Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211005300**

ID профиля: **851312**

Вариант 12

Чистовик 1

№ 2. (1 стр.)

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$$

ОДЗ: $x \geq -1$, $x \leq 4$ и $x^2 - 3x - 4 \leq 0$

$(x-4)(x+1) \leq 0$ $\quad x \in [-1; 4]$

$$\sqrt{x+1} + 3 = 2\sqrt{(4-x)(x+1)} + \sqrt{4-x} \quad |\,{}^{\wedge}2$$

$$x+1+9+6\sqrt{x+1} = 4(4-x)(x+1) + 4-x + 4\sqrt{(4-x)^2(x+1)}$$

По ОДЗ $x \in [-1; 4] \Rightarrow (4-x) \geq 0 \Rightarrow \sqrt{(4-x)^2} = 4-x$

$$x+10+6\sqrt{x+1} = -4x^2+12x+16+4-x+(16-4x)\sqrt{x+1}$$

$$4x^2-10x-10 = 10\sqrt{x+1} - 4x\sqrt{x+1}$$

Пусть $\sqrt{x+1} = t$, тогда $t^2 = x+1$ $\quad x = t^2-1$

$$4(t^2-1)^2 - 10(t^2-1) - 10 = 10t - 4(t^2-1)t$$

$$4t^4 - 8t^2 + 4 - 10t^2 + \cancel{10} - \cancel{10} = 10t - 4t^3 + 4t$$

$$4t^4 + 4t^3 - 18t^2 - 14t + 4 = 0$$

$$2t^4 + 2t^3 - 9t^2 - 7t + 2 = 0$$

$t = -1$ – корень (подбором) $\quad (t+1)(2t^3 - 9t + 2) = 0$

	2	2	-9	-7	2
-1	2	0	-9	2	0

$t = 2$ – корень (подбором)

	2	0	-9	2
2	2	4	-1	0

$$(t+1)(t-2)(t^2+4t-1) = 0$$

$D = 20$

$$t = \frac{-4 \pm 2\sqrt{5}}{2} = -2 \pm \sqrt{5}$$

Чистовик 2

№2 (2стр)

Получим: $t=-1$ $\quad t = \sqrt{x+1} \Rightarrow t \geq 0$

$t=2$

$t=-2+\sqrt{5}$ $\quad$ По ОДЗ $x \in [-1;4]$.

$t=-2-\sqrt{5}$

$24 \cdot 24 = 576 \qquad 22 \cdot 22 = 484$

$t=2$; $t=\sqrt{5}-2$

$\sqrt{x+1}=2 \Rightarrow x=3 \in [-1;4]$

$23 \cdot 23 = 529$

$\sqrt{x+1}=\sqrt{5}-2 \qquad x+1 = 9-4\sqrt{5} \qquad x = 8-4\sqrt{5}$

$2 < \sqrt{5} < 3 \Rightarrow -4 < 8-4\sqrt{5} < 0$

$2{,}3 \cdot 4 = 9{,}2 \qquad 2{,}2 \cdot 4 = 8{,}8$

$2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3 \Rightarrow -1{,}2 < 8-4\sqrt{5} < -0{,}8$

По ОДЗ $x \in [-1;4] \Rightarrow x+1 \in [0;5]$

$x+1 = (\sqrt{5}-2)^2 \Rightarrow (\sqrt{5}-2)^2 \in [0;5]$

Значит $x = 8-4\sqrt{5}$ - подходит.

$\boxed{\text{Ответ: } x=3;\ x=8-4\sqrt{5}}$

Чистовик (3)

№1.(а)(стр 1)

$PM \parallel TN$

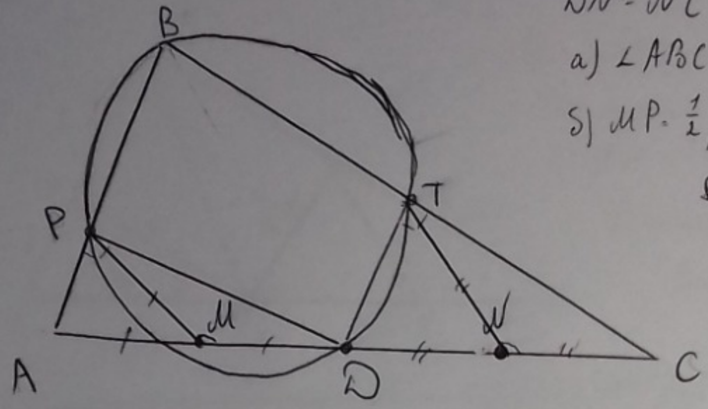
$AM = MD$

$DN = NC$

а) $\angle ABC$ – ?

б) $MP = \frac{1}{2}$, $NT = 1$, $BD = \frac{4}{3}$

S_{ABC} – ?



1) Проведём PD и TD. $BPDT$ – вписанный четырёхугольник =>

=> ~~B+D~~ $\angle PBT + \angle PDT = 180°$

2) Если $PM \parallel TN$ (по усл), то $\angle PMD \overset{(*)}{=} \angle TNC$ (соотв. углы при $PM \parallel TN$ и секущ. MN)

и $\angle PMA = \angle TND$

По условию BD – диаметр => $\angle BPD = \angle BTD = 90°$ (опир. на диаметр) =>

~~=> $\angle BPD + \angle PDT + \angle DTB + \angle PBT = 360°$ =>~~

=> $\angle APD = \angle DTC = 90°$

3) PM и TN – медианы в прямоуг. Δ-ах APD и DTC =>

=> $PM = MD$, $TN = NC$.

4) Рассмотрим ΔPMD и ΔTNC. $\angle PMD \overset{(*)}{=} \angle TNC$ (доказано выше),

$PM = MD$, $TN = NC$ => они подобны по отношению 2-ух сторон и углу между ними => ~~$PM \parallel TN$, $MD \parallel NC$~~,

=> $\angle PDM = \angle TCN$, а это соотв. углы при прямых TC, PD и секущей AC =>

=> $PD \parallel TC$ => $PD \parallel BT$ => $\angle BPD + \angle PBT = 180°$ (односторон. углы при $BT \parallel PD$ и сек. PB)

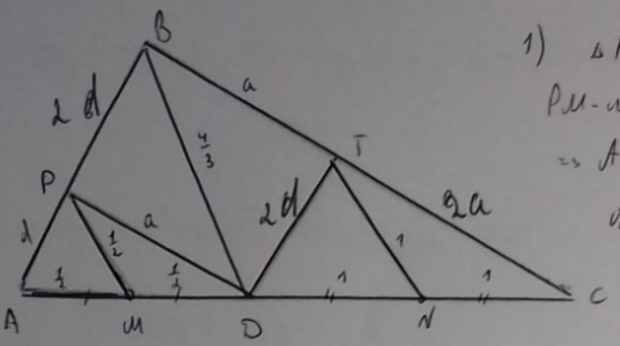
$\angle BPD = 90°$ => $\angle PBT = 90°$

$\boxed{\text{Ответ: } \angle ABC = 90°}$

Чистовик (4)

№1 (б) (стр2) б) $MP = \frac{1}{2}$; $NT = 1$; $BD = \frac{4}{3}$

S_{ABC} - ?



1) △APD - прямоугол., PM - медиана => $AM = PM = MD = \frac{1}{2}$

Аналогично $DN = TN = NC = 1$

~~2) Рассм △APD. PM - медиана => $PM = \frac{\sqrt{2AP^2 + 2PD^2 - AD^2}}{2}$~~

~~По т. Пифагора $AP^2 + PD^2 = AD^2$~~

2) △APD ~ △DTC ~ △ABC (подобны, доказано в п. (а))

$AC = 3 \Rightarrow$ медиана △ABC $= 1,5 = \frac{3}{2}$

$S_{ABC} : S_{DTC} : S_{APD} = \frac{9}{4} : 1 : \frac{1}{4}$

$S_{ABC} = 9 S_{APD}$ $\qquad S_{BTDP} = S_{ABC} - S_{APD} - S_{DTC} = 4 S_{APD}$

$S_{DTC} = 4 S_{APD}$

~~3) Рассмотрим прямоугольник BTDP.~~

Пусть $PD = BT = a$; $PB = DT = b$, $TC = c$; $AP = d$, тогда:

Т.к. △APD ~ △DTC, то $\frac{b}{d} = 2$, $\frac{c}{a} = 2$

$\Rightarrow b = 2d$; $c = 2a$

1) $d^2 + a^2 = 1$

2) $4(d^2 + a^2) = 4$

1) $a^2 + 4d^2 = \frac{16}{9}$

3) − 1): $3d^2 = \frac{7}{9}$ $\qquad d = \sqrt{\frac{7}{27}}$

$a = \sqrt{\frac{20}{27}}$ $\qquad S_{ABC} = \frac{3d \cdot 3a}{2} = \frac{9\sqrt{140}}{2 \cdot 27} = \frac{\sqrt{140}}{6} =$

$= \frac{\sqrt{35}}{3}$ $\qquad \boxed{\text{Ответ: } S_{ABC} = \frac{\sqrt{35}}{3}}$

Чистовик 5

№3. (стр 1)

A: $2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0$

B: $ax^2+4a^2x-ay+4a^3+2=0$ – парабола с верш в точке B

$x+y=3$

1) Если $ax^2+4a^2x-ay+4a^3+2=0$ – парабола, то

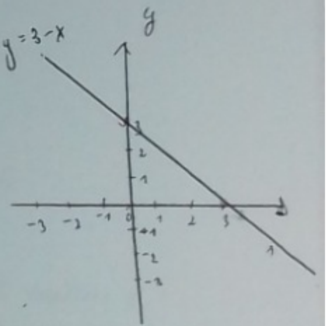
$$y = x^2+4ax+4a^2+\frac{2}{a}$$

$$x_B = \frac{-4a}{2} = -2a \qquad B\left(-2a; \frac{2}{a}\right) \Rightarrow a \neq 0$$

$$y_B = 4a^2-8a^2+4a^2+\frac{2}{a} = \frac{2}{a}$$

2) $x+y=3 \Rightarrow y=3-x$

а) Точка B лежит сверху от прямой $y=3-x$.



Заметим, что $-2a$ и $\frac{2}{a}$ имеют разные знаки $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ точка B лежит либо во II либо в IV коорд. плоскости.

~~• $a>0 \Rightarrow$ B во II коорд. плоск~~

Для B: $x=-2a$; $y=\frac{2}{a} \Rightarrow y=-\frac{4}{x}$

$a=\frac{x}{-2}$

$-\frac{4}{x} > 3-x$ (точка B выше прямой $y=3-x$)

$x \neq 0$

• $x>0 \Rightarrow -\frac{4}{x} > 3-x \quad |\cdot x$

$x^2-3x-4>0$

$x \in (-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$ $\Rightarrow x \in (4; +\infty)$

• $x<0 \Rightarrow -\frac{4}{x} > 3-x \quad |\cdot x$

$x^2-3x-4<0$

$x \in (-1; 4)$ $\Rightarrow x \in (-1; 0)$

Чистовик (6)

Теперь рассмотрим точку А. №3 (стр2)

A: $2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0$

$(x+y)^2+4y^2-6ay-2ax+2a^2=0$

$5y^2+2xy-6ay+x^2-2ax+2a^2=0$

$D=(2x-6a)^2-20x^2+40ax-40a^2=$

$=4x^2-24xa+36a^2-20x^2+40ax-40a^2=$

$=-16x^2+16ax-40a^2=-4(4x^2-4ax+10a^2)=$

$=-8(2x^2-2ax+5a^2)\geq 0$

$2x^2-2ax+5a^2\leq 0$

$D=4a^2-40a^2=-36a^2$ По ОДЗ $a\neq 0$

$\Downarrow$

$2x^2-2ax+5a^2$ должно быть <0 при любых x $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ невозможно, т.к. ветви параболы направлены вверх

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211005300**

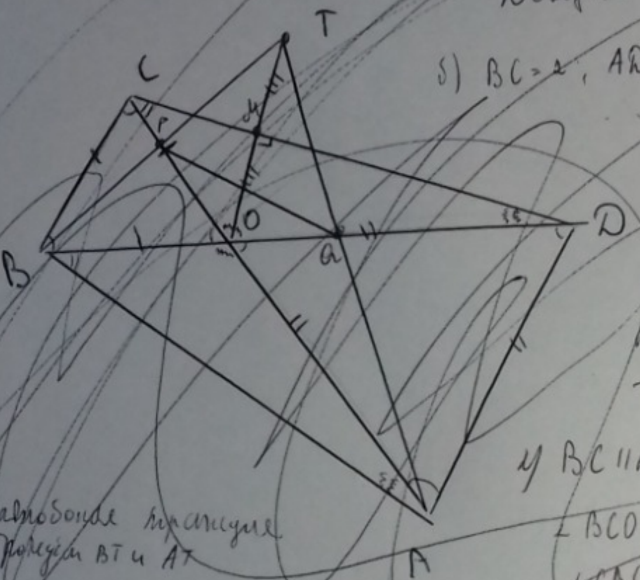
ID профиля: **851312**

Вариант 12

PQ ∩ T - вне?

Черновик 1

№6.



△BOC; △AOD - правил.

~~OT ⊥ CD, CM = MT.~~

Доказать: а) ABT - правильн.

б) BC = 2, AD = 4 $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$ - ?

1) △COD = △BOA

(∠COD = ∠BOA вертикал.),

CO = OB, OD = OA,

т.к. △BOC и △AOD - правильные.

2) BC ∥ AD, т.к.

∠BCO = ∠DAO,

∠CBO = ∠ODA -

- накрест лежащ. углы при BC, AD и секущ. CA и BD.

3) => ABCD - равнобокая трапеция

Проведём BT и AT

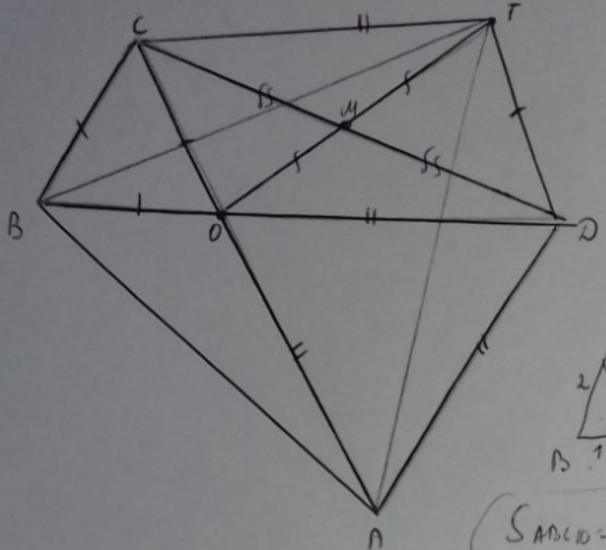
BT ∩ CA = P

TA ∩ BD = Q Проведём PQ

Чистовик (5)

№6 (б) (стр 2)   б) $BC = 2$; $AD = 4$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$ - ?

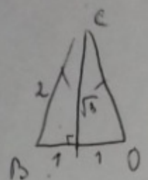


1) S_{ABCD} - ?

$S_{ABCD} = S_{BOC} + S_{AOD} + 2 S_{OCD}$

($\triangle OCD = \triangle OBA$)

$S_{COD} = \frac{1}{2} CO \cdot OD \cdot \sin 120 = 4 \cdot \sin 120 = 2\sqrt{3}$



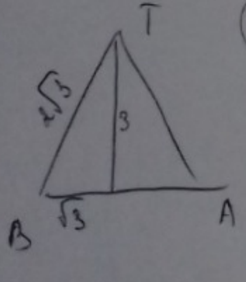
$S_{BOC} = \sqrt{3}$

$S_{AOD} = 4\sqrt{3}$

$\boxed{S_{ABCD} = \sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 9\sqrt{3}}$

2) S_{ABT} - ? Рассм $\triangle BOA$. $\angle BOA = 120°$, $BO = 2$; $OA = 4$.

По т косинусов: $BA^2 = BO^2 + OA^2 - 2BO \cdot OA \cdot \sin 120° = 4 + 16 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 12$ $BA = 2\sqrt{3}$



$\boxed{S_{BAT} = 3\sqrt{3}}$

Ответ: $\frac{S_{BAT}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{3}$

Чистовик (4)

№6. (стр1)
(а) $\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ – правильн.

$OT \perp CD$, $OM = MT$, $CM = MO$

Доказать: а) $\triangle ABT$ – правильн.

б) $BC = 2$; $AD = 4$; $\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}}$ – ?

1) $\triangle COD = \triangle BOA$

($\angle COD = \angle BOA$, вертикал.,
$CO = OB$, $DO = OA$,
т.к. $\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ – правильн.)

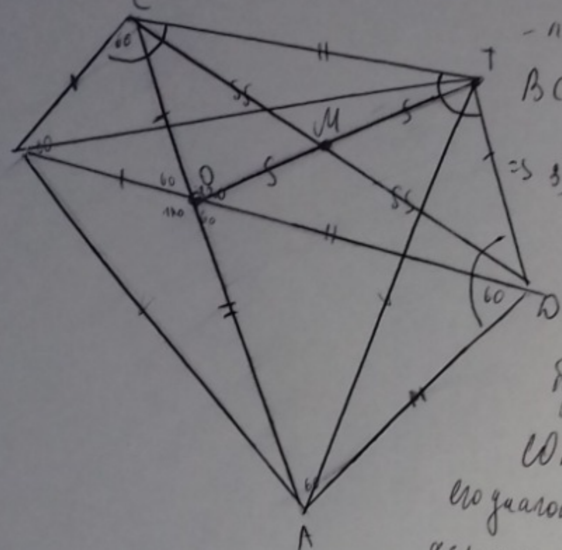
2) $BC \parallel AD$, т.к. $\angle BCO = \angle DAO$
$\angle CBO = \angle ODA$ –
– накрест леж. углы при BC, AD и секущ. CA и BD.

=> 3) $ABCD$ – равнобедренная трапеция

Проведём BT и AT.

Проведём CT и TD

$CODT$ – параллелогр., т.к. его диагонали точкой пересечения делятся пополам;



$\triangle CAT = \triangle DBA$?

=> $CT \parallel OD$; $TD \parallel CO$

$CT = OD$ $CO = TD$, $\angle COD = 120°$ => $\angle CTD = 120°$ => $\angle OCT = \angle ODT = 60°$ (**)

$CTDA$ – равнобедр. трап., т.к. $TD \parallel CA$ (стор. парал.), $CT = AD$

$\angle OAD = 60°$ => $\angle CTD = \angle TDA = 120°$ => $\angle ODT = 60°$

~~ABCD~~ $BCTD$ – равнобед. трапец., т.к. $CT \parallel BD$ (стор. парал.), $BC = TD$ =>

=> $\angle BCT = \angle CTD = 120°$ (*) => $\angle OCT = 60°$

$\triangle CAT = \triangle DBA$: $CA = BD$; $CT = AD$; $\angle OCT = 60°$ (**) (из паралл.) $= \angle BDA = 60°$ (из прав. $\triangle$-а) =>

=> $BA = AT$

Рассмотрим $\triangle BCT$ и $\triangle BOA$ $BC = BO$, $CT = OA$

$\angle BOA = 120°$, $\angle BCT = 120°$ (*) =>

=> $\triangle BCT = \triangle BOA$ => $BT = BA$ => $\triangle BAT$ – равносторонний.

ч.т.д.

Чистовик (3) №5 (стр 2)

Для каждой точки есть 61·2 способа, как можно поставить вторую точку. Точек на диагоналях всего 62·2

В итоге имеем 62·61·4 способа, но мы учли 2 раза варианты, когда обе точки лежат на диагоналях и параллельны осям коорд.

Таких случаев 62·2 (каждой точке на диаг. соотв. ровно 2 другие точки.)

$62((62-1)\cdot4-2) = 62(62\cdot4-6) = 62^2\cdot4 - 6\cdot62$

(*) Окончательно: $62(61\cdot4-2)$ случаев

3) Сколько всего способов поставить вторую точку в узел сетки, если первая фиксирована?

$62\cdot62$ мест

Поставили одну точку на диагонали, осталось $62\cdot62-1$ место

$62\cdot62-1$ способа поставить 2 точку, ~~[illegible]~~

Первую точку можно поставить $62\cdot2$ способами →

→ вторую: $62\cdot2(62\cdot62-1)$ способами, но мы посчитали по 2 раза способы, когда обе точки лежат на прямых $y=x$ или $y=63-x$

Способов поставить таким образом 2 точки: $C^2_{62\cdot2} = 62\cdot(62\cdot2-1)$

(**) Окончательно: $62\cdot2(62\cdot62-1) - 62\cdot(62\cdot2-1)$

Теперь надо вычесть из (**) выражение (*), и это будет ответ

$62^3\cdot2 - 62\cdot2 - 62^2\cdot2 + 62 - 62^2\cdot4 + 6\cdot62 = 62^3\cdot2 - 6\cdot62^2 + 5\cdot62$

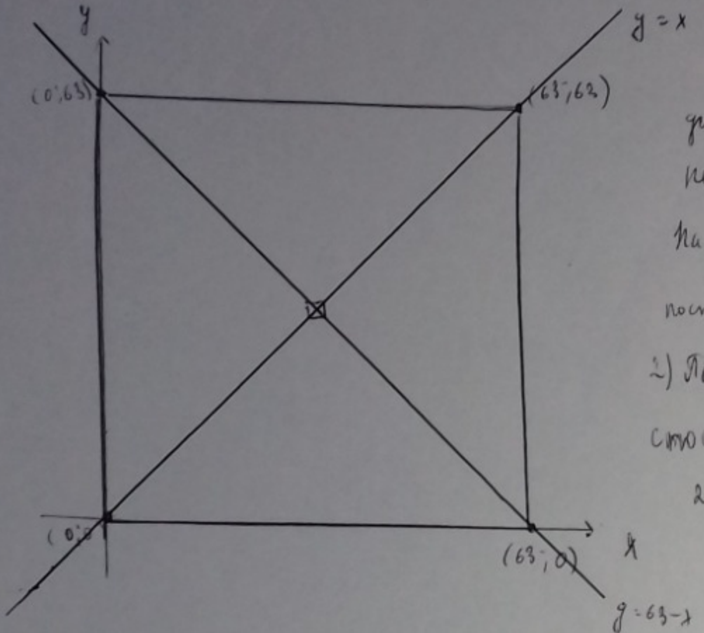
$\boxed{\text{Ответ: } 62^3\cdot2 - 6\cdot62^2 + 5\cdot62}$

Чистовик (2)

№5. (Стр 1)

(0;0), (0;63), (63;63), (63;0)

2 узла стоят внутри квадрата, так, чтобы хотя бы один лежал на $y = x$ или $y = 63 - x$, но оба узла не лежали ни на какой прямой, парал. коор. осям



1) Точка пересечения диагоналей квадрата не лежит на узле.

На одну диагональ можно поставить 62 точки

2) Посмотрим, сколькими способами можно поставить 2 точки так, чтобы обе точки лежали на прямой, паралл. коор. осям

~~Поставим 1 точку в любой узел~~ У нас есть 62 горизонтал. и 62 вертикал. прямых, паралл. осям координ.

=> на каждой прямой мы должны выбрать 2 точки, ~~[illegible]~~ причём одна точка фиксирована и находится на одной из диагоналей квадрата

~~[illegible]: $62 \cdot C_{62}^{2}$ способами на одну вертикаль~~

~~Всего $62 \cdot 2 \cdot C_{62}^{2}$ способов~~ $62^2 \cdot 61$

~~(одну точку на одну диагональ способами~~

~~(одну точку на другой диагонали способами~~

~~Для каждой точки есть $61 \cdot 2$ способа поставить 2 точку~~

~~всех паралл. прямых $62 \cdot 2$~~

~~В итоге имеем $62 \cdot 61 \cdot 4$ способа.~~

~~3) Сколько всего есть способов поставить вторую точку, если первая~~

Чистовик (1)

ОДЗ: $x \neq 0; y \neq 0$

№4 (Стр 1)

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \dfrac{5}{4} \Rightarrow x^2y^2 = \dfrac{5}{4} - \dfrac{1}{x^2+y^2} \\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2 = \dfrac{9}{4} \Rightarrow 2(x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = \dfrac{9}{4} \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2y^2 = \frac{9}{4} - 2(x^2+y^2)^2$$

$$\frac{5}{4} - \frac{1}{x^2+y^2} = \frac{9}{4} - 2(x^2+y^2)^2$$ Пусть $x^2+y^2 = t$

$2t^2 - \frac{1}{t} - 1 = 0 \qquad t \neq 0.$

$2t^3 - t - 1 = 0$

$t = 1$ – корень (подбором)

	2	0	−1	−1
1	2	2	1	0

$(t-1)(2t^2+2t+1)$

$D = 4 - 8 < 0 \Rightarrow$ ~~более~~ нет корней

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ x^2y^2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$\frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow x^2y^2 = \frac{1}{4}$

$y^2 = 1 - x^2$

$x^2(1-x^2) = \frac{1}{4}$

$-x^4 + x^2 - \frac{1}{4} = 0$

$x^4 - x^2 + \frac{1}{4} = 0$

$D = 1 - 1 = 0$

$x^2 = \frac{1}{2}$

$x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow y^2 = \frac{1}{2}$

$$\boxed{\text{Ответ: } \left(\sqrt{\tfrac{1}{2}}; \sqrt{\tfrac{1}{2}}\right); \left(-\sqrt{\tfrac{1}{2}}; \sqrt{\tfrac{1}{2}}\right); \left(\sqrt{\tfrac{1}{2}}; -\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right); \left(-\sqrt{\tfrac{1}{2}}; -\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)}$$