 - 2\cdot 3ay + a^2 \cancel{-2xy} - 4y^2 = 0$

$(x-a)^2 + (3y-a)^2 = 4y^2$

$x = ka$ $\quad (ka-a)^2 + (3na-a)^2 = 4(na)^2$

$y = na$

$a^2(k-1)^2 + \cancel{a^2}(3n-1)^2 = 4n^2\cancel{a^2}$

$(x-a)^2 + (3y-a)^2 = 0$ $\quad (k-1)^2 + (3n-1)^2 = 4n^2$

$\cancel{k^2 - 2k + 1 + 9n^2} - 6n + 1 = \cancel{4n^2}$

$n = 1$ $\quad x = a$ $\quad 48a^2 -$

$k = 1$ $\quad y = a$ $\quad 20a^2$

$(a-a)^2 + (3a-a)^2 = 4a^2$ $\quad x = a$, $y = 2a$

$x = 2a$, $y = a$

$4a^2$

$x = -a$ $\quad a^2$

$y = a$ $\quad (3y)$ $\quad + 4a^2$

$4a^2 + 4a^2 = 4a^2 + 2\cdot a\cdot a$ $\quad 4a^2 - 2\cdot 2a\cdot a = 0$

$x = 2\frac{a}{2}$ $\quad x = 0$

$2a^2 - 2a^2$ $\quad y = a$ $\quad a^2 + 4a^2$

$-6a^2 + a^2 + 2a^2 + 5a^2 = 0$

$D = 9 + 4\cdot 2\cdot 2 =$

$= -2$ $\quad = 25$ $\quad \frac{-3 \pm 5}{4}$

$\frac{1}{2}$ $\quad = 3 \pm 2$

211005348 (U290531 M1273331)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211005348**

ID профиля: **290531**

Вариант 12

Чистовик

№1

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \dfrac{5}{4} \\ 2x^4 + 2y^4 + 5x^2y^2 = \dfrac{9}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \dfrac{5}{4} \\ 2(x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = \dfrac{9}{4}. \end{cases}$$

Пусть $a = x^2+y^2$, $a>0$ ($a \neq 0$, т.к. x^2+y^2 в знамен.)

$b = x^2y^2$, $b \geq 0$

$$-\begin{cases} \dfrac{1}{a} + b = \dfrac{5}{4} \\ 2a^2 + b = \dfrac{9}{4} \end{cases}$$

$$2a^2 - \frac{1}{a} = 1 \quad | \cdot a \neq 0.$$

$$2a^3 - a - 1 = 0.$$

Заметим, что $a=1$ — корень; поделим на $(a-1)$ схемой Горнера:

	2	0	−1	−1
1	2	2	1	0

$$(a-1)(2a^2+2a+1) = 0$$

но $2a^2+2a+1 > 0$, т.к. $\left.\begin{array}{l} 2a^2>0 \\ 2a \geq 0 \\ 1>0. \end{array}\right| \Rightarrow$ их сумма >0.

211005348 (U290531 M1273332)

Чистовик №1 продолжение

Значит корень только один $a=1$ =>

=> $\frac{1}{1}+b=\frac{5}{4}$ => $b=\frac{1}{4}$.

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2y^2=\frac{1}{4}. \end{cases}$$

Пусть $x'=x^2$
$y'=y^2$

$$\begin{cases} x'+y'=1 \\ x'y'=\frac{1}{4} \end{cases}$$

Это теорема Виета.
Значит x' и y' – корни уравнения $t^2-t+\frac{1}{4}=0$ /·4

$4t^2-4t+1=0$.

$(2t-1)^2=0$.

$t=\frac{1}{2}$

⇓

$x'=y'=\frac{1}{2}$.

⇓

$x^2=y^2=\frac{1}{2}$. => $x=y=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$.

2

211005348 (U290531 M1273332)

Чистовик

№2.

~~Игра~~ Пусть коорд. узлов: $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ уже ~~этом~~: $x_1, y_1, y_2, x_2 \in \mathbb{Z}$

$x_1, y_1, y_2, x_2 \in [1; 62]$.

Тогда чтобы узлы не были на одной прямой $\parallel Ox$ или Oy; должно выполн: $\begin{cases} x_1 \neq x_2 \\ y_1 \neq y_2. \end{cases}$

Также чтобы выполн. условие должно быть верным одно из условий: $\begin{array}{l} y_1 = x_1 \\ y_1 = 63 - x_1 \\ y_2 = x_2 \\ y_2 = 63 - x_2 \end{array}$

Значит получается система:

$$\begin{cases} x_1 \neq x_2 \\ y_1 \neq y_2 \\ \left[\begin{array}{l} y_1 = x_1 \\ y_1 = 63 - x_1 \\ y_2 = x_2 \\ y_2 = 63 - x_2 \end{array}\right. \end{cases}$$

Давайте поочереди рассматривать x_i от
$(x_i \in [1; 62].)$

Тогда чтобы выполнялось условие $\left[\begin{array}{l} y_i = x_i \quad ① \\ y_i = 63 - x_i \quad ② \end{array}\right.$

~~[illegible]~~ ~~тогда~~ этот узел подходит и второй должен просто удовл. $\begin{cases} x_j \neq x_i \\ y_j \neq y_i \end{cases}$

3

211005348 (U290531 M1273332)

Чистовик № 2 продолжение

то есть $x_j \in [1; 62]$ кроме 1 значения

значит для x_j всего 61 вар.

аналогич. для y_j всего 61 вар.

получается вар-тов для пары $(x_j; y_j) = 61 \cdot 61$

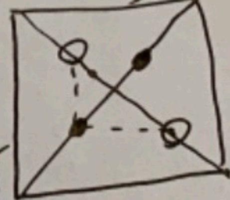
для x_i подходит два y_i $\rightarrow y_i = x_i$; $\rightarrow y_i = 63 - x_i$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ для x_i есть $2 \cdot 61^2$ вар-тов.

Также важно заметить, что прямые $y = x$ и $y = 63 - x$ пересекаются не в узле сетки $\left(x = \frac{63}{2}; y = \frac{63}{2}\right)$.

Значит всего вар-тов $62 \cdot 2 \cdot 61^2$, т.к. $x_i \in [1; 62]$.

НО! пары, где обе ~~прямые~~ пары точек удовлетв. условию (лежат на $y = x$ или $y = 63 - x$) мы посчитали 2 раза.



давайте найдём кол-во таких пар $= X$

для $(x_i; y_i)$ есть $(62 - 1) + (62 - 2)$ пары $(x_j; y_j)$

т.к. одна точка занята; две точки нельзя, т.к $\begin{cases} x_i \neq x_j \\ y_i \neq y_j \end{cases}$

4

Значит для одной пары $(x_i; y_i)$ есть 121 пара $(x_j; y_j)$

211005348 (U290531 M1273332)

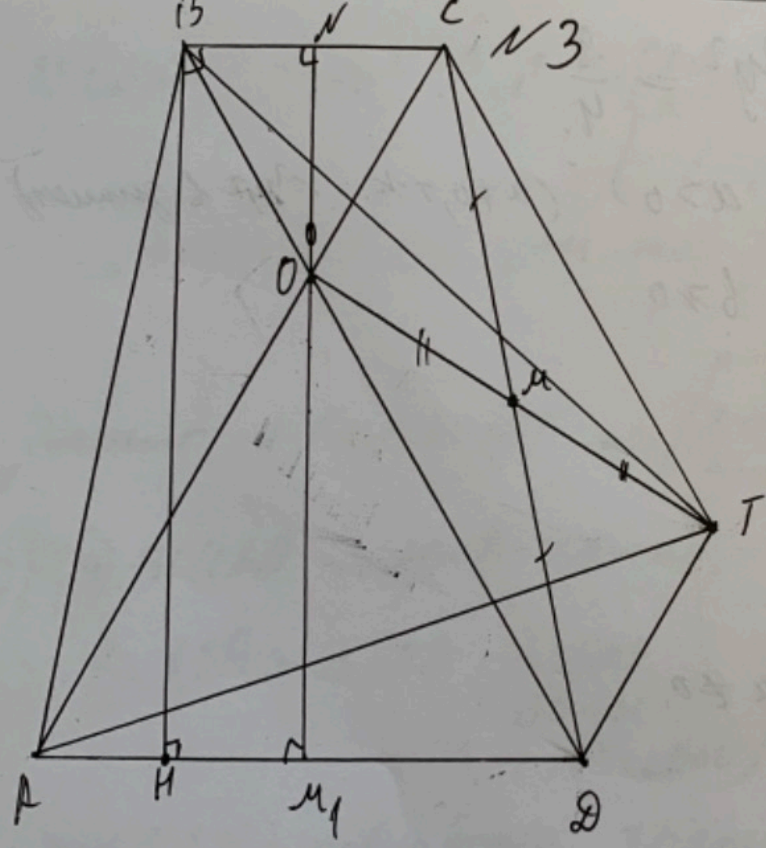
Чистовик №2 продолж.

Всего таких пар $(x_i; y_i) = 62+62 = 124$.
для каждой 121 пара $(x_j; y_j) \Rightarrow$

$\Rightarrow X = 124 \cdot 121$.

Получается ответ: $\boxed{2 \cdot 61^2 \cdot 62 - 121 \cdot 124}$.

№3



а) 1) т.к. $CM = MD$ и $OM = MT$ (M - серед CD), то $OCTD$ - параллелограмм. $\Rightarrow$

$\Rightarrow BO = OC = TD$.

$AO = OD = CT$

5

Чистовик №3 продолж.

$\angle BCO = 60° = \angle DAO \Rightarrow BC \parallel AD$

$\Rightarrow$

2) $\angle BOC = 60° \Rightarrow \angle BOA = 120°$, $\angle COD = 120° \Rightarrow \angle OCT = \angle ODT = 60°$, т.к параллелограм.

$\left.\begin{matrix}\angle ADO = 60° = \angle BCO \\ \angle OCT = \angle ODT = 60°\end{matrix}\right| \Rightarrow \angle ADT = \angle BCT = 120 = \angle BOA.$

3) $\triangle ADT = \triangle AOB$, т.к. $\begin{cases} AD = AO \\ DT = BO \\ \angle ADT = \angle AOB \end{cases} \Rightarrow AT = AB$

$\triangle AOB = \triangle TCB$ (ан-но) $\begin{pmatrix} BC = BO \\ AO = CT \\ \angle AOB = \angle BCT \end{pmatrix} \Rightarrow AB = BT$

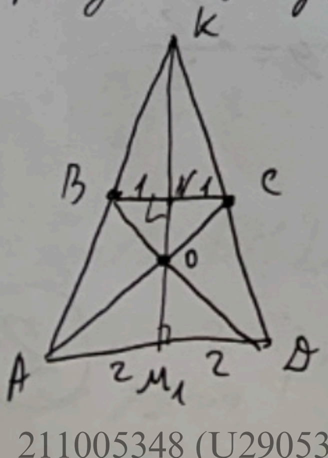
Значит $AT = AB = BT \Rightarrow$ $\boxed{ABT - \text{прав.}}$ /ч.т.д.

б) 4) $BC \parallel AD \Rightarrow ABCD$ - Трапец.

$\triangle AOB = \triangle COD$ $\begin{pmatrix} AO = OD \\ BO = OC \\ \angle AOB = \angle DOC \end{pmatrix} \Rightarrow AB = CD \Rightarrow$

$\Rightarrow ABCD$ - равнобокая трапеция.

Нарисуем отдельный рисунок.



M_1 - серед AD

N - серед BC.

~~пос~~ $K = AB \cap CD$.

по Th о 4-х (.) трапеции

(.) M_1, O, N, K - на одной прямой.

⑥

Чистовик №3 продолж.

т.к. трапец. - равнобокая, то $\angle BAD = \angle CDA \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle AKD$ - р/б. значит если KM_1 - медиана, то

$KM_1 \perp AD \Rightarrow KM_1 \perp BC$ ($AD \parallel BC$).

5) $\triangle AM_1K \sim \triangle BNK$, т.к. $AM_1 \parallel BN \Rightarrow \frac{BN}{AM} = \frac{KN}{KM_1} = \frac{1}{2}$

$KN + NM_1 = KM_1 = 2KN$

$NM_1 = KN$

Значит если $KM_1 = x$, то $NM_1 = x$

Значит $BK = \sqrt{1+x^2}$ по пифагору для $\triangle BNK$.

$\parallel$

$AB = \sqrt{1+x^2}$ из подобия $\triangle AM_1K$ и BNK.

$\parallel$

CD.

$$S_{ABCD} = \frac{BC+AD}{2} \cdot \frac{NM_1}{1} = \frac{2+4}{2} \cdot x = 3x.$$

6) Площадь р/ст равна $S = \frac{a\sqrt{3}}{4}$, где a - сторона $\triangle$.

Значит $S_{ABT} = \frac{\sqrt{1+x^2}\sqrt{3}}{4}$

$$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\sqrt{3+3x^2}}{4 \cdot 3x} = \sqrt{\frac{3+3x^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{3}{x^2}+3} \cdot \frac{1}{12}$$

7) Пусть $BH \perp AD$, тогда $BH = NM_1 = x$.

$BO = BC = 2$
$DO = AD = 4$ $\Big| \Rightarrow BD = 6$.

7

211005348 (U290531 M1273332)

Чистовик **№3 продолж**

$B_1N = HM_1$, т.к. $HBNM_1$ – прямоуг.

Значит $HD = HM_1 + M_1D = 1+2 = 3$.

$BH^2 + HD^2 = BD^2$

$x^2 + 3^2 = 6^2$

$x^2 = 36 - 9 = 27$

8) Значит $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \sqrt{\frac{3}{27} + 3} \cdot \frac{1}{12} =$

$= \sqrt{\frac{3+81}{27}} \cdot \frac{1}{12} = \boxed{\frac{\sqrt{84}}{36\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{28}}{36} = \frac{2\sqrt{7}}{36} =$

$= \boxed{\frac{\sqrt{7}}{18}}$

Ответ: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\sqrt{7}}{18}$.

8

Черновик

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \\ 2x^4 + 2y^4 + 5x^2y^2 = \frac{9}{4}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \\ 2(x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = \frac{9}{4}. \end{cases}$$

$x^2+y^2 = a, \quad a \geq 0$

$x^2y^2 = b, \quad b \geq 0.$

$$\begin{cases} \frac{1}{a} + b = \frac{5}{4} \\ 2a^2 + b = \frac{9}{4} \end{cases} \qquad b = \frac{5}{4} - \frac{1}{a}.$$

$2a^2 + \frac{5}{4} - \frac{1}{a} = \frac{9}{4}$

$2a^2 - \frac{1}{a} - 1 = 0. \quad | \cdot a \neq 0.$

$2a^3 - a - 1 = 0.$

$a = 1$ - кор.

	2	0	-1	-1
1	2	2	1	0.

$2a^2 + 2a + 1 = 0.$

$\frac{D}{4} = 1 - 1 \cdot 2 < 0.$

$a = 1.$

$b = \frac{5}{4}$

211005348 (U290531 M1273332)

Черновик

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \\ 2x^4 + 2y^4 + 5x^2y^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + \frac{x^2y^2(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \frac{5}{4} \\ 2(x^4+y^4+2x^2y^2) + x^2y^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1+x^4y^2+x^2y^4}{x^2+y^2} = \frac{5}{2} \\ 2(x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

$$5(x^2+y^2) = 4 + 4x^4y^4 + 4x^2y^4$$

$$8\left(5(x^2+y^2)\right)^2 + 100x^2y^2 = 225.$$

$$8\left(4+4x^4y^4+4x^2y^4\right)^2 + 100x^2y^2 = 225.$$

$32 \cdot 2^4.$

Черновик.

$x_1 = 1.$ → $y_1 \in [2; 61]$ → $y_1 = 62.$

$y_1 = 1$

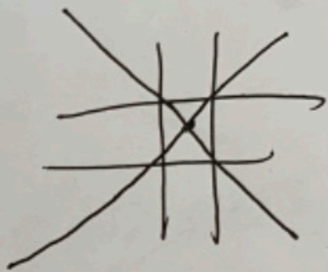
$x_2 \neq 1$ → x_2 - вар 61

$y_2 \neq 1$ $\quad y_2$ - вар 61

1 2 3

$61 \cdot 61 +$

$62 + 62 - 1 = 62 + 62 = 124.$



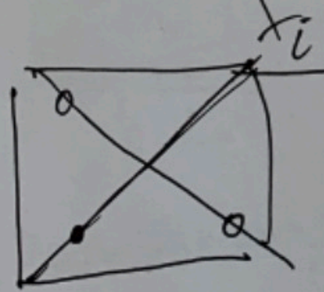
$x_i \neq$

$$\begin{cases} y = x \\ y = 63 - x \end{cases}$$

$x = 63 - x$

$2x = 63$

$x = \frac{63}{2}$



$y_i = x_i$ → $x_2 \neq x_i$ 61 вар

$y_2 \neq y_i$

$61 \cdot 61.$

$y_i = 63 - x_i$ →

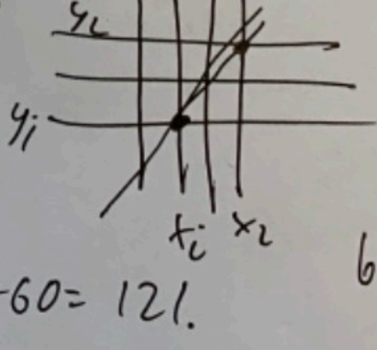
$61 \cdot 61.$

$\boxed{124 \cdot (2 \cdot 61 \cdot 61 - 124)}$

Весь

но есть одинак:

$(x_i; y_i)$



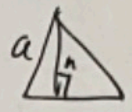
$61 + 60 = 121$

$62 - 1 + 62 - 2 = 61 + 60 = 121.$

211005348 (U290531 M1273332)

211005348 (U290531 M1273332)

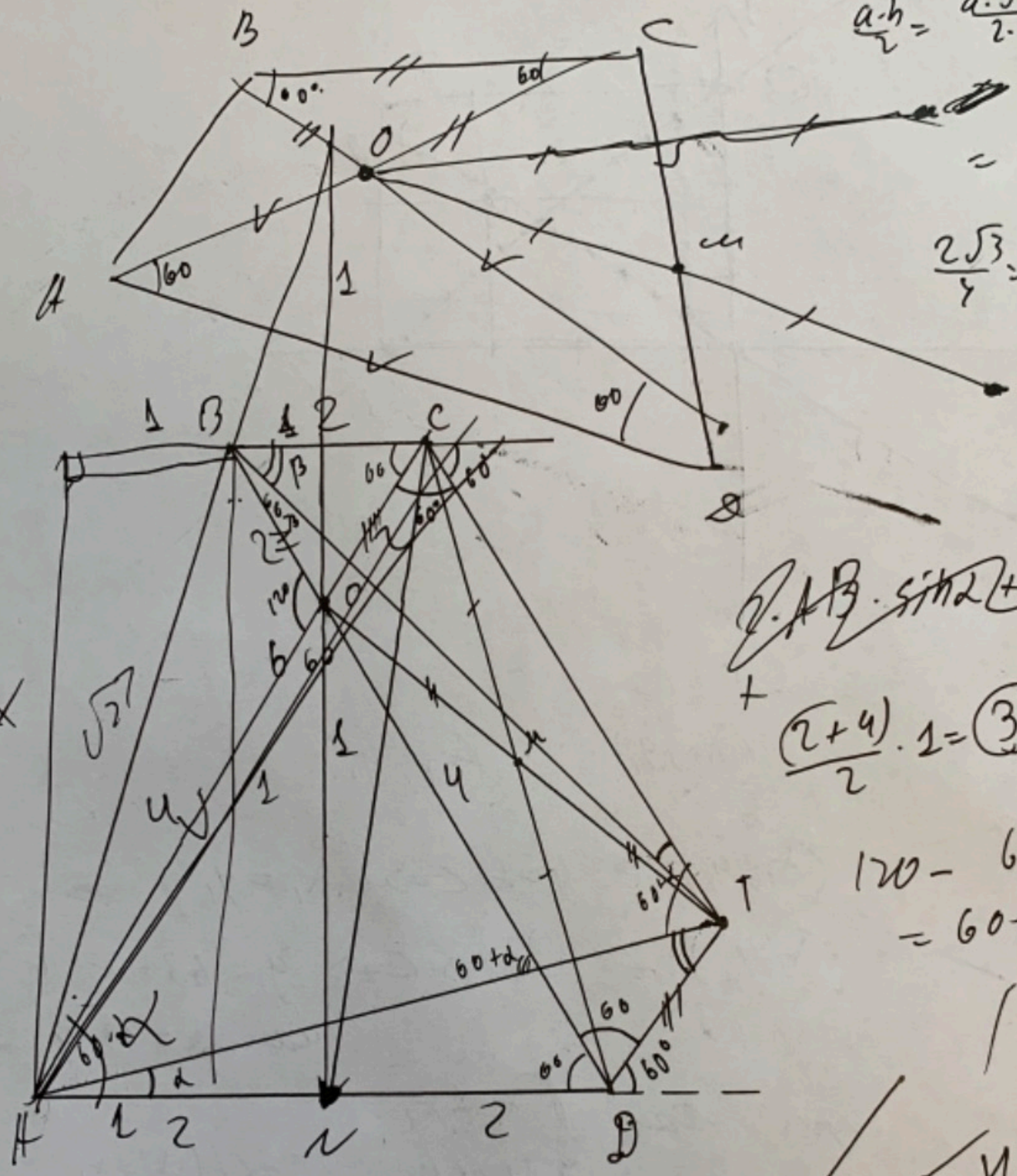
Черновик



$h = \frac{\sqrt{3}}{2} a.$

$\frac{a \cdot h}{2} = \frac{a \cdot \sqrt{3} a}{2 \cdot 2} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}.$

$\frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$



~~$2 \cdot AB \cdot \sin 2$~~

$\frac{(2+4)}{2} \cdot 1 = 3.$

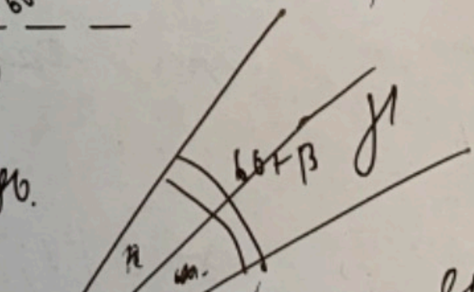
$120 - 60 - \alpha =$
$= 60 - \alpha.$

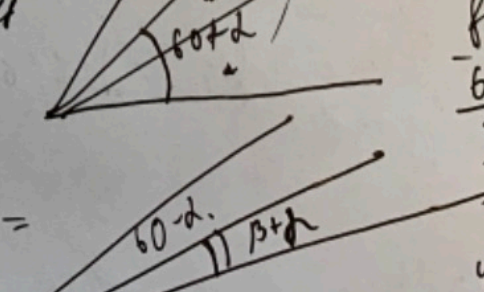
~~$\angle T: + 60 - \alpha +$~~

$\cdot + ; + 60 - \beta + 60 - \alpha + \gamma = 180.$

$60 + 60 + 60 + \gamma - \beta - \alpha = \ldots$

$\gamma = \beta + \gamma.$





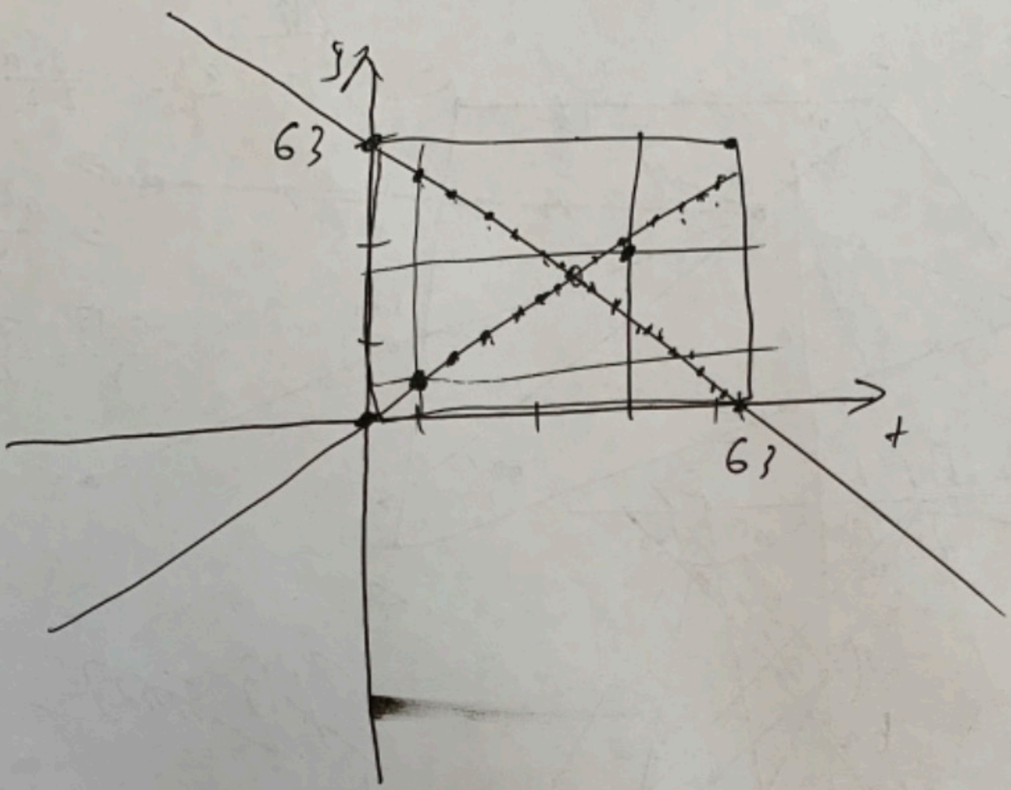
$60 - \alpha + \alpha + \beta + 60 - \beta =$
$= 120.$

$60 + \alpha - \beta - \alpha =$
$= 60 - \beta$

$\begin{array}{r|l} 84 & 3 \\ \underline{-6} & 28 \\ 24 & \\ \underline{-24} & \\ 0 & \end{array}$

$4 \cdot 7 = 28$

Черновик



$(x_1;y_1)$ $\quad$ $(x_2;y_2)$

$(x_1;y_1) \in y=x \Leftrightarrow x_1=y_1$

$(x_1;y_1) \in y=63-x \Leftrightarrow y_1=63-x$

или $x=63-y_1$

при этом $\begin{cases} x_1 \ne x_2 \\ y_1 \ne y_2 \end{cases}$

$$\begin{cases} \begin{cases} x_1 \ne x_2 \\ y_1 \ne y_2 \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} x_1 = y_1 \\ \cancel{y_1 = 63 - x_1} \; x_1+y_1=63 \\ x_2 = y_2 \\ x_2+y_2=63 \end{array} \right. \end{cases}$$

$x_1 \in [1;\ 62]$

$y_1 \in [1;62]$.

211005348 (U290531 M1273332)