Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211005166**

ID профиля: **811208**

Вариант 12

1

Чистовик

Математика, 10 класс

Задание 2.

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$, ОДЗ: $x \in [-1; 4]$

$4+3x-x^2 = (x+1)(4-x)$

$\Rightarrow$ Замена: $x+1 = t \geq 0$
$4-x = n \geq 0$

$\sqrt{t} - \sqrt{n} + 3 = 2\sqrt{tn}$

$(\sqrt{t} - \sqrt{n}) = 2\sqrt{tn} - 3$

Возведем в квадрат:

$t + n - 2\sqrt{tn} = 4tn + 9 - 12\sqrt{tn}$

$t + n - 9 = -10\sqrt{tn} + 4tn$

$x+1+4-x-9 = -10\sqrt{tn} + 4tn$

$-4 = -10\sqrt{tn} + 4tn$

Замена $\sqrt{tn} = y \geq 0$

$4y^2 - 10y + 4 = 0$

$2y^2 - 5y + 2 = 0$

$D = 25 - 16 = 9$

$y = \frac{5 \pm 3}{4} = 2; \frac{1}{2}$

$\left[\begin{array}{l} y = 2 \\ y = \frac{1}{2} \end{array}\right.$

1°: $y = 2$.

$4+3x-x^2 = 4$

$\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \end{array}\right.$

2° $y = \frac{1}{2}$.

$4+3x-x^2 = \frac{1}{4}$

$16 + 12x - 4x^2 = 1$

$4x^2 - 12x - 15 = 0$

$D = 144 + 240 = 384$.

$x = \frac{12 \pm 4\sqrt{71}}{8} = \frac{3 \pm \sqrt{71}}{2} \Rightarrow \frac{3 \pm \sqrt{71}}{2}$. Не подходят по ОДЗ $\Rightarrow$ Ответ: $x = 0; 3$

1

Чистовик Математика, 10 класс

Задание 2.

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$, ОДЗ: $x \in [-1; 4]$

$4+3x-x^2 = (x+1)(4-x)$

$\Rightarrow$ Замена: $x+1 = t \geq 0$

$4-x = n \geq 0$

$\sqrt{t} - \sqrt{n} + 3 = 2\sqrt{tn}$

$(\sqrt{t} - \sqrt{n}) = 2\sqrt{tn} - 3$

Возведем в квадрат:

$t + n - 2\sqrt{tn} = 4tn + 9 - 12\sqrt{tn}$

$t + n - 9 = -10\sqrt{tn} + 4tn$

$x+1+4-x-9 = -10\sqrt{tn} + 4tn$

$-4 = -10\sqrt{tn} + 4tn$

Замена $\sqrt{tn} = y \geq 0$

$4y^2 - 10y + 4 = 0$

$2y^2 - 5y + 2 = 0$

$D = 25 - 16 = 9$

$y = \frac{5 \pm 3}{4} = 2; \frac{1}{2}$

$\left[\begin{array}{l} y = 2 \\ y = \frac{1}{2} \end{array}\right.$

1° $y = 2$.

$4+3x-x^2 = 4$

$\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \end{array}\right.$

2° $y = \frac{1}{2}$.

$4+3x-x^2 = \frac{1}{4}$

$16+12x-4x^2 = 1$

$4x^2 - 12x - 15 = 0$

$D = 144 + 240 = 384$.

$x = \frac{12 \pm 4\sqrt{71}}{8} = \frac{3 \pm \sqrt{71}}{2} \Rightarrow \frac{3 \pm \sqrt{71}}{2}$. Не подходят по ОДЗ $\Rightarrow$ Ответ: $x = 0; 3$

② Чистовик Математика, 10 класс.

Задание 3.

1) $2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0$ (коор. т. A)

2) $ax^2+4a^2x-ay+4a^3+2=0$ (парабола с в. в т. B)

3) $x+y=3$

1) $\cancel{2a}\ (x+y-a)^2=x^2+y^2+a^2+2xy-2ax-2ay$

$\Rightarrow$

$(x+y-a)^2+a^2-4ay+4y^2=0$

$(x+y-a)^2+(a-2y)^2=0$

$\begin{cases} x+y=a \\ a=2y \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} y=-x+a \\ y=\frac{a}{2} \end{cases}}$

То ~~есть данное ур-ние задает~~

2) $a\neq0$, т.к. $2\neq0$

$\Rightarrow x^2+4ax-y+4a^2+\frac{2}{a}=0$

$y=x^2+4ax+4a^2+\frac{2}{a}$

Найдем a, при которых парабола выше $y=3-x$

$x^2+4ax+4a^2+\frac{2}{a}>3-x$

$x^2+x(4a+1)+4a^2+\frac{2}{a}-3>0$

$D=16a^2+8a+1-16a^2-\frac{8}{a}+12=8a-\frac{8}{a}+13$

$\Rightarrow D<0$

$\frac{8a^2-8+13a}{a}<0$, $D=169+256=425=25\cdot17 \Rightarrow a=\frac{-13\pm5\sqrt{17}}{16}$.

$\frac{\left(a-\frac{-13+5\sqrt{17}}{16}\right)\left(a-\frac{-13-5\sqrt{17}}{16}\right)}{a}<0$

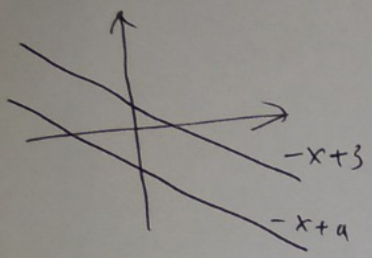
Задание 3 (продолжение)

$$a \in \left(-\infty; \frac{-13-5\sqrt{17}}{16}\right) \cup \left(0; \frac{-13+5\sqrt{17}}{16}\right)$$

$$\frac{-13-5\sqrt{17}}{16} \simeq -2,1$$

$$\frac{-13+5\sqrt{17}}{16} \simeq 0,5$$

1:



$a < 3$

$$x_{0\ \text{параболы}} = -2a, \Rightarrow y_{0\ \text{параболы}} = 4a^2 - 4a\cdot 2^2 + 4a^2 + \frac{2}{a} = \frac{2}{a}.$$

$$\Rightarrow \frac{2}{a} < -x+3$$

$$2a < x$$

$$\begin{cases} x < \dfrac{3a-2}{a} \\ x > 2a. \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{3a-2}{a} > 2a.$$

$$\frac{3a-2-2a^2}{a} > 0.$$

3

Чистовик

Математика, 10 класс

Задание 1

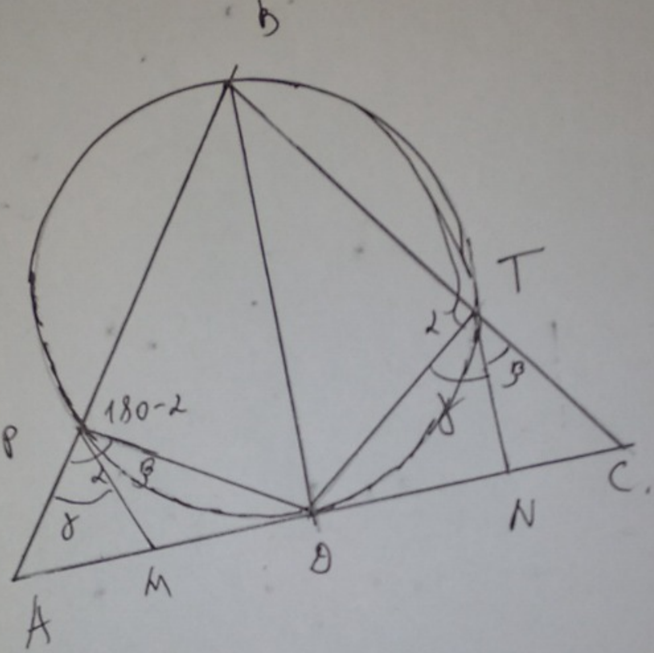
$TN \parallel PM$

BD – диаметр

M и N – сер. AD и DC соотв.

а) $\angle ABC = ?$

б) $S_{ABC} = ?$



Решение:

Т.к. $PBTD$ – четырехугольник, около которого описана окр.

$\Rightarrow \angle BPD = 180 - \alpha$, где $\alpha = \angle BTD$

$\Rightarrow BC \parallel PD$, ~~аналогично аналогично аналогично~~ аналогично PB и DT $\Rightarrow \angle APM = \angle DTN$

$\Rightarrow \angle MPB = \angle NTC = \beta$

$\angle DTN = 180 - \alpha - \beta = \cancel{\alpha + \beta}\ \alpha - \beta = \angle APM = \gamma$

$\Rightarrow 2\alpha = 180$

$\alpha = 90^\circ \Rightarrow \angle ABC = 90^\circ$

Ответ: $\angle ABC = 90^\circ$

Черновик

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$

$4-x \geq 0$

$x \leq 4$

$x \geq -1$

$4+3x-x^2=0$

$-(x^2-3x-4)=0$

$D=9+16=25$

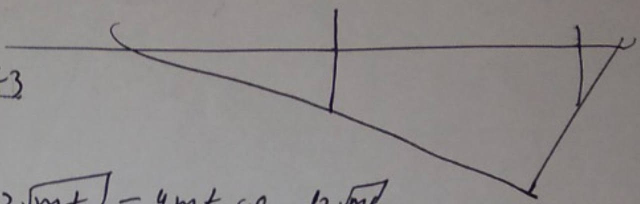
$x=\frac{3\pm5}{2}=4;-1$

$m = 4-x$

$t = x+3$

$(4-x)(x+1)=$

$\cancel{2\sqrt{mt} = \sqrt{m} - \sqrt{t} + 3}$



$\cancel{4mt = m =}$ $m+t-2\sqrt{mt} = 4mt+9-12\sqrt{mt}$

$\cancel{\sqrt{t}(2\sqrt{m}+1) = \sqrt{m}+3}$

$m+t-9-4mt=-10\sqrt{mt}$

....

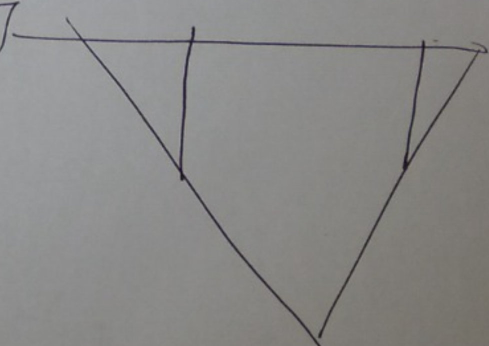
$5-9-4mt=-10\sqrt{mt}$

$\cancel{\sqrt{t}=\frac{\sqrt{m}+3}{2\sqrt{m}+1}}$

$4+4mt=10\sqrt{mt}$

$x+1+4-x-2\sqrt{(x+1)(4-x)} = 4(4+3x-x^2)+9-12\sqrt{(x+1)(4-x)}$

$5-9-4(4+3x-x^2) = -10\sqrt{(x+1)(4-x)}$



$2+2(4+3x-x^2)=5\sqrt{(x+1)(4-x)}$

$\sqrt{(x+1)(4-x)}=t$

$2t^2-5t+2=0$

$D=25-16=9$

$t=\frac{5\pm3}{4}=2;\frac{1}{2}$

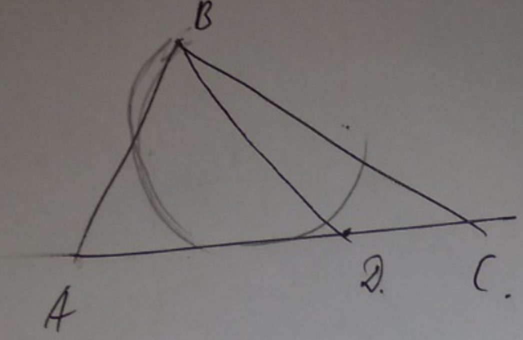
$\cancel{(x+1)}$

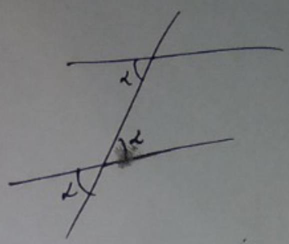
$4+3x-x^2=4$ $x=0;\ x=3$

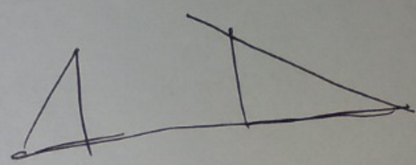
$4+3x-x^2=\frac{1}{4}$ $-4x^2+12x+15=0$

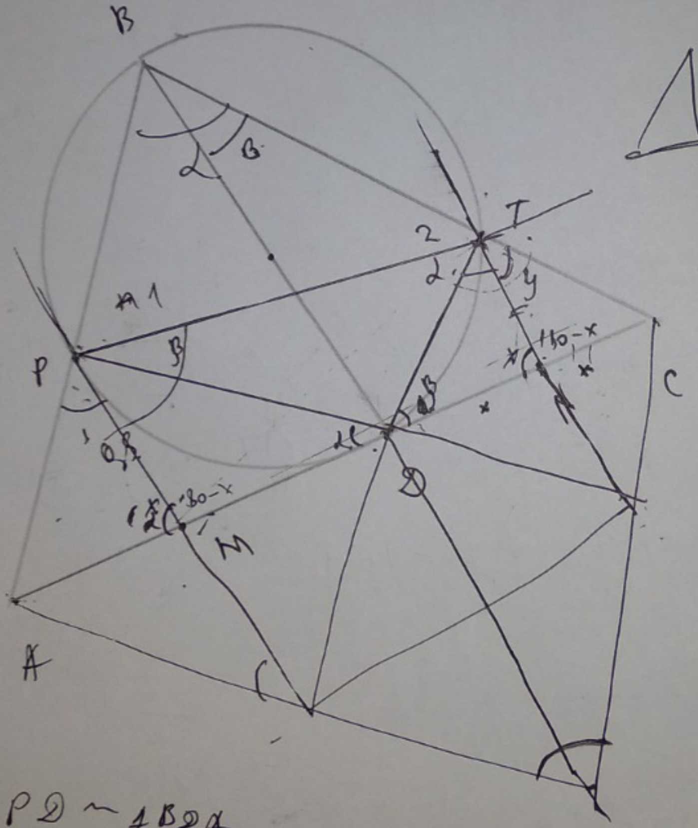
$4x^2-12x-15=0$

$D=36+240=276$









$180-2-2.$

$1+2+2+3=180$

$APD \sim \triangle BDA$

$AB \quad \frac{AD}{AB} = \frac{AP}{AD} = \frac{PD}{BD}.$

$\frac{DC}{BC} = \frac{DT}{BD} = \frac{TC}{DC}.$

$AD^2 = AB \cdot AP$

$DC^2 = TC \cdot BC.$

Черновик

$x = \frac{12 \pm \sqrt{384}}{8} =$

$384 \mid 2$

$\cancel{192} \mid 2$

$71 \mid 7$

1

$(x+y)^2+4y^2-6ay+2a^2-2ax=0$

$2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0$

$-4ay+4y^2+a^2.$

Т.А.

$(x+y-a)^2$

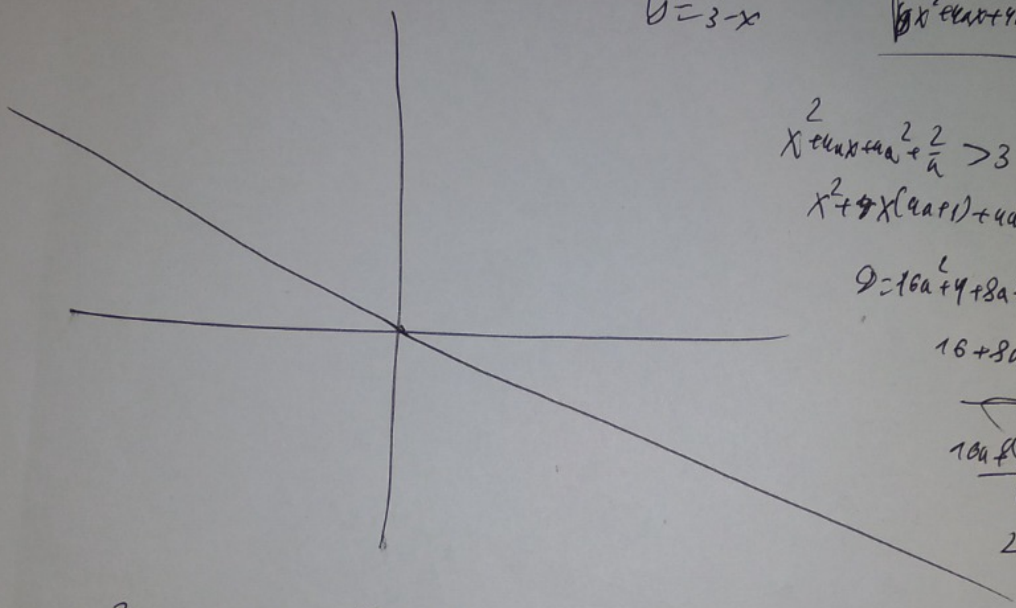
$x^2+y^2+a^2+2xy-2ax-2ay$

$4x^2+4a^2x-4y+4a^3+2=0 \Rightarrow 1^\circ.\ a=0$

$x^2+4ax-y+4a^2+\frac{2}{a}=0$

$y=3-x$

$\boxed{x^2+4ax+4a^2+\frac{2}{a}=y.}$



$x^2+4ax+4a^2+\frac{2}{a}>3-x$

$x^2+x(4a+1)+4a^2+\frac{2}{a}-3>0$

$D=16a^2+4+8a-16a^2-\frac{8}{a}+12$

$16+8a-\frac{8}{a}<0$

$\frac{16a+8a^2-8}{a}<0$

$\frac{2a+a^2-1}{4}<0$

$4+D=4+4=8$

$\frac{(a-\sqrt{8})(a+\sqrt{8})}{a}<0$

$-\sqrt{8}\quad 0\quad \sqrt{8}$

$\boxed{a\in(-\infty;-\sqrt{8})\cup(\sqrt{8};\sqrt{3}).}$

$2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0$

$(\cancel{x^2+2xy+y^2)+4y^2-2ax}$

$2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+6y^2-y^2=0.$

$\cancel{a-x}$

$\cancel{8\cdot 64}$

$a(2a-2x-6y)$

$169+4\cdot 64$

$2a(a-x-3y)+x^2+2xy+5y^2=0$

$\cancel{240}$

$a>3$

$256+169=425$

$425 \,|\, 25$

$-40\quad 17$

-25

-25

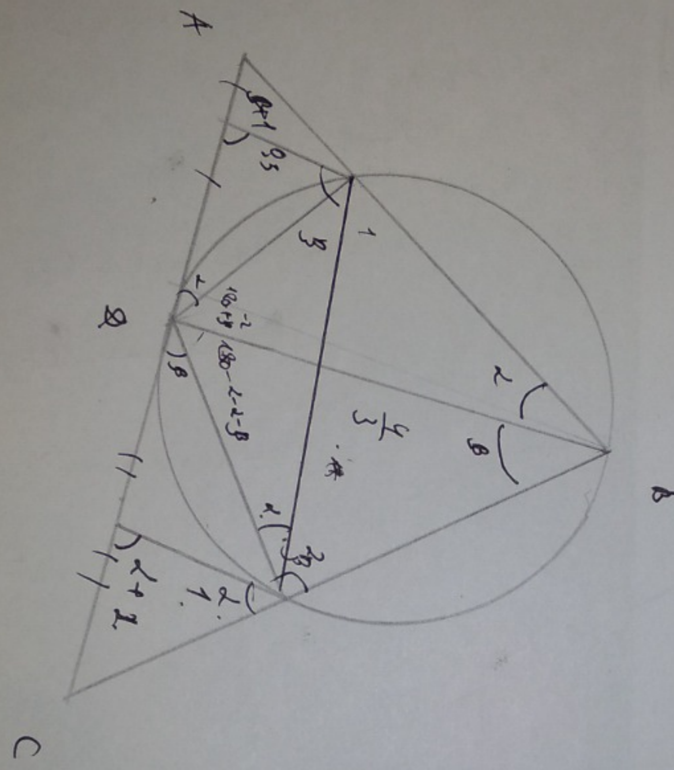
0

$x_2\quad 0\quad x_1$

5.5.17.

Кузнецов.

Черновик



Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211005166**

ID профиля: **811208**

Вариант 12

① Чистовик Математика, 10 класс

Задание 4.

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

Замена: $\begin{cases} x^2+y^2 = t > 0 \\ x^2y^2 = m > 0 \end{cases}$

$t^2 = x^4+y^4+2x^2y^2 \Rightarrow x^4+y^4 = t^2 - 2x^2y^2$

$$\begin{cases} \frac{1}{t} + m = \frac{5}{4} \\ 2(t^2-2m)+5m = \frac{9}{4}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{t} = \frac{5}{4} - m \ (1) \\ 2t^2 = \frac{9}{4} - m \ (2) \end{cases}$$

$2t^2 - \frac{1}{t} = 1.$ (если из (2) отнять (1))

$\frac{2t^3-1-t}{t} = 0$

$2t^3-1-t=0$

$t=1$ подходит

$$\begin{array}{r|l} 2t^3-t-1 & t-1 \\ \hline -\ 2t^3 & 2t^2+2t+1 \\ -\ +2t^2-t & \\ +2t^2-2t & \\ t-1 & \end{array}$$

$\Rightarrow 2t^3-1-t = (t-1)(2t^2+2t+1)$

$D<0$ (нет корней)

$\Downarrow$

$t=1 \Rightarrow m = \frac{1}{4}$ (из (1))

$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2\cdot y^2 = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow x^2 + \frac{1}{4x^2} = 1$

$\frac{4x^4+1-4x^2}{4x^2} = 0$

$(2x^2-1)^2 = 0.$

$x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

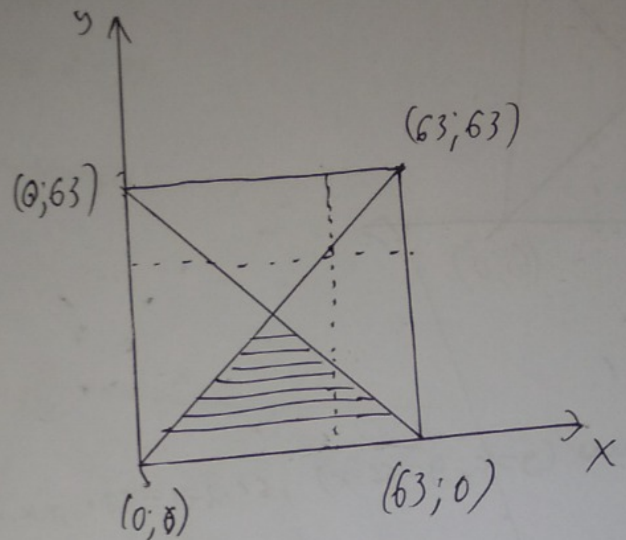
Ответ: $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}; \sqrt{\frac{1}{2}}\right); \left(\sqrt{\frac{1}{2}}; -\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$

$\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}; \sqrt{\frac{1}{2}}\right); \left(-\sqrt{\frac{1}{2}}; -\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$

(2)

Чистовик. Математика, 10 класс.

Задание 5



всего узлов $61^2=3671$.

всего узлов сетки на диагоналях ($y=x$; $y=63-x$): $61\cdot2-1$, т.к. пересечение учитывается дважды.

$30\cdot4=120$ — отрезков || коор. осям, концы которых принадлежат диагоналям

1°. два узла принадлежат диагоналям:

$C_{121}^2-30\cdot4=60\cdot119$ способов выбрать два узла на диагоналях

2°. один узел на диагонали:

доступных для соединения узлов: $3671-121-60-60$, где -60 − ~~это~~ точки, при соединении с которыми образуются прямые || коор. оси

получается, для каждых из 121 точек доступно 3430 точек

⇒ способов: $121\cdot3430+60\cdot119$

по Ответ: 74170

(a+

a^2+2

2x+y.

③ Чистовик. Математика, 10 класс

Задание 6

Дано:

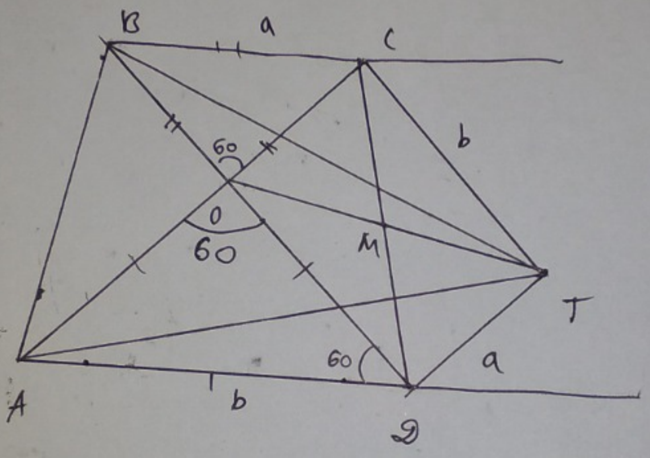
T – симметр. т. O отн. сер. CD, M – сер. CD

$\triangle AOD$ и $\triangle BOC$ – р/в

AC пересек. с BD в т. O

Д-ть:

а) $\triangle ABT$ – правильный



$\triangle ACD = \triangle BAD$ ($AC = BD$; AD – общ.; $\angle CAD = \angle BDA$), $\angle BCA = \angle CAD$

$\Rightarrow AB = CD$ и $BC \parallel AD \Rightarrow ABCD$ – р/б трапеция

Пусть $BC = a$, $AD = b$

$DT \parallel OC$ и $CT \parallel OD$, т.к. T симметрична отн сер. CD т.O. ($\triangle MTD = \triangle OMC$, т.к. $CM = MD, OM = MT$, $\angle DMT = \angle OMC$)

$\Rightarrow DT = a$, $CT = b$, $\angle BCT = 120° = \angle ADT = 120°$

$\Rightarrow \triangle ADT = \triangle BCT \Rightarrow BT = AT = \sqrt{a^2+b^2+ab}$ (из теоремы косинусов)

Посчитаем AB (в $\triangle ABD$) по теореме косинусов.

$(a+b)^2 + b^2 - 2(a+b)b \cdot \cos 60 = AB^2$

$a^2+2ab+2b^2-ab-b^2 = AB^2 = a^2+ab+b^2$, но $BT^2 = AT^2 = a^2+b^2+ab \Rightarrow AT = BT = AB \Rightarrow \triangle ABT$ – правильный

Ответ: а)

ч.т.д.

Задание 6 (продолжение) Чистовик . Математика, 10 класс

4

б) $BC = 2$

$AD = 4$

$$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = ?$$

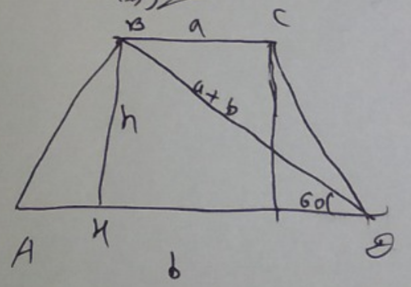
по выведенным в пункте а) формулам:

$$BT = \sqrt{a^2 + b^2 + ab} = \sqrt{4 + 16 + 8} = \sqrt{28}$$

$$\Rightarrow S_{ABT} = \frac{1}{2} \cdot \sin 60 \cdot BT^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 28 = 7\sqrt{3}$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(2+4) \cdot h = 3h$$

найдем h: $\cancel{(a+b)^2}$



$$h = (a+b) \cdot \sin 60 = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$ из $\triangle HBD$

$$S_{ABCD} = 3 \cdot 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$$

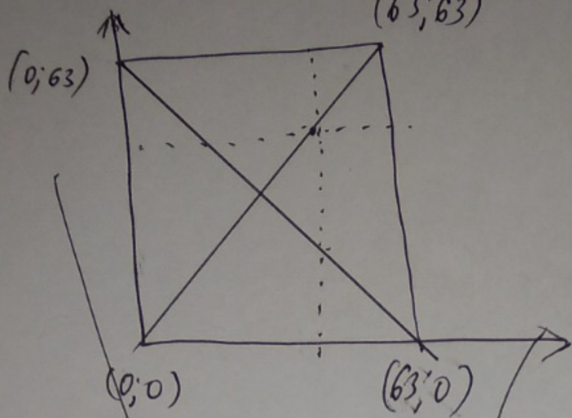
$$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{7}{9}$$

Ответ: б) $\frac{7}{9}$.

~~Чистовик~~ Черновик. Математика, 10 класс

Задание 5.

Черновик



всего узлов $61^2 = 3671$.

всего узлов на диагоналях ($y=x$; $y=63-x$), $61 \cdot 2 - 1 = 121$, т.к. пересечение считается дважды.

1°. два узла на диагоналях: способов. $C_{121}^{2} - 30 \cdot 4 = \frac{120 \cdot 121}{2} - 30 \cdot 4 = 60 \cdot 121 - 30 \cdot 4 = 60 \cdot 119$.

$60 \cdot 119$ способов выбрать два узла на диагоналях, с учетом того, что они должны ~~не~~ лежать на прямой, не параллельной коор. осям.

2°. один узел на диагонали:

всего точек можно выбрать $3671 - 121 - 60 - 60 = \cancel{3330}\ 3430$, где -60 это точки по оси X и Y

получается, для каждой 121 точек можно взять любую из 3430

$\Rightarrow$ $121 \cdot 3430$ способов.

$\Rightarrow$ $121 \cdot 3430 + 60 \cdot 119 =$

Ответ:

~~Чистовик~~ Черновик. Математика, 10 класс.

Задание 5.

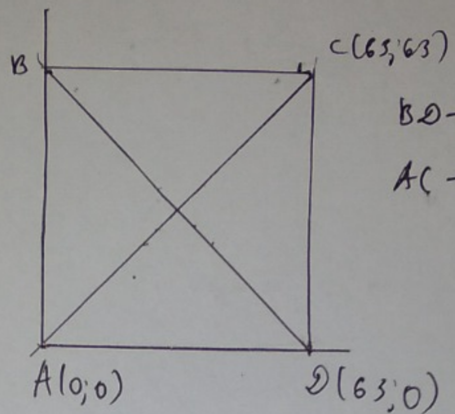
Дано:

(0;0) (63;63)

(0;63) (63;0)

$y = x$

$y = 63 - x$



BD – $63 - x$

AC – x

всего можно выбрать 61^2 узлов, $61^2 = 3671$

всего узлов сетки на $y = x$ и $y = 63 - x$, $61 \cdot 2 - 1$, т.к. пересечение считается дважды.

Всего параллельных отрезков, соединяющих узлы сетки ($y = x$; $y = 63 - x$), и параллельных координатных осям: $30 \cdot 4 = 120$

$C_{120}^{2} = \frac{120!}{118!\,2!} = \frac{119 \cdot 120}{2} \overset{60 \cdot 119 - 120}{=} \cancel{7080 - 119}$ – число отрезков, непараллельных коор. осям, и концы которых принадлежат $y = x$, $y = 63 - x$ – ~~3~~ диагоналям квадрата пересечение не учитываем

$\cancel{\left(C_{3550}^{121} = \frac{3550!}{3429!\,121!} = \frac{3430 \cdot 3431 \cdot \ldots \cdot 3550}{121!}\right)}$, ~~штр~~

$2C_{61}^{2} = 60 \cdot 61$ – способов выбрать на диагоналях.

Черновик.

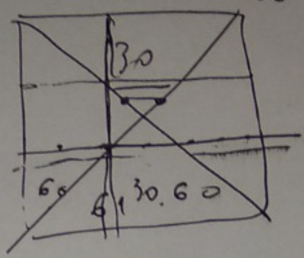
$C^{121}_{61^2} = \frac{3671!}{3550! \cdot 121!} = 35501 \ldots$

$\times \begin{array}{r} 3430 \\ 121 \end{array}$

$\times \begin{array}{r} 61 \\ 61 \\ \hline 61 \\ 361 \\ \hline 3671 \end{array}$

$- \begin{array}{r} 120 \\ \hline 3550 \end{array}$

3671.



$\times \begin{array}{r} 343 \\ 121 \\ \hline 343 \\ 686 \\ \hline 67030 \end{array}$

$\times \begin{array}{r} 119 \\ 60 \\ \hline 7140 \end{array}$

$C^2_{120} = \frac{120!}{118! \cdot 2!} = \frac{119 \cdot 120}{2} = 60 \cdot 119. - 120.$

$C^{12\cancel{0}1}_{355\cancel{0}1} = \frac{3551!}{343\cancel{0}1! \cdot 121!} = \frac{3432 \cdot 3433 \cdot 3434 \cdot \ldots}{121!}$

121 120

3550 3551.

$+ \begin{array}{r} 67030 \\ 7140 \\ \hline 74170 \end{array}$

$\cancel{C^{121}_{3550}}$

$121 \cdot C^{3550-120}_{\cancel{355}3550} = \frac{\cancel{34}3550!}{120! \cdot 3430!}$

$121 \cdot C^1_{3430} =$

$C^2_{61} + C^2_{61} = 2 \cdot \frac{61!}{59! \cdot 2!} = 60 \cdot 61.$

Черновик

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2}+x^2y^2=\dfrac{5}{4} \\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2=\dfrac{9}{4} \end{cases}$$

~~120 3430 t~~

3430 · 120.

$\cancel{80}$ { 30 (2 · 121 − 4)

60 (121 − 2)

1.19 · 60.

$x^2+y^2=t$ $\Rightarrow$ $2(x^4+y^4)=t^2-2m$

$x^2y^2=m$

~~120~~

· 121

$$\begin{cases} \dfrac{1}{t}+m=\dfrac{5}{4} \\ 2(t^2-2m)+5m=\dfrac{9}{4} \end{cases}$$

$2t^3-t-1 \mid t-1$

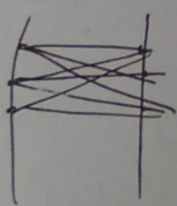
$\underline{2t^3-2t^2}$ $\quad 2t^2$

121 · 120

1, 2, 3, 4, 5

$$\begin{cases} 2t^2+m=\dfrac{9}{4} \\ 1+mt=\dfrac{5}{4}t \end{cases}$$

$m=2t^2-\dfrac{9}{4}$ $\Rightarrow$



$1+2t^3-\dfrac{9}{4}t=\dfrac{5}{4}t$

$1+2t^3-\dfrac{9}{4}t=\dfrac{5}{4}t$

$4+8t^3=14t$

$2+4t^3=7t$

121.

$4+8t^3=14t$

120

$\cancel{8t^3}$ $4t^3-7t+2=0$

120

121

$x^2=\dfrac{1}{2}$

$y^2=\pm\dfrac{1}{2}.$

1 2 3 4

1 2 3 4 5 6 7 8

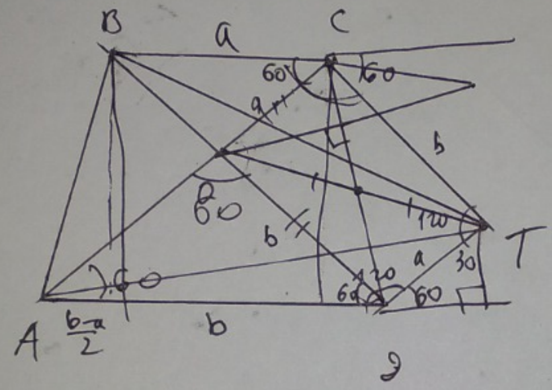
C_8^2 ; 8 · 7.

$\dfrac{8!}{6!\,2!}=\dfrac{7\cdot 8}{2}$

$C_4^2=\dfrac{4!}{2!\,2!}=\dfrac{3\cdot 4}{2}=6$

4 · 3 = 12

Черновик.



$\sqrt{a^2+b^2+2ab} = x^2$

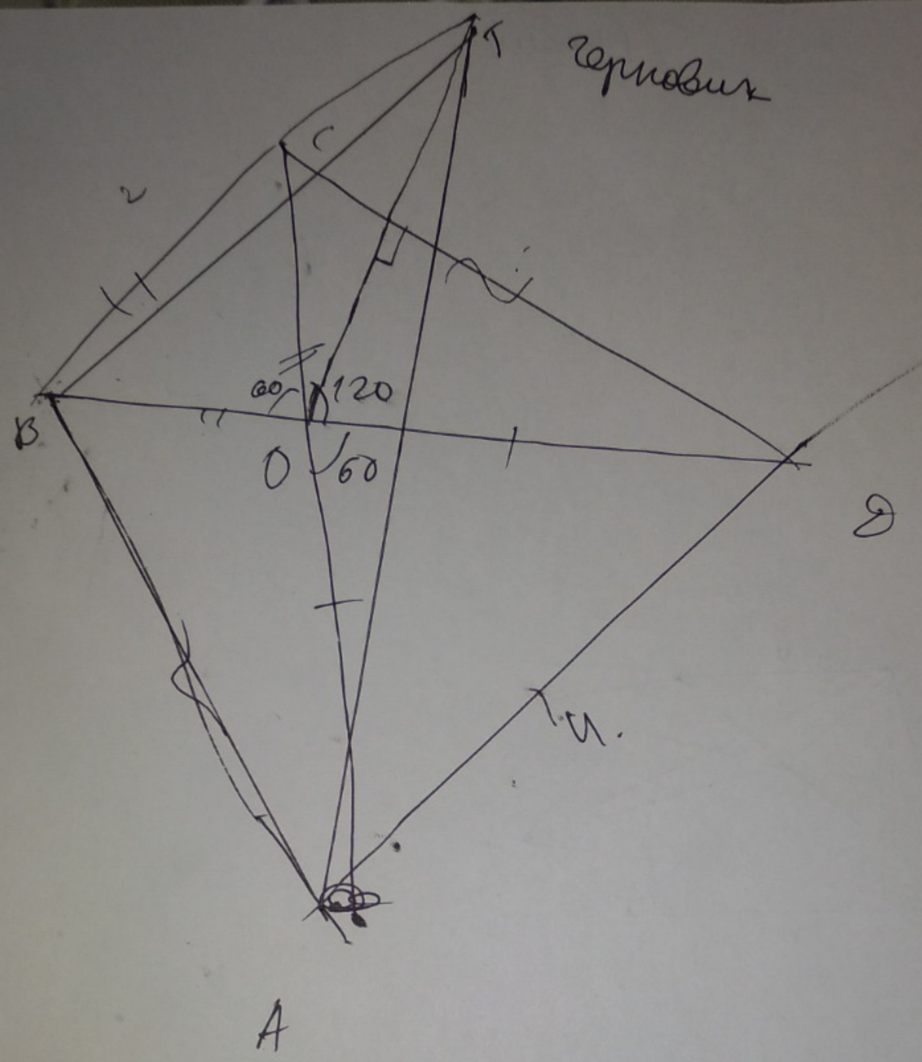
$b - \frac{b-a}{2} = \frac{b+a}{2} \cdot \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{a+b}{2}\right)$

$\frac{3}{16}\left(\cancel{\frac{a+b}{2}}\right)(a+b)^2 + \frac{1}{4}\left(a-b\right)^2 = x$

$x = \frac{3}{16}(a^2+b^2+2ab) + \frac{1}{4}(a^2+b^2-2ab)$

$16x =$

Черновик



$$\frac{b-a}{2}$$

$$b - \frac{b-a}{2} = \frac{b+a}{2}$$