Часть 1

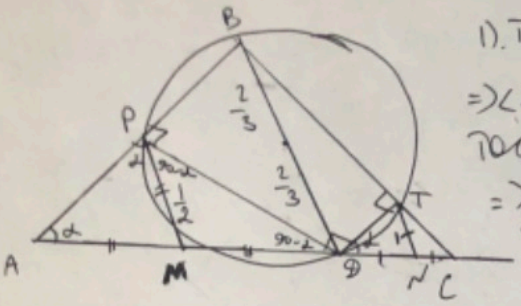
Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211005222**

ID профиля: **319648**

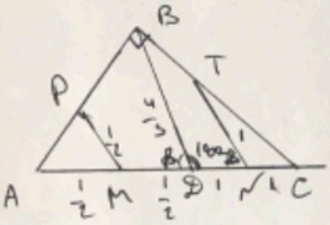
Вариант 12

1 Чистовик, вариант 12



1) Т.к. BD — диаметр, то $\angle BPD = \angle BTD = 90^\circ \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle APD = \angle DTC = 90^\circ$ как смежные.
Тогда, PM и TN — медианы из угла $90^\circ \Rightarrow$
$\Rightarrow PM = AM = MD$; $TN = DN = NC$.
Пусть $\angle PAD = \alpha$, тогда, $\angle APM = \alpha$, т.к.
ΔAPM — р/б. Т.к. ΔAPD — прямоуг., то $\angle PDA = 90^\circ - \alpha$, аналогично, $\angle MPD = 90 - \alpha$
Т.к. $\angle APM + \angle AMP + \angle MAP = 180^\circ$, то $\angle PMA = 180 - 2\alpha$.
Т.к. $PM \parallel TN$, то $\angle PMA = \angle TNA$ как соотв. при $PM \parallel TN$ и сек. MN
$\Rightarrow \angle TND = 180 - 2\alpha \Rightarrow \angle DTN = \angle TDN = \alpha$, т.к. ΔTND — р/б.
Тогда, $\angle ADC$ — развернутый, $\angle ADP = 90 - \alpha$; $\angle TDN = \alpha \Rightarrow \angle PDT = 180^\circ - (90 - \alpha) - \alpha =$
$= 90^\circ \Rightarrow \angle PBT = \angle ABC = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

2)



$\angle ABC = 90^\circ$ из 1);
Пусть $\angle ADB = \beta$, тогда $\angle BDC = 180 - \beta$ как смежн.
По Т. косинусов в ΔABD и ΔBDC:
$(\cos\alpha = -\cos(180 - \alpha))$

$$\begin{cases} AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2AD \cdot BD \cdot \cos\beta \\ BC^2 = DC^2 + BD^2 + 2 \cdot DC \cdot BD \cdot \cos\beta \end{cases}$$

, по Т. Пифагора в ΔABC, $AB^2 + BC^2 = AC^2 = 9$

Тогда, $AD^2 + BD^2 - 2AD\,BD \cdot \cos\beta + DC^2 + BD^2 + 2DC \cdot BD \cdot \cos\beta = AC^2$

$$1 + \frac{16}{9} - 2 \cdot 1 \cdot \frac{4}{3} \cdot \cos\beta + 4 + \frac{16}{9} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \cos\beta = 9$$

$$\frac{25}{9} - \frac{8}{3}\cos\beta + \frac{52}{9} + \frac{16}{3}\cos\beta = 9 \quad \Big| \cdot 9$$

$$25 - 24\cos\beta + 52 + 48\cos\beta = 81 \Rightarrow 24\cos\beta = 81 - 52 - 25$$

$24\cos\beta = 4 \Rightarrow \cos\beta = \frac{1}{6}$. Тогда, по Т. косинусов в ΔADB:

$AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2AD \cdot BD \cdot \cos\beta$; $AB^2 = 1 + \frac{16}{9} - 2 \cdot 1 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{6} =$

$= \frac{25}{9} - \frac{4}{9} = \frac{21}{9} = \frac{7}{3} \Rightarrow AB = \sqrt{\frac{7}{3}}$; $BC^2 = AC^2 - AB^2 = 9 - \frac{7}{3} = \frac{20}{3} \Rightarrow BC = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$

$$S = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{\sqrt{\frac{7}{3}} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{35}}{3}$$

1

Ответ: $S = \frac{\sqrt{35}}{3}$

Чистовик, вариант 12

№3

$$\begin{cases} 2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0 \ \ (1) - \text{точка} \\ ax^2+4a^2x-ay+4a^3+2=0 \ \ (2) - \text{парабола, при } a\neq 0 \end{cases}$$

$(1): x^2+2x(y-a)+y^2-2ay+a^2+4y^2-4ay+a^2=0$

$(x+y-a)^2+(2y-a)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-a=0 \\ 2y-a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=a-y \\ y=\frac{a}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{a}{2} \\ y=\frac{a}{2} \end{cases}$

(2) $ay=ax^2+4a^2x+4a^3+2$; при $a=0: 0=2$ - неверно $\Rightarrow a\neq 0$

$y=x^2+4ax+4a^2+\frac{2}{a}$ - парабола, ветви вверх.

$x_B=\frac{-4a}{2}=-2a$; $y_B=y(x_B)=4a^2+4a(-2a)+4a^2+\frac{2}{a}=$

$=4a^2-8a^2+4a^2+\frac{2}{a}=\frac{2}{a}$, т.е. вершина имеет коорд. $\left(-2a; \frac{2}{a}\right)$

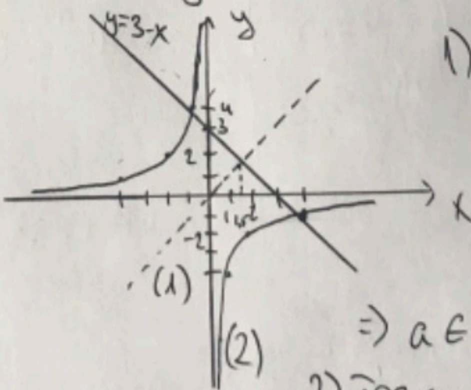
Замечу, что $-2a\cdot\frac{2}{a}=-4 \Rightarrow xy=-4$ при $\forall a \Rightarrow y=-\frac{4}{x}$

$x+y=3 \Rightarrow y=3-x$

(1) $x=\frac{a}{2}$; $y=\frac{a}{2} \Rightarrow y=x \Rightarrow$

$\Rightarrow$ точка лежит на прямой $y=x$

(2) $y=-\frac{4}{x}$



1) точка и вершина ниже $y=3-x$:

1.1) $\frac{a}{2}<1{,}5 \Rightarrow a<3$

1.2) $a>-2$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow a\in(-2;3)$

2) точка и вершина выше $y=3-x \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 2.1: \frac{a}{2}>1{,}5 \Rightarrow a>3 \\ 2.2. \ a<-2 \end{cases}$ - неверно, т.к. $a\in(-2;3)$

но $a\neq 0$, чтобы существовала парабола

Ответ: ~~$a\in(-2;3)$~~ $a\in(-2;0)\cup(0;3)$

3

Чистовик, вариант 12

№2

$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+3=2\sqrt{4+3x-x^2}$. Замечу, что $4+3x-x^2=(x+1)(4-x)$

ОДЗ: $\begin{cases} x+1\geq 0 \\ 4-x\geq 0 \\ (4+3x-x^2\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq -1 \\ x\leq 4 \\ \cancel{x\in[-1;4]} \\ -1\leq x\leq 4 \end{cases} \Rightarrow$ $-1\leq x\leq 4$ $\Rightarrow \cancel{x\in[-1;4]}$

Замена: $\sqrt{x+1}=a\geq 0$; $\sqrt{4-x}=b\geq 0$

$\begin{cases} a-b+3=2ab \\ a^2+b^2=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{b-3}{1-2b} \\ \left(\frac{b-3}{1-2b}\right)^2+b^2=5 \quad (1) \end{cases}$ (при $b=\frac{1}{2}$: $a+2,5=a$ - неверно

$\frac{b^2-6b+9}{1-4b+4b^2}+b^2=5 \Leftrightarrow \frac{b^2-6b+9+b^2-4b^3+4b^4}{1-4b+4b^2}=5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b^2-6b+9+b^2-4b^3+4b^4=5-20b+20b^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4b^4-4b^3-18b^2+14b+4=0 \quad \Big| \cdot\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2b^4-2b^3-9b^2+7b+2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (b-1)(b+2)(2b^2-4b-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=1 \\ b=-2\geq 0 \text{ т.к. } b=\sqrt{4-x} \\ 2b^2-4b-1=0 \quad (1) \end{array}\right.$

(1): $2b^2-4b-1=0$

$D=16+8=24=2\sqrt{6}$

$b_{1,2}=\frac{4\pm 2\sqrt{6}}{4}=1\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$. $b\geq 0 \Rightarrow 1-\frac{\sqrt{6}}{2}$ - не подходит

$(2,5)^2=6,25$

$(2,4)^2=5,76$

Тогда $\left[\begin{array}{l} b=1 \\ b=1+\frac{\sqrt{6}}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{4-x}=1 \\ \sqrt{4-x}=1+\frac{\sqrt{6}}{2} \end{array}\right. \Rightarrow$ $4-x=1 \Rightarrow x=3$

$\Rightarrow 2\sqrt{4-x}=2+\sqrt{6} \quad (2)$

(2) $4(4-x)=4+4\sqrt{6}+6$

$16-4x=4+4\sqrt{6}+6 \Rightarrow 4x=6-4\sqrt{6} \Rightarrow x=1,5-\sqrt{6}$;

$1,5-\sqrt{6} \vee -1$

$\sqrt{6}<2,5 \Rightarrow$

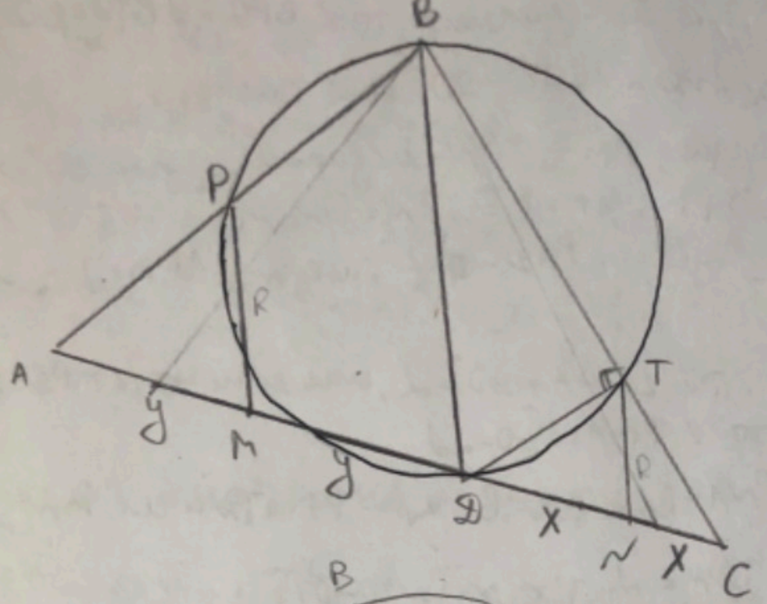
$\Rightarrow 1,5-\sqrt{6}>-1$

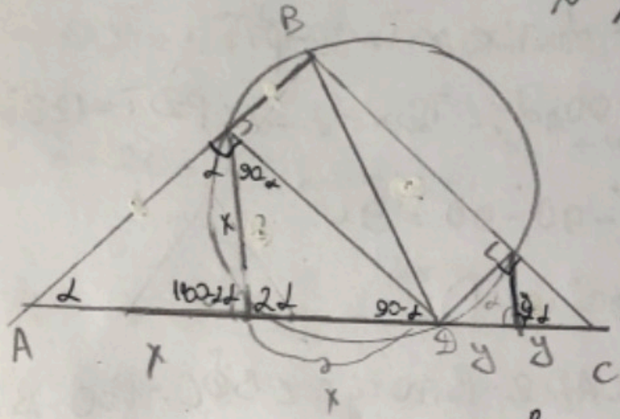
Ответ: 3; $1,5-\sqrt{6}$

2

211005222 (U319648 M1275218)

Черновик, вариант 12

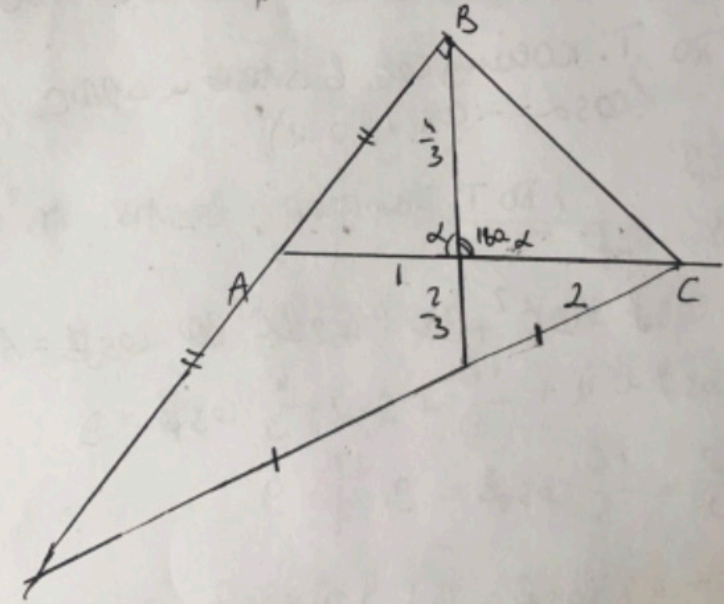




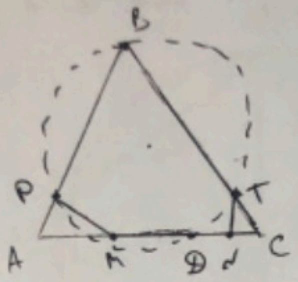
$$\frac{16}{9}+1=\frac{25}{9};\quad \frac{16}{9}+4=$$

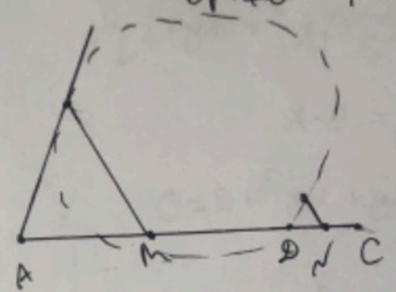
$$\frac{36+16}{9}=\frac{52}{9}$$

$$\frac{25}{9}+\frac{52}{9}$$



черновик, 12 вар.





$(x+1)(4-x) = -x^2+3x-x^2$

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{(x+1)(4-x)}$ $\quad \sqrt{x+1} = t \quad t^2+u^2=5$

$\sqrt{4-x} = u$

$t-u+3 = 2tu$

$t^2+u^2=5$

$t-2tu = u-3$

$t(1-2u) = u-3 \Rightarrow t = \frac{u-3}{1-2u}$

$\frac{(u-3)^2}{(1-2u)^2}+u^2=5$

$\frac{u^2-6u+9+u^2(4u^2-4u+1)}{4u^2-4u+1}=5$

$\frac{u^2-6u+9}{4u^2-4u+1}+u^2=5$

$u^2-6u+9+4u^4-4u^3+u^2=20u^2-20u+5$

$4u^4-4u^3-18u^2+14u+4=0$

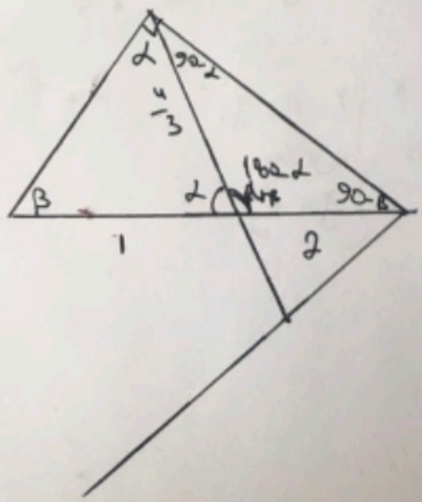
$2u^4-2u^3-9u^2+7u+2=0$

$(u-1)(2u^3+0u^2-9u-2)=0$

$(u-1)(2u^3-9u-2)=0$

$(u-1)(u+2)(2u^2-4u-1)=0$

$\begin{array}{r} 24 \\ \times\ 24 \\ \hline 96 \\ +\ 48 \\ \hline 576 \end{array}$



$1+\frac{16}{9}-2\cdot\frac{4}{3}\cdot1\cdot\cos\alpha+4+\frac{16}{9}+2\cdot\frac{4}{3}\cdot2\cdot\cos\alpha=9$

211005222 (U319648 M1275218)

$2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0$ - точка Черновик, 12 вар.

$x+y=3 \Rightarrow y=3-x$

$ax^2+4a^2x-ay+4a^3+2=0$

$\cancel{x^2+2xy+y^2+4y^2}$

$x^2+2xy-2ax = x^2+2x(y-a)+(y-a)^2 = x^2+2x(y-a)+y^2+a^2-2ay$

$x^2+2x(y-a)+y^2-2ay+a^2+4y^2-4ay+a^2=0$

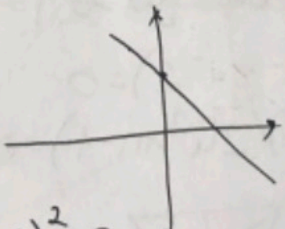
$(x+(y-a))^2+(2y-a)^2=0$

$ax^2+4a^2x-ay+4a^3+2=0$ $a\neq 0$

$y=\frac{ax^2+4a^2x+4a^3+2}{a}=x^2+4ax+4a^2+\frac{2}{a}$

$x_B=\frac{-4a}{2}=-2a$

$y(x_B)=\frac{a\cdot 4a^2+4a^2(-2a)+4a^3+2}{a}=\frac{4a^3-8a^3+4a^3+2}{a}=\frac{2}{a}$



$x+y\le 3$

$x^2+2x(y-a)+y^2-2ay+a^2+4y^2-4ay+a^2$

$(x+y-a)^2+(2y-a)^2=0$

$x=a-y$; $y=\frac{1}{2}a$

$x+y-a=0$
$2y-a=0$
$\begin{cases} x=a-y \\ \cancel{a=2y} \\ y=\frac{a}{2} \end{cases}$

$x=a-\frac{1}{2}a=\frac{1}{2}a$

81
−72
29
−25
4

211005222 (U319648 M1275218)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211005222**

ID профиля: **319648**

Вариант 12

Чистовик, 12 вариант

№4

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2}+x^2y^2=\dfrac{5}{4} \\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2=\dfrac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1+x^2y^2(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=\dfrac{5}{4} \\ 2(x^2+y^2)+x^2y^2=\dfrac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4+4x^2y^2(x^2+y^2)=5(x^2+y^2) \\ 2(x^2+y^2)^2+x^2y^2=\dfrac{9}{4} \end{cases}$$ Замена, $x^2y^2=a$, $x^2+y^2=b$

$$\begin{cases} 4+4ab=5b \\ 2b^2+a=\dfrac{9}{4} \,\Big|\cdot 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4+4ab=5b \\ 8b^2+4a=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4+4ab=5b \\ a=\dfrac{9-8b^2}{4} \end{cases}$$

$$4+4\left(\frac{9-8b^2}{4}\right)b=5b$$

$$4+9b-8b^3=5b \Leftrightarrow 8b^3-4b-4=0 \,\Big|\cdot\frac{1}{4} \Leftrightarrow 2b^3-b-1=0$$

$b=1$

$$(b-1)(2b^2+2b+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=1 \\ 2b^2+2b+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$D=4-4\cdot2<0$

$$\begin{cases} b=1 \\ a=\dfrac{9-8b^2}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=1 \\ a=\dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2y^2=\dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2=1-x^2 \\ x^2(1-x^2)=\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

$$x^2-x^4=\frac{1}{4} \,\Big|\cdot 4 \Rightarrow 4x^4-4x^2+1=0 \Rightarrow (2x^2-1)^2=0 \Rightarrow 2x^2-1=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt2}=\pm\frac{\sqrt2}{2};\ y^2=1-x^2=\frac{1}{2} \Rightarrow y=\pm\frac{\sqrt2}{2}$$

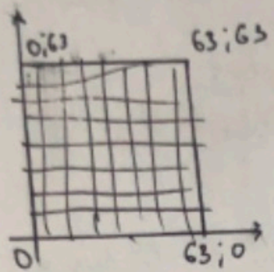
Ответ: $\left(-\frac{\sqrt2}{2};-\frac{\sqrt2}{2}\right);\left(-\frac{\sqrt2}{2};\frac{\sqrt2}{2}\right);\left(\frac{\sqrt2}{2};-\frac{\sqrt2}{2}\right);\left(\frac{\sqrt2}{2};\frac{\sqrt2}{2}\right)$

1

211005222 (U319648 M1275219)

Чистовик, 12 вар.

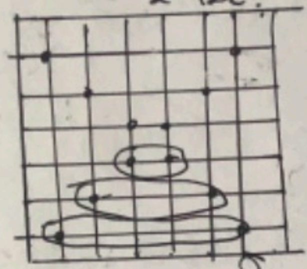
№5



Узел лежит на прямой $y=x$ или $y=63-x$ – значит, что точка лежит на диагонали квадрата.

Всего выбрать 2 точки из $2\cdot 62=124$ можно C_2^{124} спос. (на диагонали 62 узла)

$$C_2^{124}=\frac{124!}{2\cdot 122!}=\frac{123\cdot 124}{2}=123\cdot 62=7626 \text{ способов.}$$



т.к. $63 \not\vdots 2$, то точки будут выглядеть так; чтобы оба узла не лежали на прямой парал. оси, надо из 7626 вычесть 4 ситуации такого вида (4, т.к. квадрат можно перевернуть)

Всего 31 пара таких точек. Тогда, кол-во способов =

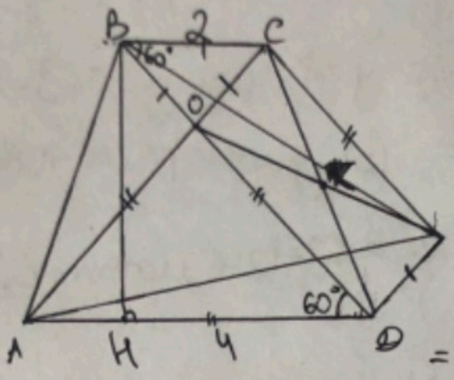
$= 7626-4\cdot 31=7626-124=7502$

Ответ: 7502 способа

2

12 вар

№6 Чистовик, 12 вариант



1) Т.к. $\angle BDA = \angle CBD = 60°$, то $BC \parallel AD \Rightarrow$
$\Rightarrow ABCD$ – трапеция.

$\triangle BOA = \triangle COD$ по I пр. рав. треуг. $\Rightarrow AB = CD \Rightarrow$
$\Rightarrow ABCD$ – равнобедренная трапеция

T Пусть $CK = KD$. Тогда, т.к. T – симметр. O, то $OK = KT \Rightarrow OCTD$ – паралл. по признаку $\Rightarrow$
$\Rightarrow CT = OD$; $CO = TD$, $AC \parallel TD$; $CT \parallel BD$

$\angle ACT = \angle AOD = 60°$. Аналогично, $\angle ODT = 60° \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle BCT = \angle ADT = 120°$. Тогда $\triangle ADT = \triangle TCB$ по I пр. рав. треуг.
$\Rightarrow \underline{AT = BT}$.

$\triangle BCD = \triangle DTB$, т.к. $BC = DT$ по док. выше, BD – общ, $\angle DBC = \angle BDT = 60°$
$\Rightarrow CD = TB$; $CD = AB$, т.к. трапеция равноб. $\Rightarrow \underline{AB = TB}$. Тогда,
$AT = BT = AB \Rightarrow \triangle ABT$ – равнос.

2) $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot BH = 3BH$; $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2}$ – по т. Пифагора
$\Rightarrow BH = \sqrt{AB^2 - 1}$ ($AH = 1$, т.к. $ABCD$ – равноб. трапеция)

$$S_{ABT} = AB \cdot AB \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 60° = \frac{AB^2}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{4AB^2}{\sqrt{3}}$$

(1): $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{4AB^2}{\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{AB^2 - 1}}$; по т. косинусов в $\triangle AOB$:
$AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO \cdot BO \cdot \cos 120° \Rightarrow$
$\Rightarrow AB^2 = 16 + 4 + 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 28 \Rightarrow AB = 2\sqrt{7}$

$$(1) = \frac{4 \cdot 28}{\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{28 - 1}} = \frac{4 \cdot 28}{\sqrt{3} \cdot 3 \cdot 3\sqrt{3}} = \frac{112}{27}$$

Ответ: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{112}{27}$

3

211005222 (U319648 M1275219)

12 вар

Черновик

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2}+x^2y^2=\dfrac{5}{4} \\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2=\dfrac{9}{4} \end{cases}$$

$$\frac{1+x^2y^2(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=\frac{5}{4}$$

$$4+4x^2y^2(x^2+y^2)=5x^2+5y^2$$

$$8(x^2+y^2)^2+4x^2y^2=9$$

$$2(x^2+y^2)^2+x^2y^2=\frac{9}{4}$$

$$\begin{cases} 4+4ab=5b \\ 8b^2+4a=9 \end{cases} \qquad a=\frac{9-8b^2}{4}$$

$$4+\cancel{4}(9-8b^2)\cdot b=5b$$

$$4+9b-8b^3=5b \Rightarrow 8b^3-4b-4=0$$

$$2b^3-b-1=0$$

$$(b-1)(2b^2+2b+1)=0$$

$$b=1$$

Черновик, 12 вариант

211005222 (U319648 M1275219)

черновик 12 вар

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2}+x^2y^2=\dfrac{5}{4} \\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2=\dfrac{9}{4} \end{cases}$$

$x^2=a \quad y^2=b$

$ab=4$

$\dfrac{1}{a+b}+\cancel{a}b=\dfrac{5}{4}$ $\quad \dfrac{ab(a+b)+1}{a+b}=\dfrac{5}{4}$ $\quad a+b=v$

$2a^2+2b^2+5ab=\dfrac{9}{4}$

$\cancel{2a^2+2b^2}\ 2(a+b)^2+ab=\dfrac{9}{4}$

$\dfrac{4v+1}{v}=\dfrac{5}{4}$ $\quad 5v=44v+1$ $\quad 5v=4\left(\dfrac{9}{4}-2v^2\right)v+1$

$2v^2+4=\dfrac{9}{4}$ $\quad 4=\dfrac{9}{4}-2v^2$ $\quad 5v=9v-8v^3+1$

$8v^3-4v-1=0$

$\dfrac{\overbrace{x^2y^2}^{=a}\overbrace{(x^2+y^2)}^{=b}+1}{\underbrace{x^2+y^2}_{=b}}=\dfrac{5}{4}$

$2\underbrace{(x^2+y^2)^2}_{=b}+\underbrace{x^2y^2}_{=a}=\dfrac{9}{4}$

$2b^2+a=\dfrac{9}{4}$ $\quad 2b^2+a=\dfrac{9}{4}$

$\dfrac{ab+1}{b}=\dfrac{5}{4}$ $\quad 4ab+4=5b \to$

$5b-4ab=4$

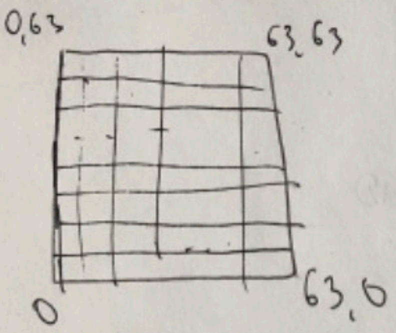
$b(5-4a)=4$

$b=\dfrac{4}{5-4a}$

$2\left(\dfrac{4}{5-4a}\right)^2+a=\dfrac{9}{4}$

$2\cdot\dfrac{16}{25-40a+16a^2}+a=\dfrac{9}{4}$

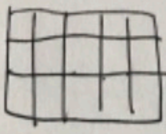
m

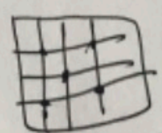


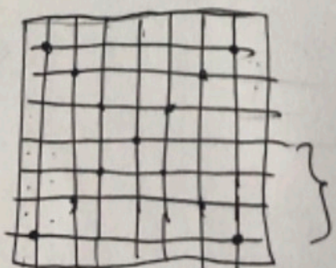
$\cancel{C^n_k=C^{62\cdot 62}_2=\dfrac{62!\cdot 62!}{2\cdot(62\cdot 62-2)!}}$

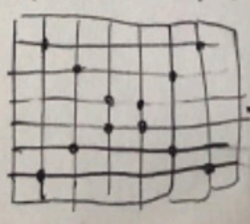
$62 \quad C^{144}_2=\dfrac{144!}{2\cdot 142!}=\dfrac{143\cdot 144}{2}=143\cdot 72-$

$-4\cdot 31$









$=32$

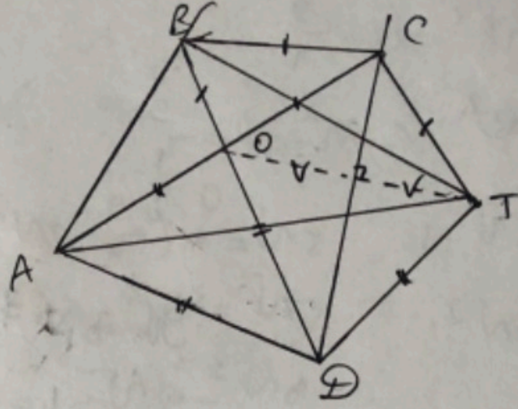
211005222 (U319648 M1275219)

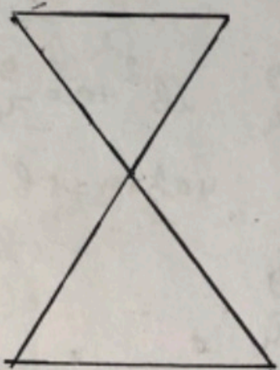
Черновик, 12 вариант

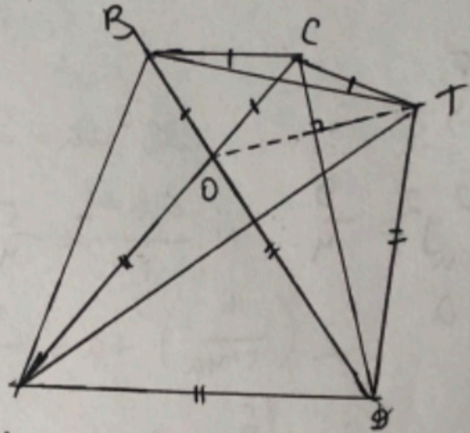
$$\begin{array}{r} \times\ 123 \\ 62 \\ \hline +\ 246 \\ 738 \\ \hline 7626 \end{array}$$

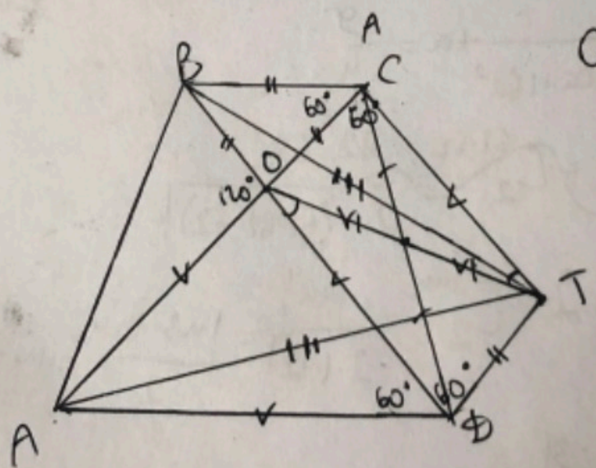
$$\begin{array}{r} -\ 7626 \\ 124 \\ \hline 7502 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} -7626 & 62 \\ \cline{2-2} 62 & 123 \\ \cline{1-1} 142 & \\ -124 & \\ \cline{1-1} 186 & \end{array}$$









OTD =

BCD =? BTD