Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

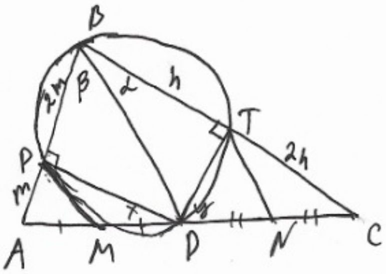
Шифр: **211005192**

ID профиля: **348637**

Вариант 12

Чистовик

①



Решение.

1) Пусть $\angle CBD = \alpha$, $\angle ABD = \beta$.

Проведём хорды PD и TD, т.к. по усл. BD – диам., то $\angle BPD = \angle BTD = 90°$ (впис. угол, опир. на диам.)

$\angle BDT = 90° - \alpha$, $\angle BDP = 90° - \beta$. $\Rightarrow \angle ADP + \angle CDT = 180° - (90° - \alpha) - (90° - \beta) = \alpha + \beta$.

2) Из п.1 след. что $\triangle APD$ ($\angle APD = 90°$) и $\triangle CTD$ ($\angle CTD = 90°$) – прямоуг. и из усл. PM и TN – мед. (M – сер. AD, N – сер. DC). Медиана в прямоуг. тр-е, провед. из верш. прямого угла равна половине гип. $\Rightarrow PM = AM = DM$, $TN = DN = CN$. $\Rightarrow \triangle PMD$ и $\triangle TND$ – р/б и $\angle MPD = \angle MDP$, $\angle NDT = \angle NTD$. Из п.1 ! $\angle ADP + \angle CDT = \alpha + \beta$. Пусть $\angle ADP = x$, $\angle CDT = y$ и $x + y = \alpha + \beta$.

$\angle PMD = 180 - 2x$, $\angle TND = 180 - 2y$ (след. из суммы угл. тр-ка). Т.к. $PM \parallel TN$, то $\angle PMD + \angle TND = 180°$ (одностор.), $180 - 2x + 180 - 2y = 180$

$2x + 2y = 180$

$x + y = 90 \Rightarrow \alpha + \beta = 90 = \angle ABC$

$MP = \frac{1}{2}$, $NT = 1$, $BD = \frac{4}{3}$.

Из п.2 след. что $AD = 2MP = 1$, $CD = 2NT = 2$.

$\angle ABC = 90°$, $\angle BPD = \angle BTD = 90° \Rightarrow$ четырёхуг. $BPDT$ – прямоуг. и ~~$PD \parallel BC$, $TD \parallel AB$~~. $PD = BT$, $TD = BP$.

$\triangle APD \sim \triangle ABC$ (по 2 углам: $\angle A$ – общ., $\angle APD = \angle ABC = 90°$)

$\frac{AD}{AC} = \frac{PD}{BC} = \frac{AP}{AB} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$

$\triangle CTD \sim \triangle CBA$ (по 2 углам: $\angle C$ – общ., $\angle CTD = \angle CBA = 90°$)

$\frac{CD}{CA} = \frac{TD}{BA} = \frac{CT}{CB} = \frac{2}{1+2} = \frac{2}{3}$

$\cancel{\begin{cases} \frac{PD}{BC} = \frac{1}{3} \\ \frac{CT}{CB} = \frac{2}{3} \end{cases}} \Rightarrow \cancel{\begin{cases} \frac{PD}{PD+CT} = \frac{1}{3} \\ \frac{CT}{PD+CT} = \frac{2}{3} \end{cases}}$

~~$\triangle APM \sim \triangle DTN$ (по 2 углам: $\angle AMP = \angle DNT$ – соответств. при парал. пр.)~~

$\cancel{\frac{AP}{DT} = \frac{AP}{BP} = \frac{AM}{DN} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}}$

$\cancel{\frac{AP}{BP} = \frac{1}{2}, \frac{BP}{BA} = \frac{2}{3} \Rightarrow 2AB = \frac{2}{3}AB}$

~~Из теор. Пифагора в $\triangle BDT$:~~

$\cancel{TD^2 + BT^2 = \frac{16}{9}}$

$\frac{AP}{AB} = \frac{1}{3} \Rightarrow AP = m,\ BP = 2m.$ Чистовик

Из теор. Пифагора в $\triangle BPD$ и $\triangle APD$: $\begin{cases} 4m^2 + PD^2 = \frac{16}{9} \\ m^2 + PD^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow 3m^2 = \frac{7}{9}$

$m^2 = \frac{7}{27}$

$m = \sqrt{\frac{7}{27}} \Rightarrow AB = 3\sqrt{\frac{7}{27}}$

$\frac{CT}{CB} = \frac{2}{3} \Rightarrow CT = 2n,\ BT = n.$

Из теор. Пифагора в $\triangle BTD$ и $\triangle DTC$: $\begin{cases} n^2 + DT^2 = \frac{16}{9} \\ 4n^2 + DT^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow 3n^2 = \frac{20}{9}$

$n^2 = \frac{20}{27}$

$n = \sqrt{\frac{20}{27}} \Rightarrow BC = 3\sqrt{\frac{20}{27}}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot \sqrt{\frac{20 \cdot 7}{27^2}} = \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{27} \cdot \sqrt{140} = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{140}$

Ответ: а) $90°$ б) $\frac{\sqrt{140}}{6}$

2

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$

$4+3x-x^2 = -(x^2-3x-4) = -(x-4)(x+1) = (4-x)(x+1)$

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{(4-x)(x+1)}$

$\begin{cases} 4-x \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ x \geq -1 \end{cases}$ – ограничения

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} = 2\sqrt{(4-x)(x+1)} - 3$

$x+1+4-x - 2\sqrt{(x+1)(4-x)} = 4(4-x)(x+1) + 9 - 12\sqrt{(4-x)(x+1)}$

$4(4-x)(x+1) - 10\sqrt{(4-x)(x+1)} + 4 = 0$

$t = \sqrt{(4-x)(x+1)},\ t \geq 0$

$4t^2 - 10t + 4 = 0$

$2t^2 - 5t + 2 = 0$

$D = 25 - 16 = 9$

$t_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4} = 2;\ \frac{1}{2}$

$\left[\begin{array}{l} \sqrt{(4-x)(x+1)} = 2 \\ \sqrt{(4-x)(x+1)} = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (4-x)(x+1) = 4 \\ (4-x)(x+1) = \frac{1}{4} \end{array}\right.$

$4x+4-x^2-x-4=0$

$3x - x^2 = 0$

$x(3-x) = 0$

$\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \end{array}\right. \in$ огр.

$4x+4-x^2-x-\frac{1}{4} = 0$

$3x - x^2 + 3\frac{3}{4} = 0$

$x^2 - 3x - \frac{15}{4} = 0$

$4x^2 - 12x - 15 = 0$

$D_1 = 36 + 60 = 96 = (4\sqrt{6})^2$

$x_{1,2} = \frac{6 \pm 4\sqrt{6}}{4} = \frac{3 \pm 2\sqrt{6}}{2}$

211005192 (U348637 M1278516)

Чистовик

$\cancel{2 < \sqrt{6} < 3}$

$\cancel{4 < 2\sqrt{6} < 6}$

$\cancel{7 < 3+2\sqrt{6} < 9}$

$4 < \sqrt{24} < 5$

$7 < 3+\sqrt{24} < 8$

$3{,}5 < \frac{3+\sqrt{24}}{2} < 4 \Rightarrow \frac{3+\sqrt{24}}{2} \in$ отн.

$-4 > -\sqrt{24} > -5$

$-1 > 3-\sqrt{24} > -2$ $\qquad \frac{3-\sqrt{24}}{2} \in$ отн

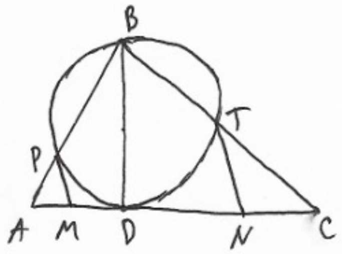
$-\frac{1}{2} > \frac{3-\sqrt{24}}{2} > -1$

Ответ: 0; 3; $\frac{3\pm\sqrt{24}}{2}$

3

~~Чистовик~~ Черновик

1



Решение:

$\begin{cases} D \in AC \\ BD \text{ - диам. окр.} \end{cases} \Rightarrow AC$ - касат. окр., D - т. кас.

$x+1+4-x-2\sqrt{(x+1)(4-x)} =$

$= 4(4-x)(x+1)+9-12\sqrt{(4-x)(x+1)}$

$5-2\sqrt{(x+1)(4-x)} = 4(4-x)(x+1)-12\sqrt{(4-x)(x+1)}+9$

$10\sqrt{(4-x)(x+1)} = 4(4-x)(x+1)+4$

t

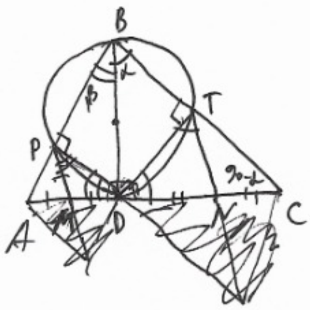
$10\sqrt{t} = 4t+4$

$5\sqrt{t} = 2t+2$

211005192 (U348637 M1278516)

Черновик

PM||TN



$180-2\alpha+180-2\beta=180$

$2\alpha+2\beta=180$

$20+30$

$25\ 25$

130 130

140

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211005192**

ID профиля: **348637**

Вариант 12

4 Чистовик

$$\begin{cases}\frac{1}{x^2+y^2}+x^2y^2=\frac{5}{4}\\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2=\frac{9}{4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{a}+b=\frac{5}{4}\\ 2a^2+b=\frac{9}{4}\\ a=x^2+y^2\\ b=x^2y^2\end{cases}$$

$$2a^2-\frac{1}{a}=1$$

$$\frac{2a^3-a-1}{a}=0 \qquad a\neq 0$$

$$2a^3-a-1=0$$

$$2a^3-2a+a-1=2a(a^2-1)+a-1=$$
$$=(a-1)(2a(a+1)+1)=(a-1)(2a^2+2a+1)=$$
$$=2(a-1)\left(a^2+a\cdot 2\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)=2(a-1)\cdot$$
$$\cdot\left(\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right)$$

$$\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}>0$$

$$(a-1)\left(\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right)=0$$

$$a=1$$

$$x^2+y^2=1$$

$$\frac{1}{1}+x^2y^2=\frac{5}{4}$$

$$x^2y^2=\frac{1}{4}$$

$$\begin{cases}x^2y^2=\frac{1}{4}\\ x^2+y^2=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}xy=\pm\frac{1}{2}\\ (x+y)^2-2xy=1\end{cases}$$

1) $xy=\frac{1}{2}$

$$(x+y)^2=2$$

$$x+y=\pm\sqrt{2}$$

1.1. $\begin{cases}x+y=\sqrt{2}\\ xy=\frac{1}{2}\end{cases}$

$$y=\sqrt{2}-x$$

$$x(\sqrt{2}-x)=\frac{1}{2}$$

$$-x^2+\sqrt{2}x-\frac{1}{2}=0$$

$$x^2-\sqrt{2}x+\frac{1}{2}=0$$

$$D=2-2=0$$

$$x_{12}=\frac{\sqrt{2}\pm 0}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad y_{12}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

1.2. $\begin{cases}x+y=-\sqrt{2}\\ xy=\frac{1}{2}\end{cases}$

$$y=-\sqrt{2}-x$$

$$-x(\sqrt{2}+x)-\frac{1}{2}=0$$

$$x^2+\sqrt{2}+\frac{1}{2}=0$$

$$D=2-2=0$$

$$x_{12}=\frac{-\sqrt{2}\pm 0}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

2) $xy=-\frac{1}{2}$

$$(x+y)^2=0 \qquad -y^2=-\frac{1}{2} \qquad y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

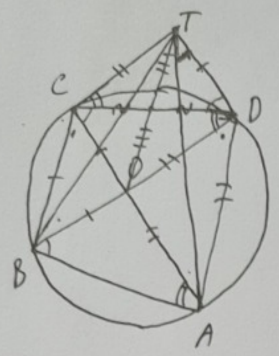
$$x=-y$$

Ответ: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Чистовик

8

Решение:



1) Проведём отр. CT и DT, четырёхуг. $CTDO$ - парал-м, т.к. его диаг. делятся т. пересеч. пополам.

$\triangle COD = \triangle BOA$ (по 2 ст. и углу между ними: $\angle COD = \angle BOA$ - верт.)

$\angle CDO = \angle BAO$, $\angle DCO = \angle ABO$. ~~~~ $\angle COB = \angle ABO + \angle BAO$ (внешн.),

$\angle ABO + \angle BAO = 60° = \angle ABO + \angle CDO$, ~~~~ $\angle B + D = \angle CBO + \angle ABO + \angle CDO + \angle ADO = 60° + 60° + 60° = 180°$ => около $ABCD$ можно опис. окр.

2) $\angle ACB = \angle ADB = 60°$ ~~(впис. углы, опир. на одну дугу)~~). $\angle BDC = \angle TCD$, $\angle ACD = \angle TDC$ (накрест. леж. при противополож. ст. парал.-а). $\angle BCT = \angle ADT$ => $\triangle BCT = \triangle TDA$ (по 2 ст. и углу межд. ними), $BT = AT$.

Из п. 1 след. что ~~~~ $\angle BCT = 60° + 60° = 120° = \angle DCO + \angle DCT + \angle OCB$, $\angle ADT = 120°$.

$\angle CBT + \angle CTB = 180° - 120° = 60°$, но из рав-ва тр-в: $\angle CBT = \angle DTA$ => $\angle CTB + \angle DTA = 60°$.

$\angle COD = 180° - \angle BOC = 120°$ (смежн.), $\angle CTD = \angle COD$ (противолеж. углы парал.-а), $\angle CTD = 120°$,

$\angle BTA = \angle CTD - (\angle CTB + \angle DTA) = 60°$.

$\angle BTA = 60°$, $BT = AT$ => $\angle ABT = \angle BAT = \frac{180° - 60°}{2} = 60°$ => $\triangle ABT$ - правильный, т.к. все его углы равны $60°$ - ч.т.д.

3) $BC = 2$, $AD = 4$

Применим теор. косинусов к $\triangle BOA$: $AB^2 = OB^2 + OA^2 - 2 OB \cdot OA \cdot \cos BOA$

$AB = \sqrt{4 + 16 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot (-\frac{1}{2})} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

$S_{ABT} = \frac{1}{2} AB \cdot AT \cdot \sin 60° = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{7} \cdot 2\sqrt{7} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 7\sqrt{3}$

$S_{ABCD} = S_{BOC} + S_{AOD} + S_{COD} + S_{BOA} = 2 S_{COD} + S_{BOC} + S_{AOD}$ *

$S_{BOC} = \frac{1}{2} OC \cdot OB \cdot \sin 60° = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

$S_{COD} = \frac{1}{2} \cdot OC \cdot OD \cdot \sin 120° = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

~~$S_{ABCD} = 2(\sqrt{3} + 2\sqrt{3}) = 6\sqrt{3}$~~

~~$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{7\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} = \frac{7}{6}$~~

$S_{AOD} = \frac{1}{2} AO \cdot OD \cdot \sin 60° = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$

$S_{ABCD} = 2 \cdot 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{7\sqrt{3}}{8\sqrt{3}} = \frac{7}{8}$ Ответ: $\frac{7}{8}$

т.к. по усл. BOC и AOD - прав., то $OB = OC = BC$, $OA = OD = AD$ и все углы этих тр-в равны $60°$.

По св-ву парал.-а $OD = CT$, $OD \parallel CT$, $OC = TD$, $OC \parallel TD$.

* $S_{COD} = \frac{1}{2} \cdot OC \cdot OD \cdot \sin COD$

$S_{AOB} = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot BO \cdot \sin AOB$

$OC = BO$, $AO = DO$, $\angle COD = \angle AOB$ - верт.

⇓

$S_{COD} = S_{AOB}$