Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211005332**

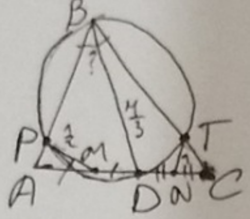
ID профиля: **276958**

Вариант 12

2

$$(3-2\sqrt{6})(14+4\sqrt{6})=22-8\sqrt{6}$$

$$52+12\sqrt{6}-28\sqrt{6}-\underbrace{8\cdot 6}_{\to 48}=22-8\sqrt{6}$$



$\cancel{\ }\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+3=2\sqrt{4+3x-x^2}$

$x+1\geq 0 \quad x\geq -1$

$4-x\geq 0 \quad x\leq 4$

$4+3x-x^2\geq 0 \quad x^2-3x-4\geq 0 \qquad x\in(-\infty;-1]\cup[4;+\infty)$

$D=9+16=5^2$

$x_{1,2}=\frac{3\pm 5}{2};\ x_1=4;\ x_2=-1$

$-1 \quad 4$

1

ОДЗ: $x\in\{1;4\}$

$x=1$: $\sqrt{2}-\sqrt{3}+3=2\sqrt{4+3-1}$

$\sqrt{2}-\sqrt{3}+3=2\sqrt{6}$ $\quad \sqrt{6}$

$\leq 4 \qquad \geq 4 \qquad \times$

$x=4$: $\sqrt{5}+3=2\sqrt{4+12-16}$ $\times$

$$\begin{cases} x+1\geq 0 \\ 4-x\geq 0 \\ 4+3x-x^2\geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x\geq -1 \\ x\leq 4 \\ (x-4)(x+1)\leq 0 \end{cases}$$

$+ \quad - \quad +$

$-1 \quad 4$

$\boxed{x\in[-1;4]}$

$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+3=2\sqrt{(4-x)(x+1)}$

$$\begin{cases} \sqrt{x+1}=p\geq 0 \\ \sqrt{4-x}=u\geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x+1=p^2 \\ 4-x=u^2 \end{cases}$$

$p-u+3=2pu$

$$\begin{cases} 5=p^2+u^2 \\ p-u+3=2pu \end{cases}; \quad p(2u-1)=3-u$$

$p=\frac{3-u}{2u-1}$

$5=\left(\frac{3-u}{2u-1}\right)^2+u^2; \quad 5=\frac{u^2-6u+9}{4u^2-4u+1}+u^2$

$20u^2-20u+5=u^2-6u+9+4u^4-4u^3+u^2$

$4u^4-4u^3-18u^2+14u+4=0$

$\boxed{u=1}$

$\sqrt{4}-\sqrt{1}+3=$

$=2\sqrt{4+\cancel{39}-9}$

$2-1+3=2\cdot 2$ ✓

$\boxed{u = 1+\frac{\sqrt6}{2};\ p = \frac{4-\sqrt6}{2(1+\sqrt6)}}$

$p - u + 3 = 2pu$

$$\frac{4-\sqrt6}{2(1+\sqrt6)} - 1 - \frac{\sqrt6}{2} + 3 = \frac{4-\sqrt6}{2(1+\sqrt6)} + 2 - \frac{\sqrt6}{2} =$$

$$= \frac{\cancel{4-\sqrt6}+\cancel{2}+\cancel{2\sqrt6}-\cancel{\sqrt6}-\cancel{6}}{2(1+\sqrt6)} = 0$$

~~[illegible]~~

$\cancel{x = p^2 - 1 = 4 - u^2}\ z_1$

$$\begin{cases} 2a^2 - 2ax - 6ay + x^2 + 2xy + 5y^2 = 0 \\ ax^2 + 4a^2x - ay + 4a^3 + 2 = 0 \end{cases}$$

т. A

пар. с верш. B.

$x + y = 3;\ y = 3 - x$

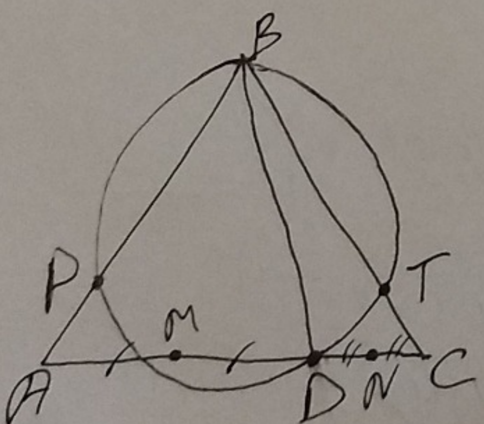
$\boxed{a \neq 0}$

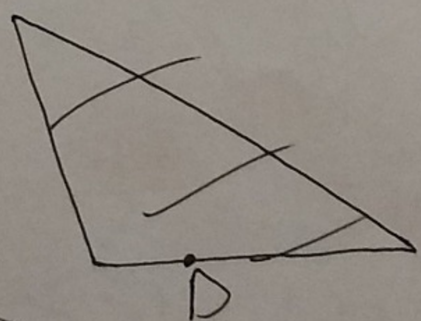
$y = x^2 + 4ax + 4a^2 + \frac{2}{a}$

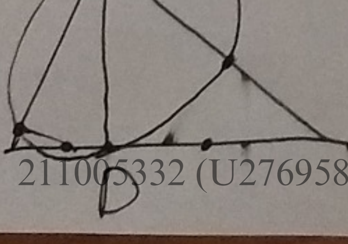
$\boxed{x_0 = \frac{-4a}{2} = -2a}$

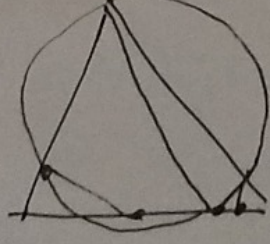
$4a^2 - 8a^2 + 4a^2 + \frac{2}{a} = \boxed{\frac{2}{a} = y_0}$

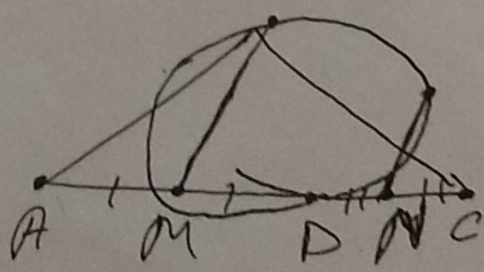
$(x_0, y_a) = (-2a; \frac{2}{a})$.







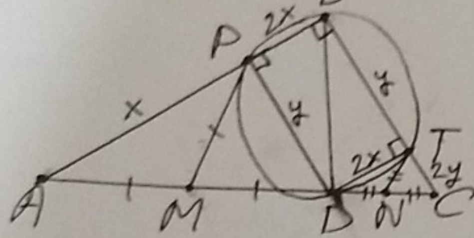




Чистовик.

Страница №3.

Задача №1.



а) $\angle BPD = \angle BTD = 90°$, т.к. они опираются на диаметр BD. Тогда $\triangle APD$ прямоугольный, PM — его медиана, проведённая из прямого угла $\Rightarrow PM = \frac{1}{2}AD = AM = MD$. Аналогично $TN = \frac{1}{2}DC = DN = NC$.

$\angle AMP = \angle ANT$ как соотв. углы при $PM \parallel TN$ и секущей AC. Поэтому $\triangle AMP \sim \triangle DNT$ по двум пропорциональным сторонам $\left(\frac{AM}{DN} = \frac{MP}{NT}\right)$ и равным углам между ними $\Longrightarrow \angle BAC = \angle TDC = \alpha$. Обозначим $\angle BCA = \beta$. Тогда $\angle ABC = 180° - \alpha - \beta$ (из $\triangle ABC$). Но из $\triangle DTC$: $\alpha + \beta = 90°$, поэтому $\angle ABC = 180° - 90° = 90°$.

б) Заметим, что $AC = 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 1 = 3$. $\triangle AMP \sim \triangle DNT$ (см. пункт а) с коэфф. подобия $k = \frac{AM}{NC} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$. Поэтому $\frac{AP}{DT} = \frac{1}{2}$; Пусть $AP = x$; тогда $DT = 2x$. Четырёхуг. PBTD — прямоугольник $\Rightarrow DT = PB = 2x$. $\triangle PMD \sim \triangle TNC$ по двум пропорц. сторонам $\left(\frac{MP}{NT} = \frac{MD}{NC}\right)$ и углу между ними ($\angle PMD = \angle TNC$ как соотв. углы при $PM \parallel TN$ и секущей AC) $\Longrightarrow \frac{PD}{TC} = \frac{PM}{TN} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$. Пусть $PD = y$, тогда $TC = 2y$. $PD = BT = y$ (т.к. PBTD прямоугольник). По теореме Пифагора для $\triangle ABC$: $AB^2 + BC^2 = AC^2$; $9x^2 + 9y^2 = 9$; $\boxed{x^2 + y^2 = 1}$. По теореме Пифагора для $\triangle BTD$: $BD^2 = BT^2 + TD^2$; $\boxed{\frac{16}{9} = y^2 + 4x^2}$. Подставим сюда $x^2 + y^2 = 1$. $\frac{16}{9} = y^2 + x^2 + 3x^2$; $\frac{16}{9} = 1 + 3x^2$; $3x^2 = \frac{7}{9}$; $x^2 = \frac{7}{27}$; $x = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{27}}$; Подставим $x^2 = \frac{7}{27}$ в $x^2 + y^2 = 1$. $\frac{7}{27} + y^2 = 1$; $y^2 = \frac{20}{27}$; $y = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{27}}$. $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot 3y = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{27}} \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{27}} = \frac{9}{2} \cdot \frac{\sqrt{7} \cdot 2\sqrt{5}}{27} = \frac{\sqrt{35}}{3}$.

Ответ: а) $\angle ABC = 90°$; б) $S_{ABC} = \frac{\sqrt{35}}{3}$.

211005332 (U276958 M1273976)

Чистовик.

Страница №2.

Продолжение решения задачи №2.

Решая квадратное ур-е $4u^2-8u-2=0$ получаем: $u=1\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$. Заметим, что $1-\frac{\sqrt{6}}{2}<0$, т.к. $\sqrt{6}>2$. Но из (*) $u\geq 0$. Поэтому остаётся только $u=1+\frac{\sqrt{6}}{2}$.

$$\left[\begin{array}{l} u=1 \\ u=-2 \text{ не удовл. усл. } u\geq 0. \\ u=1+\frac{\sqrt{6}}{2} \end{array}\right.$$

При $u=1$ из (*) находим: $4-x=1 \Leftrightarrow x=3$. Заметим, что в решении мы только переходили к следствию, значит мы могли получить лишние корни, но потерять корни мы не могли. Проверим, что $x=3$ – корень исходного уравнения:

$$\sqrt{3+1}-\sqrt{4-3}+3=2\sqrt{4+3\cdot 3-3^2} \Leftrightarrow 2-1+3=2\sqrt{4} \text{ верно.}$$

При $u=1+\frac{\sqrt{6}}{2}$ получаем: $p=\frac{3-u}{2u-1}=\frac{3-1-\frac{\sqrt{6}}{2}}{2+\sqrt{6}-1}$.

Знаменатель получившейся дроби положителен, а числитель $3-1-\frac{\sqrt{6}}{2}=2-\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{4-\sqrt{6}}{2}$ тоже положителен, значит, $p\geq 0$. При этом условия ~~…~~ $\begin{cases} x+1=p^2 \\ 4-x=u^2 \end{cases}$ гарантируют выполнение ОДЗ, а уравнение $p-u+3=2pu$, которое выполняется при $(u,p)=\left(1+\frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{2-\frac{\sqrt{6}}{2}}{1+\sqrt{6}}\right)$, что следует из решения, равносильно исходному. Также условия $u\geq 0$ и $p\geq 0$ выполняются, значит данные значения u и p нам подходят. Найдём x.

$$x=4-u^2=4-\left(1+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2=4-1-\sqrt{6}-\frac{6}{4}=1{,}5-\sqrt{6}.$$

Ответ: $x=3$ и $x=1{,}5-\sqrt{6}$.

Чистовик.

Страница №1.

Задача №2.

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+3=2\sqrt{4+3x-x^2}$$

ОДЗ: $\begin{cases}x+1\geq 0\\ 4-x\geq 0\\ 4+3x-x^2\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq -1\\ x\leq 4\\ (x-4)(x+1)\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq -1\\ x\leq 4\\ x\in[-1;4]\end{cases}\Leftrightarrow x\in[-1;4]$

Заметим, что $4+3x-x^2=(4-x)(x+1)$. Сделаем замены $\begin{cases}\sqrt{x+1}=p,\ p\geq 0\\ \sqrt{4-x}=u,\ u\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+1=p^2;\ p\geq 0\\ 4-x=u^2;\ u\geq 0\end{cases}$ (*).

Наше уравнение принимает вид:

$p-u+3=2pu\Leftrightarrow p(2u-1)=3-u\Leftrightarrow p=\frac{3-u}{2u-1}$.

(Заметим, что $2u-1\neq 0$, иначе $3-u=0$, чего не может быть)

Из (*): $p^2+u^2=5$.

Подставим $p=\frac{3-u}{2u-1}$ в (*):

$\left(\frac{3-u}{2u-1}\right)^2+u^2=5\Leftrightarrow\frac{u^2-6u+9}{4u^2-4u+1}+u^2=5\Leftrightarrow u^2-6u+9+4u^4-$

$-4u^3+u^2=20u^2-20u+1\Leftrightarrow 4u^4-4u^3-18u^2+14u+4=0$

Заметим, что $u=1$ — корень

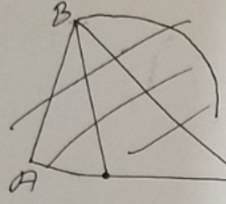
$$\begin{array}{l|l}
4u^4-4u^3-18u^2+14u+4 & u-1\\
\underline{4u^4-4u^3} & 4u^3-18u-4\\
\quad -18u^2+14u & \\
\quad \underline{-18u^2+18u} & \\
\qquad -4u+4 & \\
\qquad \underline{-4u+4} & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

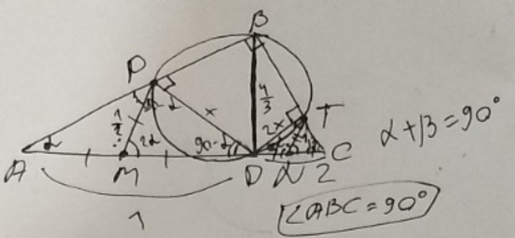
$(u-1)(4u^3-18u-4)=0$. Заметим, что $u=-2$ — корень

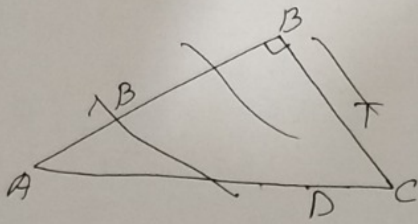
$$\begin{array}{l|l}
4u^3-18u-4 & u+2\\
\underline{4u^3+8u^2} & 4u^2-8u-2\\
\quad -8u^2-18u & \\
\quad \underline{-8u^2-16u} & \\
\qquad -2u-4 & \\
\qquad \underline{-2u-4} & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

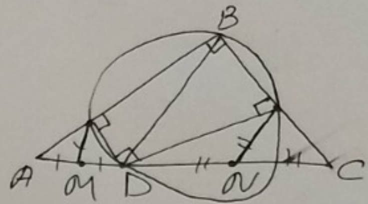
$(u-1)(u+2)(4u^2-8u-2)=0$.

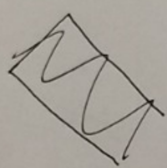
211005332 (U276958 M1273976)











$AP = x$

$DT = 2x = PB$

$PD = y = BT$

$TC = 2y$

$\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}\cdot\frac{\sqrt{7}\cdot\cancel{2}\sqrt{5}}{\cancel{2}\cdot 3} = \frac{\sqrt{35}}{3}$

$\begin{cases} x+1 = p^2 \\ 4-x = u^2 \end{cases}$

$\boxed{u = 1+\frac{\sqrt{6}}{2}}$

$p-u+3 = 2pu$ ✓

$p = \frac{3-u}{2u-1} = \frac{3-1-\frac{\sqrt6}{2}}{2+\sqrt6-1} = \boxed{\frac{2-\frac{\sqrt6}{2}}{1+\sqrt6}} = \frac{4-\sqrt6}{2+2\sqrt6}$

$x = p^2-1 = \cancel{\ldots}$

$x = \frac{16-8\sqrt6+6}{4+8\sqrt6+24} = \frac{22-8\sqrt6}{28+8\sqrt6}$

$x = 4-u^2 = 4-1-\sqrt6-\frac{3}{2} =$

$= 1,5-\sqrt6$

$9x^2+9y^2 = 9$

$\boxed{x^2+y^2 = 1}$

$\boxed{x^2+4y^2 = \frac{16}{9}}$

$3y^2+1 = \frac{16}{9}$

$3y^2 = \frac{7}{9}$

$y = \sqrt{\frac{7}{27}} = \frac{\sqrt7}{3\sqrt3}$

$(1,5-\sqrt6)(28+8\sqrt6) = 22-8\sqrt6$

$$4u^4-4u^3-18u^2+14u+4 \;\big|\; u-1$$
$$-\,(4u^4-4u^3) \qquad \boxed{4u^3-18u-4}$$
$$-18u^2+14u$$
$$-\,(-18u^2+18u)$$
$$-4u+4$$
$$-\,(-4u+4)$$
$$0$$

$$2u^3-9u-2=0$$

$$\boxed{u=-2}$$

$$2u^3-9u-2 \;\big|\; u+2$$
$$-\,(2u^3+4u^2) \qquad 2u^2-4u-1$$
$$-4u^2-9u$$
$$-\,(-4u^2-8u)$$
$$-u-2$$
$$-\,(-u-2)$$
$$0$$

$$2u^2-4u-1=0$$
$$D=16+8=24$$
$$u_{1,2}=\frac{4\pm2\sqrt{6}}{4}=$$
$$=1\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\boxed{1+\frac{\sqrt{6}}{2}}$$

$$u=1;\quad u=1+\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$p=\frac{3-1}{2-1}=\frac{2}{1}=2;\quad p=\frac{3-\cancel{1}1-\frac{\sqrt{6}}{2}}{2+\sqrt{6}-1}<0$$

$$\boxed{u=1}\;\boxed{p=2} \qquad 2-\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\begin{cases}x+1=4\\4-x=1\end{cases}\quad\begin{cases}x=3\\x=3\end{cases}\in ОДЗ.$$

$$u=1+\frac{\sqrt{6}}{2};\; p=\frac{2-\frac{\sqrt{6}}{2}}{1+\sqrt{6}}=$$

$$=\underbrace{\frac{4-\sqrt{6}}{2+2\sqrt{6}}}$$

$$\frac{4-\sqrt{6}}{2+\sqrt{6}}-1-\frac{\sqrt{6}}{2}+3=\cancel{2}\cdot\frac{4-\sqrt{6}}{\cancel{2}+\cancel{2}\sqrt{6}}\cdot\left(1+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$$

$$\frac{4-\sqrt{6}}{2+\sqrt{6}}-\frac{\sqrt{6}}{2}+2=\frac{(4-\sqrt{6})(2+\sqrt{6})}{2(1+\sqrt{6})}$$

$$\overline{\quad 2+\sqrt{6}\quad}$$

$$\boxed{u=1+\frac{\sqrt{6}}{2};\; p=\frac{4-\sqrt{6}}{2+2\sqrt{6}}}$$

$$4-x=\left(\frac{2+\sqrt{6}}{2}\right)^2=\frac{4+4\sqrt{6}+6}{4}=\frac{10+4\sqrt{6}}{4}=\frac{5+2\sqrt{6}}{2}$$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211005332**

ID профиля: **276958**

Вариант 12

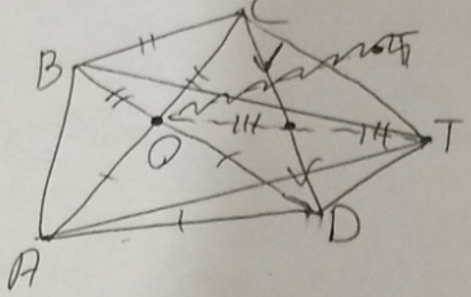
$124(62^2-122)-123\cdot 62=$

$=62(2(62^2-122)-123)=$

$=62(2\cdot 62^2-2\cdot 122-123)$

$$\begin{array}{r} 244 \\ +\,123 \\ \hline 367 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 62 \\ \times\,62 \\ \hline 124 \\ +\,372 \\ \hline 3844 \\ \times\,2 \\ \hline 7688 \\ -\,367 \\ \hline 7321 \\ \times\,62 \\ \hline 14642 \\ +\,43926 \\ \hline 453902 \end{array}$$



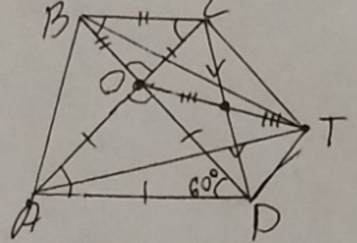
$$(x^2+y^2)^2=x^4+2x^2y^2+y^4$$

$$\begin{cases}x^2+y^2=a\neq 0\\ x^2y^2=b\end{cases}$$

$$\Rightarrow x^4+y^4=a^2-2b$$

$$\begin{cases}\frac{1}{a}+b=\frac{5}{4}\\ 2(a^2-2b)+5b=\frac{9}{4}\end{cases}$$

$$2a^2+b=\frac{9}{4}$$



$$\begin{cases}\frac{1}{a}+b=\frac{5}{4} & (1)\\ 2a^2+b=\frac{9}{4} & (2)\end{cases}$$

$$(2)-(1): 2a^2-\frac{1}{a}=1$$

$$2a^3-1=a$$

$$2a^3-a-1=0$$

$$\boxed{a=1}$$

$$\begin{array}{r|l} 2a^3-a-1 & a-1 \\ \hline -(2a^3-2a^2) & 2a^2+2a+1 \\ 2a^2-a & \\ -(2a^2-2a) & \\ a-1 & \\ -(a-1) & \\ 0 & \end{array}$$

$$2a^2+2a+1=0$$

$$D=4-8<0$$

$$2+b=\frac{9}{4}$$

$$b=\frac{5}{4}-1=\frac{1}{4}$$

$$\boxed{a=1;\ b=\frac{1}{4}}$$

$$\boxed{\cancel{y^2=2}\ ?!}\quad \boxed{\cancel{x^2=\frac{4}{5}}\quad \cancel{x^4=\frac{9}{8}}}$$

$$\begin{cases}x^2+y^2=1\\ x^2y^2=\frac{1}{4}\end{cases}$$

$$x^2=\frac{1}{4y^2};$$

$$x^2=\frac{1}{4y^2}=\frac{1}{4\cdot\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{1}{4y^2}+y^2=1$$

$$1+4y^4=4y^2$$

$$4y^4-4y^2+1=0$$

$$\cancel{4t^2-4t+1=0}$$

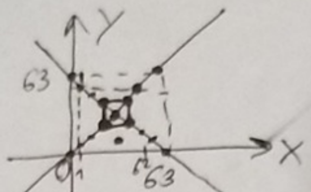
$$(2y^2-1)^2=0$$

$$2y^2=1;\ y^2=\frac{1}{2};\ y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$124(62^2-1)-123\cdot 62-124\cdot 121=$$

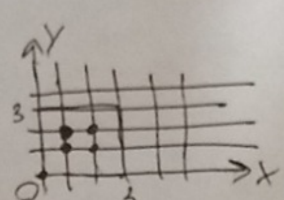
$$=124(62^2-122)-123\cdot 62=\cancel{62(124\cdot 60-123)}$$

$$\cancel{=124\cdot 62(62-2)-123\cdot 62=}$$



$62+62-1=124-1=123$ вар. выбрать ~~первый~~ лежащий на диаг. узел

~~Итог~~



62^2 точек внутри квадрата

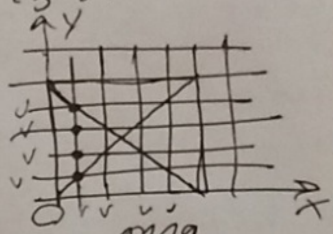
$\cancel{3^2-(3+3-1)=9-5=4}$

$2^2-(2+2-1)=$
$=1$

~~$62^2-62=62\cdot61$ вар. для выбора 2-го узла.~~
~~но мы посч. дважды что-то~~

~~$C_{123}^2=\frac{123\cdot122}{2}$ мы посч. дважды~~

~~$123\cdot62\cdot61-123\cdot61=123\cdot61\cdot61=123\cdot61^2$~~



~~$2\cdot62\cdot61+62\cdot61$ посч. дважды~~
~~$3\cdot62\cdot61$~~

~~Итог~~

$\cancel{123\cdot62\cdot61}-3\cdot62\cdot61=120\cdot62\cdot61$

$3+3-1=5$

$2C_{62}^2=\frac{62\cdot61}{2}\cdot2=62\cdot61$

$62^2-(62+62-1)=62^2-123$

$x=63-x$
$2x=63$
$x=31,5$

~~122~~ $\frac{122\cdot2}{2}=122$ способа, ~~Итог~~ уполовинать

~~$123\cdot(62^2-1)$~~

~~всего способов~~

$123\cdot(62^2-1)-123\cdot61-122=123\cdot61\cdot63-121\cdot61-122=$
$=121\cdot61\cdot62-61\cdot2=$
$=61(121\cdot62-2)$

$\frac{123\cdot122}{2}=123\cdot61$ обе на диаг.

~~$\frac{123\cdot122}{2}$~~ $C_{123}^2=\frac{123\cdot122}{2}$

$x=1$ $61+61-1=$
$=121$

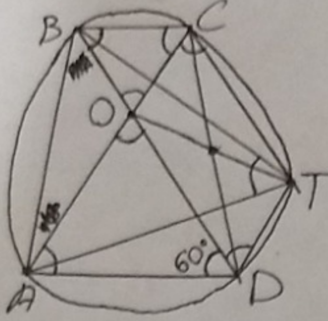
$61\cdot122\cdot2=122^2$

$121\cdot61+61=61\cdot122$

Чистовик

Страница №4.

Задача №6.



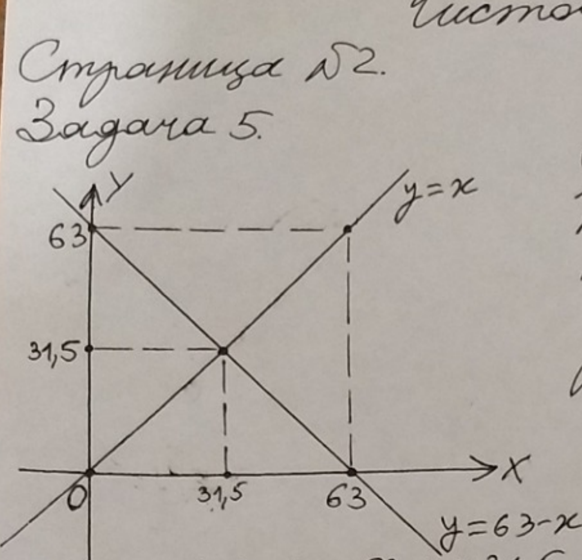
т.к. треугольники BOC и AOD равносторонние, то все их углы по 60°: ∠BCA = ∠CAD ⇒ AD ∥ BC (ABCD – трапеция). (накр. леж. углы).

∠BCA = ∠BDA ⇒ ABCD – вписанный. Хорды AB и CD опираются на равные вписанные углы, поэтому AB = CD. Более того, данная окружность пройдёт также через точку T. Тогда ∠BCA = ∠BTA (опираются на AB) = 60°. ∠ABT = ∠ACT = 60°; ∠BAT = ∠BDT = 60°. Итак, в △ABT все углы равны 60°, поэтому он равносторонний.

Чистовик.

Страница №2.

Задача 5.



Вначале посчитаем количество способов выбрать два узла так, чтобы хотя бы один из них лежал на прямой $y=x$ или $y=63-x$. Внутри квадрата на этих прямых в сумме $62+62=124$ узла ~~(узел пересечения прямых был посчитан дважды при $62+62$, поэтому вычитаем 1)~~.

$x=63-x$; $2x=63$; $x=31{,}5$, то есть точка пересеч. прямых $y=x$ и $y=63-x$ имеет нецелочисленные координаты.

Итак, выбрать узел на одной из этих двух прямых можно 124 способами. Второй узел можно выбрать произвольно — (62^2-1) вариант. Однако число $124(62^2-1)$ считает дважды кол-во вариантов, когда оба узла на прямых $y=x$ или $y=63-x$. Посчитаем кол-во таких вариантов. Оно равно $C_{124}^2=\frac{123\cdot124}{2}=123\cdot62$.

Значит, $124(62^2-1)-123\cdot62$ — количество вариантов, когда хотя бы один из узлов на прямой $y=x$ или $y=63-x$. Теперь поймём какие из данных вариантов нам не подходят в силу того, что узлы лежат на прямой, параллельной Ox или Oy. Пусть узлы лежат на прямой $x=1$. Если один из них $(1;62)$, то второй может быть $(1;1), (1;2), \ldots, (1;61)$ — 61 вариант. Если один из них $(1;1)$, то тоже 61 вариант. Но вариант, когда координаты узлов $(1;1)$ и $(61;61)$ мы посчитали дважды, поэтому вариантов, когда оба узла лежат на прямой $x=1$ и один из них лежит на прямой $y=x$ или $y=63-x$ $61+61-1=122-1=121$. Аналогично для прямых $x=2, x=3, \ldots, x=62, y=1, y=2, \ldots, y=62$ получаем 121 вариант. Всего этих прямых $62+62=124$. Значит, из вариантов, которых $124(62^2-1)-123\cdot62$ нам не подходит $124\cdot121$ (в силу того, что два узла лежат на прямой, параллельной оси координат). Получаем итоговое количество вариантов: $124(62^2-1)-123\cdot62-124\cdot121=$
$=124(62^2-1-121)-123\cdot62=124(62^2-122)-123\cdot62=$

Чистовик.

Страница №1.

Задача №4.

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

Сделаем замены $\begin{cases} x^2+y^2=a, \ a\neq 0. \\ x^2y^2 = b \end{cases}$ Тогда

$(x^2+y^2)^2 = x^4+2x^2y^2+y^4 \Leftrightarrow x^4+y^4 = (x^2+y^2)^2 - 2x^2y^2 = a^2-2b.$

Подставим полученные выражения в систему.

$$\begin{cases} \frac{1}{a} + b = \frac{5}{4} \\ 2(a^2-2b)+5b = \frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a}+b=\frac{5}{4} & (2) \\ 2a^2+b = \frac{9}{4} & (1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 - \frac{1}{a} = 1 & (*) \\ \frac{1}{a} + b = \frac{5}{4} & (3) \end{cases}$$

(*) получено как (1) − (2). Решим (*).

$2a^2 - \frac{1}{a} = 1; \ 2a^3 - 1 = a; \ 2a^3 - a - 1 = 0$

Заметим, что $a=1$ — корень.

$$\begin{array}{r|l} 2a^3-a-1 & a-1 \\ \underline{2a^3-2a^2} & 2a^2+2a+1 \\ 2a^2-a & \\ \underline{2a^2-2a} & \\ a-1 & \\ \underline{a-1} & \\ 0 & \end{array}$$

$(a-1)(2a^2+2a+1)=0$

$2a^2+2a+1=0$ не имеет решений, т.к. $D=4-2\cdot 4=-4<0$.

Значит, $\boxed{a=1}$ (только это значение a является решением (*)). Подставим в (3). $\frac{1}{1} + b = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \boxed{b=\frac{1}{4}}$.

Вернёмся к замене. $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2y^2=\frac{1}{4} \end{cases}$. Заметим, что $y^2=0$ не является решением системы, так как тогда $\begin{cases} x^2=1 \\ x^2=\frac{1}{4} \end{cases}$. Поэтому можно записать $x^2 = \frac{1}{4y^2}$ и подставить в первое уравнение полученной системы. $\frac{1}{4y^2} + y^2 = 1$.

$1+4y^4 = 4y^2; \ 4y^4-4y^2+1=0; \ (2y^2-1)^2=0; \ 2y^2-1=0; \ y^2=\frac{1}{2}.$

Значит, $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ или $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. И при том, и при другом значении y получаем: $x^2 = \frac{1}{4\cdot\frac{1}{2}}$; $x^2=\frac{1}{2}$; $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ или $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Чистовик.

Страница №3.

Продолжение решения задачи №5.

$= 62(2\cdot 62^2 - 244 - 123) = 453902.$

$$
\begin{array}{r}
\times\; 62 \\
62 \\
\hline
+\; 124 \\
372 \\
\hline
\times\; 3844 \\
2 \\
\hline
-\; 7688 \\
367 \\
\hline
\times\; 7321 \\
62 \\
\hline
+\; 14642 \\
43926 \\
\hline
453902
\end{array}
$$

Ответ: 453902.