Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211005314**

ID профиля: **169069**

Вариант 12

Черновик

96 48 24 12 6 3

192 $2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2$

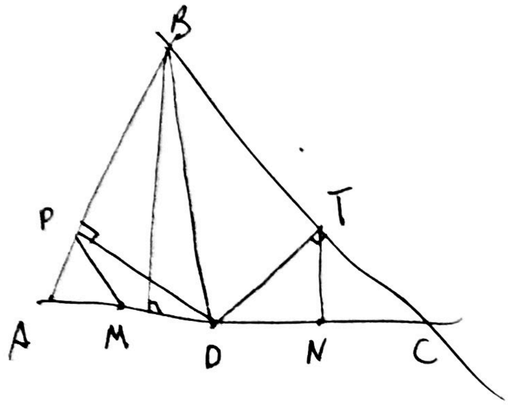
384 $1-2+3=2\cdot2$

12^8

$144+240$

$(x+1)(4-x)$

$2+1+3$ 4 4



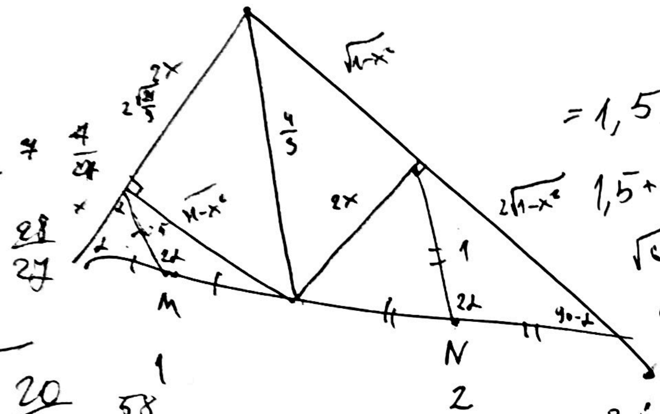
$\dfrac{12\pm\sqrt{384}}{8}=$

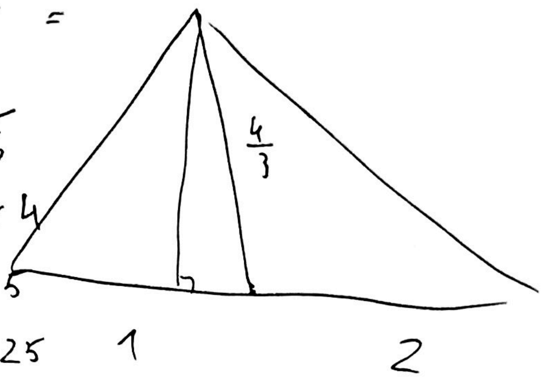
$=1{,}5\pm\sqrt{6}$

$1{,}5+\sqrt{6}<4$

$\sqrt{6}<2{,}5$

$6<6{,}25$





$\frac{4}{27}$ $\frac{28}{27}$ $\frac{20}{27}$ 58

$9x^2+9-9x^2=9$

$2a^2-6ay+5y^2=9x^2+1-x^2=\frac{4}{3}$

$6a^2$

$3x^2=\frac{1}{3}$

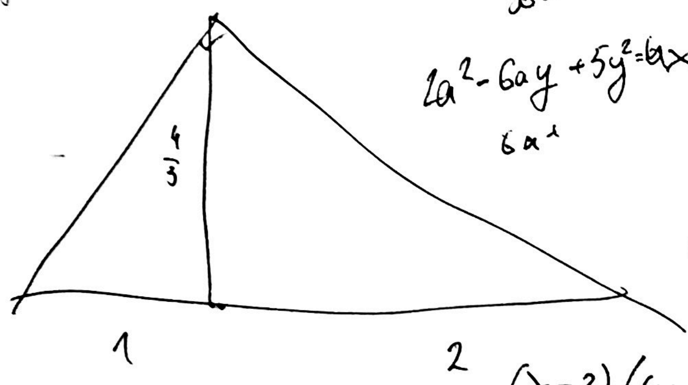
$x=\frac{1}{3}$

$\frac{8}{27}$

$x^2-3x-3{,}75=0$

$4x^2-12x-15=0$

$x^2-3x+2{,}25-6=0$



$4x^3-24x^2+21x+45=0$

$108-216+63+45=0$

$(x-3)(4x^2-12x-15)=0$

$x+1+4+x-2\sqrt{4+3x-x^2}=4(4+3x-x^2)-12\sqrt{\ldots}+9$

$9-\frac{21}{\ldots}=\frac{60}{9}$

$2x-3+10\sqrt{\ldots}=16+12x-4x^2+9$

$10\sqrt{\ldots}=28+10x-4x^2$

$5\sqrt{\ldots}=14+5x-2x^2$

$\frac{20}{27}$

$\sqrt{\frac{20}{3}}=\frac{\sqrt{60}}{3}=\frac{2\sqrt{15}}{3}$

$324-540-54+195+96$

$100+75x-25x^2=196+25x^2+4x^4+140x-20x^3-56x^2$

$=4x^4-20x^3-6x^2+65x+96$

$1024-1280=$

$=-256-$

$2^{10}-5\cdot2^8-3\cdot2^5+65\cdot2^2+96$

$-2^8-3\cdot2^5$

$4\cdot81-20\cdot27-$

$\sqrt{2{,}5-\sqrt{6}}-\sqrt{2{,}5+\sqrt{6}}+3=2\sqrt{0{,}25}=1$

$2{,}5+2{,}5-\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}-2\sqrt{0{,}25}=4$

Черновик

$2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0$ $(x+y)^2+(2y-a)^2+a^2-2ax-2ay$

$x^2+4ax+4a^2+2=y$ $(0,5x+2y-2a$

$-\frac{6}{2a}=-2a$ $-4a^2$ $(ax+by+ca_1)$

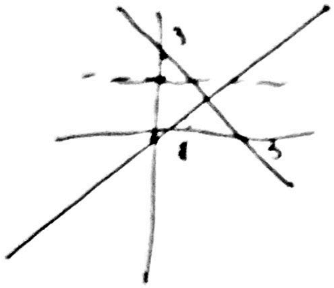
$ab=1$ $abc=\sqrt{3}$

$B=(-2a;\ 2)$ $ac=-1$

$a\geq -\frac{1}{2}$ $\frac{1}{}\ bc=-3$

$-2a\leq 1$ $a\leq -\frac{1}{2}$ $a=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

$-2a\geq$



$b=-\sqrt{3}$

$c=\sqrt{3}$

$(-\frac{\sqrt{3}}{})$

$-2a+\frac{2}{a}=3$

$-2a^2-3a+2=0$

$(ax+by)^2+(cx-da_1)^2+(ey-fa_1)^2$ $\frac{3\pm\sqrt{9+8}}{-4}$

$ab=1$ $cd=1$ $ef=3$

$d^2+f^2\leq 2$ $e=2$ $f=\frac{3}{2}$

$a^2+c^2\leq 1$

$b^2+e^2\leq 5$ $ef=3$ $e=\frac{3}{f}$

$2a^2-2a(3-y)$ $f^2\leq 2$ $f^2<2$

$2a^2-6a+2ay-6ay+9-6y+y^2+6y-2y^2+5y^2=0$ $e^2\leq 5$ $1{,}8$

$4y^2-4ay+2a^2-6a+9=0$

$16a^2-32a^2+96a-128<0$

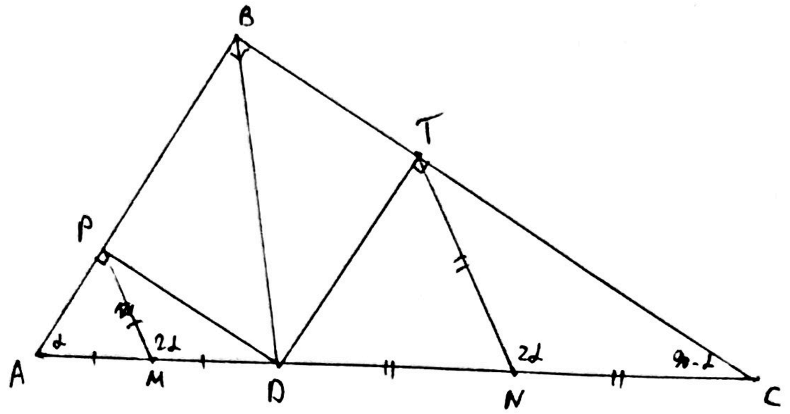
$-16a^2+96a-128<0$

$a^2-6a+8>0$

$a\in$

Чистовик

Задача 1



а) Опустим перпендикуляры из D на AB и BC соответственно. Пусть их основания — H_A, H_C. Докажем, что $H_A = P$; $H_C = T$.

Заметим, что окружность, построенная на BD как на диаметре будет проходить через H_A, H_C, т.к. $\cancel{\angle BTD = \angle BPD = 90^\circ}$ $\angle BH_AD = \angle BH_CD = 90^\circ$.
Значит, т.к. окружность пересекает прямую максимум в 2 точках, то $P = H_A$; $T = H_C$.

Значит, $AM = MD = PM$ и $DN = NC = TN$, т.к. медиана из прямого угла равна половине гипотенузы.

Пусть $\angle BAC = \alpha$, тогда $\angle APM = \alpha$, т.к. $AM = MP$, значит $\angle PMD = 2\alpha$. Т.к. $PM \parallel TN$, то $\angle TNC = 2\alpha \Rightarrow$ $\angle NTC = \angle NCT = 90 - \alpha = \angle BCA$. Поэтому, $\angle ABC = 180^\circ - (\angle BAC + \angle BCA) =$ $= 90^\circ$

б) $MP = AM = MD = \frac{1}{2} \Rightarrow AD = 1$;
$NT = DN = NC = 1 \Rightarrow DC = 2$
$BD = \frac{4}{3}$

Пусть $AP = x$. Тогда, $PD = \sqrt{1-x^2}$

Т.к. $PD \parallel BC$ ($PD \perp AB$ и $BC \perp AB$), то

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AP}{PB}$$

Значит,

$$\frac{AP}{PB} = \frac{1}{2}$$

$$PB = 2x$$

Т.к. $PD \perp PB$, то

$$BD^2 = PB^2 + PD^2$$

$$4x^2 + \left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2$$

$$4x^2 + 1 - x^2 = \frac{16}{9}$$

$$3x^2 = \frac{7}{9}$$

$$x = \frac{\sqrt{21}}{9}$$

Тогда, $AB = 3x = \frac{\sqrt{21}}{3}$; $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{9 - \frac{21}{9}} = \sqrt{\frac{60}{9}} = \frac{2\sqrt{15}}{3}$

Значит, $S_{ABC} = AB \cdot BC \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{35}}{3}$

Ответ: а) $\angle ABC = 90°$; б) $S_{ABC} = \frac{\sqrt{35}}{3}$

Задача 2

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$; $x+1 \geq 0$; $4-x \geq 0$;

$4+3x-x^2 \geq 0$

$\Updownarrow$

$x \in [-1; 4]$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} = 2\sqrt{4+3x-x^2} - 3$$

$$\Downarrow$$

$$x+1+4-x-2\sqrt{4+3x-x^2} = 16+12x-4x^2-12\sqrt{4+3x-x^2}+9$$

$$10\sqrt{4+3x-x^2} = 20+12x-4x^2$$

$$\Downarrow$$

$$(10\sqrt{4+3x-x^2})^2 = (20+12x-4x^2)^2$$

$$(5\sqrt{4+3x-x^2})^2 = (10+6x-2x^2)^2$$

$$100+75x-25x^2 = 100+36x^2+4x^4+120x-40x^2-24x^3$$

$$4x^4-24x^3+21x^2+45x=0$$

$$x(x-3)(4x^2-12x-15)=0$$

$$x(x-3)(x-1{,}5-\sqrt{6})(x-1{,}5+\sqrt{6})=0$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \\ x=1{,}5-\sqrt{6} \\ x=1{,}5+\sqrt{6} \end{array}\right.$$

Подставим в начальное уравнение:

$x=0$: $\sqrt{1} - \sqrt{4} + 3 = 2\sqrt{4}$ => $x=0$ - посторонний корень

$x=3$: $\sqrt{4} - \sqrt{1} + 3 = 2\sqrt{4}$

$2-1+3=4$ - верно

$x=1{,}5+\sqrt{6}$:

$\sqrt{2{,}5+\sqrt{6}} - \sqrt{2{,}5-\sqrt{6}} + 3 = 2\sqrt{(2{,}5+\sqrt{6})(2{,}5-\sqrt{6})}$

$\sqrt{2{,}5+\sqrt{6}} - \sqrt{2{,}5-\sqrt{6}} = -2$ - неверно, т.к. $\sqrt{2{,}5+\sqrt{6}} > \sqrt{2{,}5-\sqrt{6}}$

$x=1{,}5-\sqrt{6}$:

$\sqrt{2{,}5-\sqrt{6}} - \sqrt{2{,}5+\sqrt{6}} + 3 = 1$

$(\sqrt{2{,}5-\sqrt{6}} - \sqrt{2{,}5+\sqrt{6}})^2 = (-2)^2$

$5 - 2\sqrt{(2{,}5-\sqrt{6})(2{,}5+\sqrt{6})} = 4$

$5-1=4$ - верно

Ответ: $x=3$; $1{,}5-\sqrt{6}$

3

Задача 3

Найдем координаты точки B:

$ax^2+4a^2x+4a^3+2=ay$

$x^2+4ax+4a^2+\frac{2}{a}=y$

Вершина параболы $B\left(-\frac{4a}{2};\ \frac{2}{a}\right)$

$B\left(-2a;\ \frac{2}{a}\right)$

Рассмотрим $2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0$

Это уравнение задает множество точек, значит A может быть любой из них. Тогда, это уравнение не имеет общих точек с $x+y=3$, иначе A может лежать на $x+y=3$.

$2a^2-2a(3-y)-6ay+(3-y)^2+2(3-y)y+5y^2=0$

$2a^2-6a+9-4ay+4y^2=0$

Значит, $D<0$, т.е.

$(4a)^2-4\cdot4\cdot(2a^2-6a+9)<0$

$-16a^2+96a-144<0$

$a^2-6a+9>0$

$(a-3)^2>0 \Rightarrow a\neq3$, т.к. $(a-3)^2\geq0$

Значит, ~~при~~ ~~$a\neq3$~~ $a\neq3$

Заметим, что B лежит под $x+y=3$, при

$a\in\left(-\infty;-\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{17}}{4}\right)\cup\left(-\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{17}}{4};+\infty\right)$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211005314**

ID профиля: **169069**

Вариант 12

Черновик

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \dfrac{5}{4} \\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2 = \dfrac{9}{4} \end{cases}$$

$$2(x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = \frac{9}{4}$$

$$2(x^2+y^2)^2 - \frac{1}{x^2+y^2} = 1$$

$$x^2+y^2 = t$$

$$2t^2 - \frac{1}{t} = 1$$

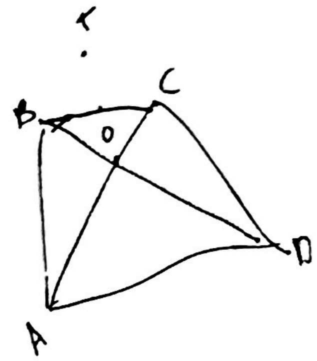
$$2t^3 - t - 1 = 0$$

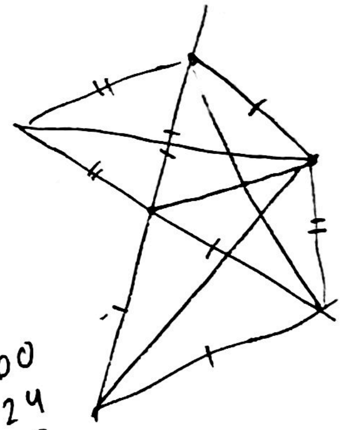
$$(t-1)(2t^2+2t+1) = 0$$

$$t = 1$$

$$x^2y^2 = \frac{1}{4}$$

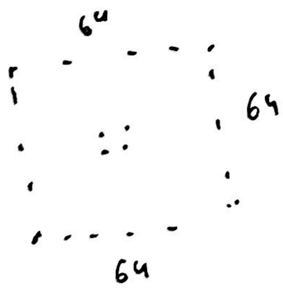
$$-x^4 + x^2 = \frac{1}{4}$$





7200
124
-3

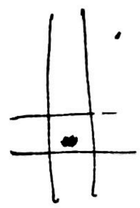
$\times$ 4321
62
14642
43926
453902

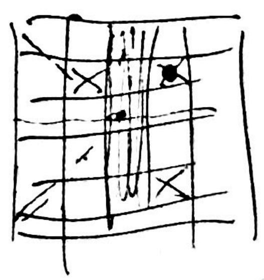


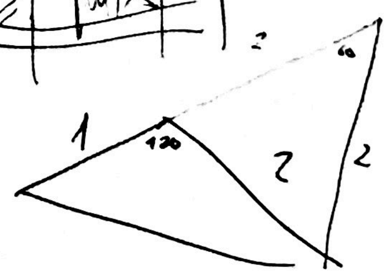
$(61+1)^2 - 4\cdot 61 - 1$

$61 - 2\cdot 61 = 61\cdot 59$

$62\cdot 62 - 3\cdot 61 - 62$







$9+4-3\cdot 2 = 7$

$1+4+2 = 7$

Чистовик

Задача 4

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \\ 2(x^2+y^2)^2+x^2y^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

Вычтем из нижнего верхнее уравнение.

$2(x^2+y^2)^2 - \frac{1}{x^2+y^2} = 1$

Пусть $t = x^2+y^2$

$2t^2 - \frac{1}{t} = 1$

$2t^3 - t - 1 = 0$

$(t-1)(2t^2+2t+1) = 0$

Т.к. $(t^2+2t+1)+t^2 = (t+1)^2+t^2 > 0$, то $t=1$

Значит,

$\frac{1}{1} + x^2y^2 = \frac{5}{4}$

$x^2y^2 = \frac{1}{4}$

$x^2(1-x^2) = \frac{1}{4}$

$x^4 - x^2 + \frac{1}{4} = 0$

$(x^2-\frac{1}{2})^2 = 0$

$x^2 = \frac{1}{2}$

$x = -\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}};$

$x = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}$

$y = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}$

Ответ: $(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}); (-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}); (\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}); (\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2})$

1

Задача № 5

~~Т.к все узлы одинаковые (т.е. последовательность выбора не важна), то итоговый ответ разделим на 2! = 2 т.к каждый способ будет посчитан дважды.~~

По условию, хотя бы один из выбранных узлов на одной из ~~выбранных~~ главных диагоналей

Сначала посчитаем количество способов, если ровно один узел на главной диагонали. Т.к выбранные узлы находятся в квадрате из 62×62 узла, то главные диагонали пересекаются не в узле (иначе говоря, $63-x=y=x \Rightarrow x=\frac{63}{2}\notin \mathbb{Z}$) Значит, для каждого выбранного узла на главной диагонали существует ровно $62^2-2\cdot62-2\cdot(62-2)=58\cdot62+4=60^2$ способов другого выбранного узла. Всего способов — $2\cdot62\cdot60^2$

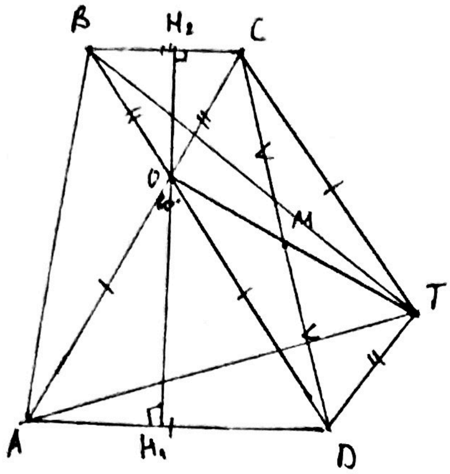
Теперь, посмотрим, сколько способов ~~раз~~ выбрать два узла на диагоналях. Всего таких способов — ~~$C^2_{124}=62\cdot123$~~ $\frac{2\cdot62\cdot(2\cdot62-3)}{2}=62^2\cdot2-62\cdot3$, т.к. всего вариантов выбрать 1 узел — $2\cdot62$, а 2 узел — $(2\cdot62-3)$, причем каждый вариант посчитан дважды.

Значит, всего способов — $62\cdot(2\cdot60^2+124-3)=$
$=62\cdot7321=453902$

Ответ: 453902

2

Задача 6



а) Докажем, что

$\triangle AOB = \triangle ADT = \triangle BCT$

Заметим, что $AD = AO = CT$, т.к. $CTDO$ - параллелограмм и $BC = BO = TD$. ($CTDO$ - параллелограмм, т.к. $OM = MT$; $CM = MD$)

Также, т.к. $AC \parallel DT$ и $CT \parallel BD$, то $\angle OCT = \angle AOD = \angle ODT = 60°$, т.к. в равностороннем треугольнике все углы по $60°$. Значит, $\angle BOA = \angle BCT = \angle ADT = 120°$. Тогда, $\triangle AOB = \triangle ADT = \triangle BCT \Rightarrow AB = BT = AT \Rightarrow \triangle ABT$ - равносторонний, ч.т.д.

б) $BC = 2$; $AD = 4$

По т. косинусов:

$AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2\cos 120°\, AO \cdot BO$

$AB^2 = 16 + 4 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 4 \cdot 2 = 16 + 4 + 8 = 28$

$AB = 2\sqrt{7}$

Значит, $S_{ABT} = \dfrac{AB \cdot BT \cdot \sin\angle ABT}{2} = \dfrac{(2\sqrt{7})^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 7\sqrt{3}$

Опустим перпендикуляры из O на AD и BC с основаниями H_1 и H_2 соответственно. Тогда, H_1, O и H_2 - на одной прямой, т.к. $BC \parallel AD$.

$H_2O = OC \cdot \sin\angle H_2CO = \sqrt{3}$

$H_1O = OD \cdot \sin\angle H_1DO = 2\sqrt{3}$

Значит, $H_1H_2 = 3\sqrt{3}$

3

Т.к. $\angle BCA = \angle CAD = 60°$, то $ABCD$ - трапеция, значит

$$S_{ABCD} = \frac{BC+AD}{2} \cdot H_1H_2 = \frac{2+4}{2} \cdot 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$$

Тогда, $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{7}{9}$

Ответ: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{7}{9}$