Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211005135**

ID профиля: **376626**

Вариант 12

Черновик

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 \cancel{+2\sqrt{4+3x-x^2}} - 2\sqrt{(x+1)(4-x)} = 0$$

$\sqrt{x+1} = a \Rightarrow a^2 = x+1$ $\qquad a - \sqrt{5-a^2} + 3 - 2a\sqrt{5-a^2} = 0$

$a^2 - 5 = x - 4$ $\qquad a + 3 = \sqrt{5-a^2}(1+2a)$

$-a^2 + 5 = 4 - x$

$$(a+3)^2 = (5-a^2)(1+2a)^2$$

$$a^2 + \overset{6a}{\cancel{8a}} + 9 = (5-a^2)(1+4a+4a^2)$$

$$a^2 + 6a + 9 = 5 + 20a + 20a^2 - a^2 - 4a^3 - 4a^4$$

$$4a^4 + 4a^3 - 18a^2 - 14a + 4 = 0$$

$$4 - 4 - 18 + 14 + 4 = 0$$

$$a = -1$$

$$\begin{array}{l|l} 4a^4 + 4a^3 - 18a^2 - 14a + 4 & a+1 \\ \hline -\ 4a^4 + 4a^3 & 4a^3 - 18a + 4 \\ \quad -18a^2 - 14a + 4 & \\ -\ -18a^2 - 18a & \\ \quad\quad -4a + 4 & \\ -\ \ -4a + 4 & \\ \quad\quad 0 & \end{array}$$

$$(a+1)(4a^3 - 18a + 4) = 0$$

$$4 \cdot 8 - 18 \cdot 2 + 4 = 0$$

$$a = 2 \Rightarrow \begin{array}{l|l} 4a^3 - 18a + 4 & a-2 \\ \hline -\ 4a^3 - 8a^2 & 4a^2 + 8a - 2 \\ \quad -\ 8a^2 - 18a + 4 & \\ \quad\quad 8a^2 - 16a & \\ \quad\quad -\ -2a + 4 & \\ \quad\quad\quad -2a + 4 & \\ \quad\quad\quad 0 & \end{array}$$

$$(a+1)(a-2)(4a^2 + 8a - 2) = 0$$

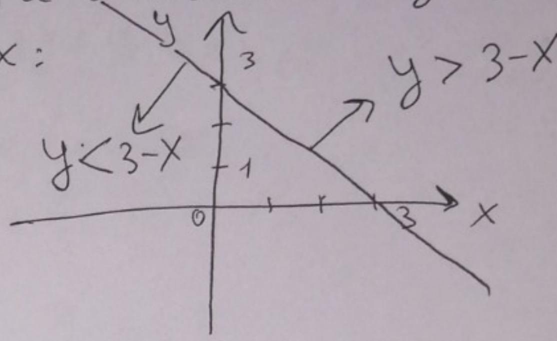
$$(a+1)(a-2)(2a^2 + 4a - 1) = 0$$

$\cancel{36} + 4 = 40$ $\qquad D/4 = 4 + 2 = 6$

211005135 (U376626 M1277630)

Чистовик

3. Координаты A заданы ур-я: $2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0$
Парабола с вершиной в т. B: $ax^2+4a^2x-ay+4a^3+2=0$
~~Также~~ Найти: такие a, что A и B лежат по одну сторону от $x+y=3 \Rightarrow y=3-x$:



Решение
Преобразуем ур-е параболы
$ay = ax^2+4a^2x+4a^3+2 \quad |:a$

$y = x^2+4ax+4a^2+\frac{2}{a}$

$\Rightarrow x_B = -\frac{b}{2a} = -\frac{4a}{2} = -2a \Rightarrow y_B = 4a^2-8a^2+4a^2+\frac{2}{a}=\frac{2}{a}$

Преобразуем ур-е, которым заданы коор. A:

$2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0$

$(a-x)^2+(a-3y)^2-4y^2+2xy=0$

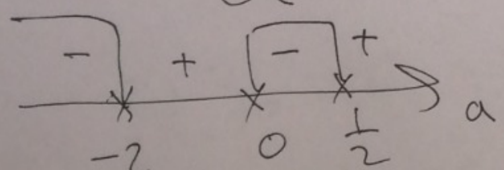
$(a-x)^2+(a-3y)^2+(y+x)^2-5y^2-x^2=0$

$(a-x)^2+(a-3y)^2+(y+x)^2-(x^2+5y^2)=0$

Рассмотрим I случай, когда $y+x<3$, тогда
$(y+x)^2<9$ и $\frac{2}{a}-2a<3$

$\Rightarrow \frac{2a^2+3a-2}{a}>0 \qquad D=25 \Rightarrow a=-2;\ \frac{1}{2}$

$\frac{(a+2)(a-\frac{1}{2})}{a}>0 \Rightarrow a\in[-\infty;-2)\cup(0;\frac{1}{2})$



$\begin{cases} x<3 \\ y<3 \end{cases}$

Рассмотрим II случай, когда $y+x>3$, тогда
$(y+x)^2>9$ и $\frac{2}{a}-2a>3$

$\Rightarrow \frac{2a^2+3a-2}{a}<0 \Rightarrow a\in(-2,0)\cup(\frac{1}{2};+\infty)$

211005135 (U376626 M1277630)

Чистовик

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-1 \\ a=2 \\ a=-\frac{2+\sqrt{6}}{2} \\ a=\frac{\sqrt{6}-2}{2} \end{array}\right.$$

Вернёмся к x:

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+1}=-1 \text{ — не может быть т.к. } \sqrt{t}\geqslant 0, \text{ где } t\in \mathbb{R}_0^+ \\ \sqrt{x+1}=2 \\ \sqrt{x+1}=-\frac{2+\sqrt{6}}{2} \text{ — не может быть т.к. } \sqrt{t}\geqslant 0, \text{ где } t\in \mathbb{R}_0^+ \\ \sqrt{x+1}=\frac{\sqrt{6}-2}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+1}=2 \\ \sqrt{x+1}=\frac{\sqrt{6}-2}{2} \end{array}\right.$$ т.к обе части ур-я >0

$\Rightarrow$ можно возвести в кв.

$$\left[\begin{array}{l} x+1=4 \\ x+1=\frac{(\sqrt{6}-2)^2}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=\frac{10-\cancel{2}4\sqrt{6}-4}{4} \end{array}\right. = \frac{\overset{3}{\cancel{6}}-\overset{2}{\cancel{4}}\sqrt{6}}{\cancel{4}\,2} = \frac{3-2\sqrt{6}}{2}$$

Проверка:

1) $\sqrt{3+1}-\sqrt{4-3}+3=2\sqrt{(\cancel{2}3+1)(4-3)}$

$2-1+3=2\cdot 2\cdot 1$ — верно

2) $\sqrt{\frac{5-2\sqrt{6}}{2}}-\sqrt{\frac{8-3+2\sqrt{6}}{2}}+3=\cancel{2}\sqrt{\frac{5-2\sqrt{6}}{\cancel{2}}\cdot\frac{5+2\sqrt{6}}{2}}$

$\sqrt{\frac{5-2\sqrt{6}}{2}}-\sqrt{\frac{5+2\sqrt{6}}{2}}+3=\sqrt{\cancel{(5-2\sqrt{6})(5+2\sqrt{6}}\ 25-4\cdot 24}=1$

$\sqrt{\frac{5-2\sqrt{6}}{2}}-\sqrt{\frac{5+2\sqrt{6}}{2}}=-2$

$2+\sqrt{\frac{5-2\sqrt{6}}{2}}=\sqrt{\frac{5+2\sqrt{6}}{2}}$ ~~т.к~~ ~~обе части >0 $\Rightarrow$ можно возвести в кв.~~

~~$\frac{5-2\sqrt{6}}{2}$ ... $5+2\sqrt{6}$~~

211005135 (U376626 M1277630)

(Страница 1)

в Черновик

$$\underset{a}{\sqrt{x+1}} - \underset{b}{\sqrt{4-x}} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$$

ОДЗ:

$(x+1)(4-x) \geq 0$

$x \in [-1; 4]$

$(x+1)(4-x) = 4x - x^2 + 4 - x = 4 + 3x - x^2$

$a - b + 3 = 2ab$

$x+1 = a^2 \Rightarrow x - 4 = a^2 - 5$

$-x + 4 = 5 - a^2 = b^2$

$\Rightarrow \begin{cases} a - b + 3 = 2ab \\ b = 5 - a \end{cases} \Rightarrow a - (5-a) + 3 = 2a(5-a)$

$a - 5 + a + 3 = 10a - 2a^2$

$2a^2 - 8a - 2 = 0 \quad | : 2$

$a^2 - 4a - 1 = 0$

$1 - 8 + 16$

$(a-2)^2 = 5$

$a = \pm\sqrt{5} + 2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x + 1 = \sqrt{5} + 2 \\ x + 1 = -\sqrt{5} + 2 \end{array} \right.$

ОДЗ: $a^2 \leq 5$

$a \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$

$a - \sqrt{5-a^2} = 2a\sqrt{5-a^2}$

$a - \sqrt{5-a^2} - 2a\sqrt{5-a^2} = 0$

$a = \sqrt{5-a^2}(1-2a)$

$a^2 = (5-a^2)(1-2a)^2$

$a^2 = (5-a^2)(1-4a+4a^2)$

$a^2 = 5 - 20a + 20a^2 - a^2 + 4a^3 - 4a^4$

$x = \sqrt{5} + 1$

$x = -\sqrt{5} + 1$

$x \in [-1; 4]$

$2 < \sqrt{5} < 3$

$3 < \sqrt{5} + 1 < 4$

подходит

$-3 < -\sqrt{5} < -2$

$-2 < -\sqrt{5} + 1 < -1 \Rightarrow$ не подходит

211005135 (U376626 M1277630)

Страница 5 Черновик

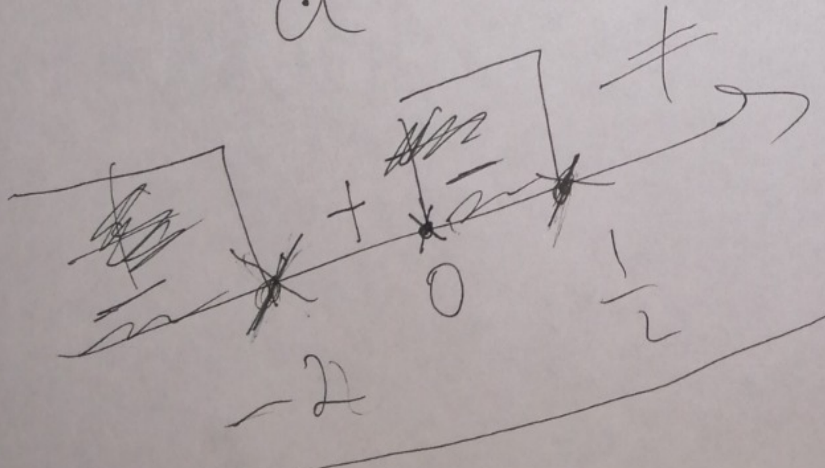
$$\frac{-2a^2-3a+2}{a}>0$$

$$\frac{2a^2+3a-2}{a}<0$$

$$D=9+16=25$$

$$a=\frac{-3\pm5}{4}=-2;\ \frac{1}{2}$$

$$\frac{(a+2)(a-\frac{1}{2})}{a}<0$$



a^2+a^2

$2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0$

$\cancel{(x-y)^2}$

$(a-x)^2+(a-3y)^2-4y^2+2xy=0$

$(a-x)$

Черновик (Страница 4)

Oxy $2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0$

координаты A: $ax^2+4a^2x-ay+4a^3+2=0$

парабола с вершиной в т. B

a ? : A и B

$x+y=3$

$$2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0$$

$$(a-x)^2 + (a-3y)^2-4y^2+2xy=0$$

$$\cancel{(a-x)^2+(a-3y)^2}$$

$$ax^2+4a^2x-ay+4a^3+2=0$$

$$y=x^2+4ax+4a^2+\frac{2}{a}$$

Вершина $x_B=-\frac{b}{2a}=-\frac{4a}{2}=-2a$

$$\Rightarrow y_B=\cancel{4a^2+8a^2+4a^2-1=28a^2-1}$$

$$4a^2-8a^2+4a^2+\frac{2}{a}=\frac{2}{a}$$

$$\frac{2}{a}-2a>3$$

$$\frac{-2a^2-3a+2}{a}>0$$

211005135 (U376626 M1277630)

Чистовик

$$4 + 2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{6}}{2}} + \frac{5-2\sqrt{6}}{2} = \frac{5+2\sqrt{6}}{2}$$

$$4 + 2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{6}}{2}} - 2\sqrt{6} = 0$$

$$4 + 2\sqrt{5-2\sqrt{6}}$$

$$5 - 2\sqrt{6} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$$

$$5 + 2\sqrt{6} = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$$

2) $$2 + \sqrt{\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{2}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{2}}$$

$$2 + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$2 + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 0$$

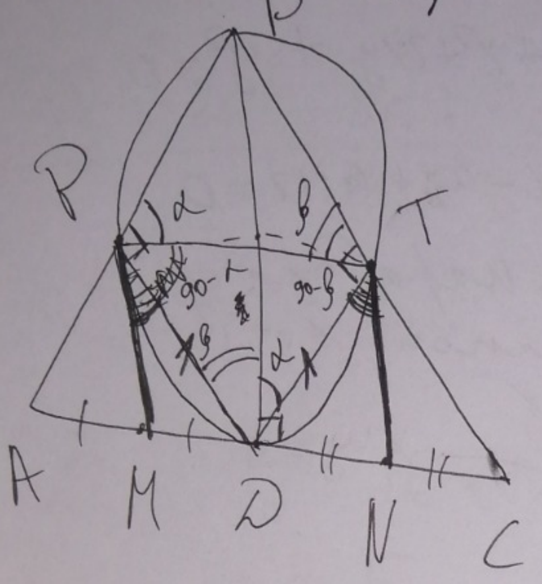
$$2 + \frac{-2\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{2}}} = 0$$ — верно

Ответ: $x = 3;\ \frac{3-2\sqrt{6}}{2}$.

$\boxed{\text{Страница 3}}$

Черновик

$90 - \beta = 90 - \beta$

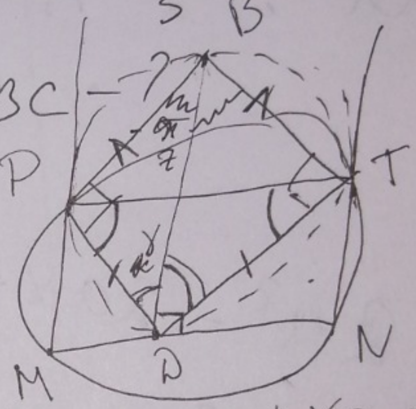


$PM \parallel NT$

а) $\angle ABC$ − ?

б) $PM = \frac{1}{2}$, $NT = 1$, $BD = \frac{4}{3}$

S_{ABC} − ?

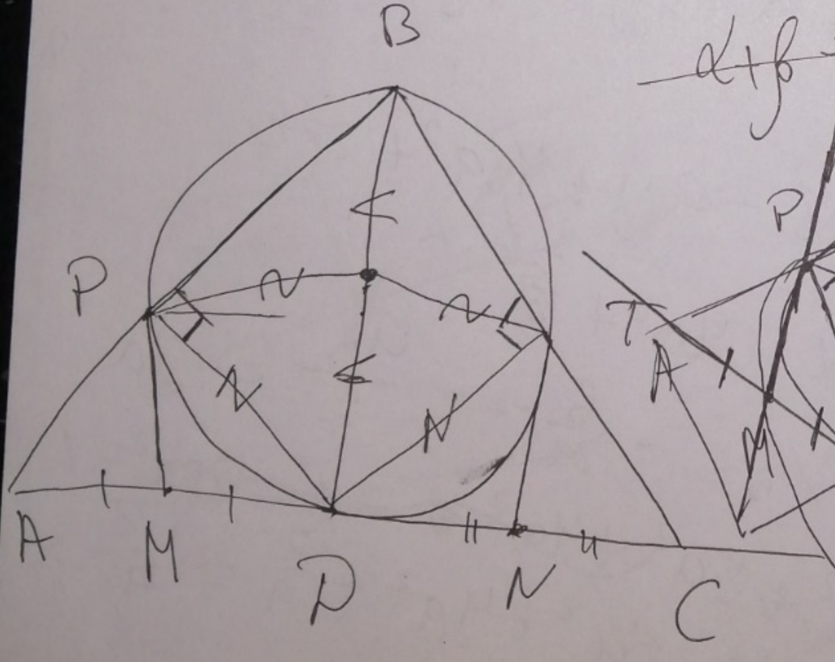


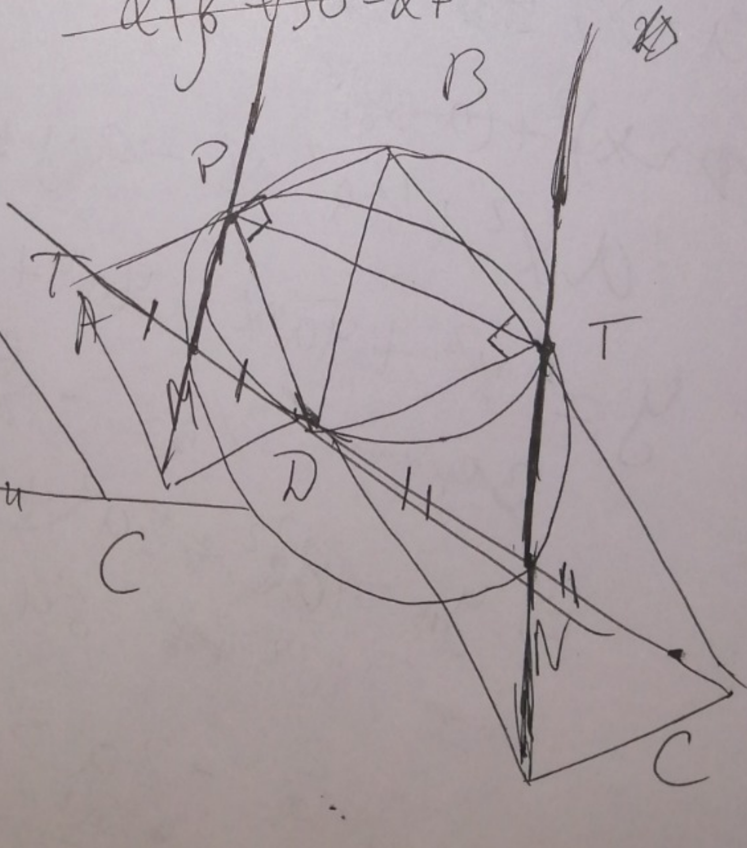
BD − диаметр

$\Rightarrow \angle BPD = 90° = \angle BTD$

$\gamma + z = 90°$

~~$\alpha + \beta + 90 - \alpha +$~~





Чистовик

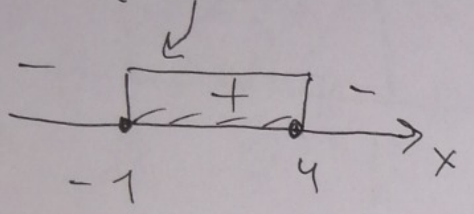
(Страница 1)

2. $\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$

Заметим, что $4+3x-x^2 = (x+1)(4-x)$, тогда исходное ур-е

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{(x+1)(4-x)}$$

ОДЗ: $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \\ (x+1)(4-x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 4 \\ x \in [-1; 4] \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-1; 4]$



~~Пусть $a = \sqrt{x+1}$~~

$$\sqrt{x+1} - 2\sqrt{(x+1)(4-x)} - \sqrt{4-x} + 3 = 0$$

Пусть $a = \sqrt{x+1}$, тогда $a^2 = x+1 \Rightarrow a^2 - 5 = x-4 \Rightarrow$
$\Rightarrow -a^2 + 5 = 4-x \Rightarrow \sqrt{4-x} = \sqrt{-a^2+5}$. Перепишем ур-е с ~~до~~ переменной a:

$$a - 2a\sqrt{-a^2+5} - \sqrt{-a^2+5} + 3 = 0$$

$$a + 3 = \sqrt{5-a^2}\,(1+2a)$$

$\Downarrow$ $\Rightarrow$ перешли к следствию $\Rightarrow$ нужна будет проверка

$$(a+3)^2 = (5-a^2)(1+2a)^2$$

$$a^2 + 6a + 9 = (5-a^2)(1+4a+4a^2)$$

$$a^2 + 6a + 9 = 5 + 20a + 20a^2 - a^2 - 4a^3 - 4a^4$$

$$4a^4 + 4a^3 - 18a^2 - 14a + 4 = 0$$

Заметим, что $a = -1$ – корень $\Rightarrow$ ур-е делится на $a+1$. Поделим ур-е на $a+1$ столбиком:

Чистовик

$$\begin{array}{r|l} 4a^4+4a^3-18a^2-14a+4 & a+1 \\ \hline -\;4a^4+4a^3 & 4a^3-18a+4 \\ -18a^2-14a+4 & \\ -\;-18a^2-18a & \\ 4a+4 & \\ -\;4a+4 & \\ 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow$ исходное ур-е:

$$(a+1)(4a^3-18a+4)=0$$

Заметим, что ур-е $4a^3-18a+4$ имеет корень $a=2$, тогда оно $\vdots$ на $a-2$. Поделим на $a-2$ столбиком:

$$\begin{array}{r|l} 4a^3-18a+4 & a-2 \\ \hline -\;4a^3-8a^2 & 4a^2+8a-2 \\ 8a^2-18a+4 & \\ -\;8a^2-16a & \\ -2a+4 & \\ -\;-2a+4 & \\ 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow$ исходное ур-е:

$$(a+1)(a-2)(4a^2+8a-2)=0 \;|:2$$

$$(a+1)(a-2)(2a^2+4a-1)=0$$

Решим ур-е $2a^2+4a-1$:

$$D/4=2^2+2=6 \Rightarrow a=\frac{-2\pm\sqrt{6}}{2}$$

$\Rightarrow$ ~~ур~~ исходное ур-е:

$$(a+1)(a-2)\left(a+\frac{2+\sqrt{6}}{2}\right)\left(a-\frac{\sqrt{6}-2}{2}\right)=0 \Leftrightarrow$$

211005135 (U376626 M12776304)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211005135**

ID профиля: **376626**

Вариант 12

Чистовик | Страница 6 |

$\Rightarrow \angle CAT = \angle CDT = \beta$ (как вписанн)

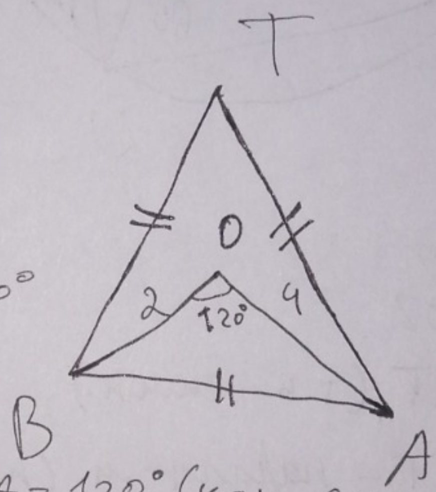
7) $\angle ABT = \alpha + \gamma = \angle OCT = 60^\circ$

$\angle BAT = z + \beta = \angle ODT = 60^\circ$

$\Rightarrow \angle BTA = 180^\circ - \angle ABT - \angle BAT = 60^\circ$ (сумма углов в Δ-ке)

$\Rightarrow \Delta ABT$ – р/с

ч.т.д.



8) $BC = 2$, $AD = 4$

ΔBOC – р/с

$\Rightarrow BC = BO = 2$, $\angle BOC = 60^\circ$

ΔAOD – р/с

$\Rightarrow AD = AO = 4$

$\Downarrow$

$\angle BOA = 120^\circ$ (как смеж.)

теорема косинусов в Δ-ке BOA для AB:

$$AB^2 = 2^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \cos 120^\circ =$$

$$= 20 + 16\cos 60^\circ = 20 + 16 \cdot \frac{1}{2} = 28$$

$\Rightarrow AB = \sqrt{28} = 2\sqrt{7} \Rightarrow S_{\Delta BTA} = BT \cdot BA \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 60^\circ =$

$\parallel$ BT (ΔBTA – р/с)

$= 2\sqrt{7} \cdot 2\sqrt{7} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 7\sqrt{3}$

$S_{ABCD} = AC \cdot BD \cdot \sin 60^\circ \cdot \frac{1}{2} = (BO + OD)(AO + OC) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= (2+4)(2+4) \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{36\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$

$\Rightarrow \frac{S_{\Delta ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{7\sqrt{3}}{9\sqrt{3}} = \frac{7}{9}$

Ответ: $\frac{7}{9}$

211005135 (U376626 M1277631)

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4} \end{cases}$ Чистовик [Страница 2]

Вернёмся к x и y:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 y^2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Пусть $x^2 = v$, а $y^2 = u$, тогда

$$\begin{cases} v + u = 1 \Rightarrow u = 1 - v \\ u \cdot v = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (1-v)v = \frac{1}{4}$$

$$-v^2 + v - \frac{1}{4} = 0 \quad | \cdot (-4)$$

$$4v^2 - 4v + 1 = 0$$

$$(2v - 1)^2 = 0$$

$$v = \frac{1}{2} \Rightarrow u = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Вернёмся к x и y:

$$\begin{cases} x^2 = \frac{1}{2} \\ y^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \end{array} \right.$$

Ответ: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

211005135 (U376626 M1277631)

Черновик (Страница 2)

$-4v^2+4v-1=0$

$\cancel{-(2v+1)^2}$

$4v^2-4v+1=0$

$(2v-1)^2=0$

$v=\frac{1}{2} \Rightarrow u=\frac{1}{2}$

$\begin{cases} x^2=\frac{1}{2} \\ y^2=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}} \\ y=\pm\sqrt{\frac{1}{2}} \end{cases}$

$\cancel{\Rightarrow x=}$ $x=\frac{1}{\sqrt{2}},\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}$

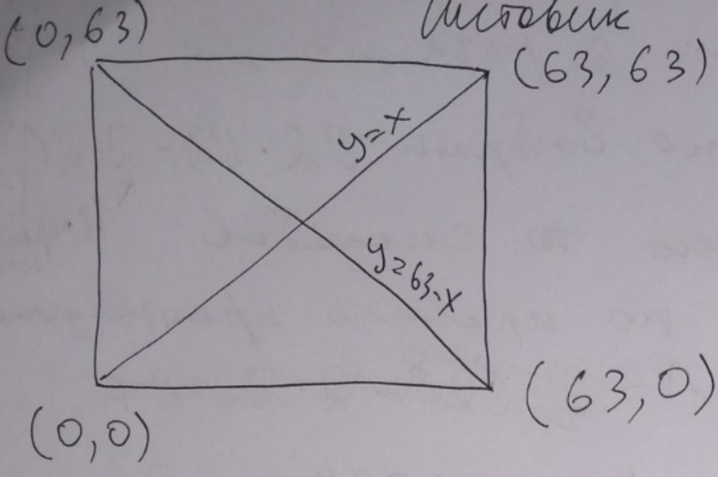
$x=-\frac{1}{\sqrt{2}},\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$x=\frac{1}{\sqrt{2}},\ y=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$x=-\frac{1}{\sqrt{2}},\ y=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

Чистовик

(Страница 3)



$y = x$

$y = 63 - x$

Решение:

Прямые $y=x$ и $y=63-x$ – являются диагоналями квадрата, т.к. проходят через ~~т.~~ через вершины квадрата ($y=x$ проходит через $(0,0)$ и через $(63,63)$, $y=63-x$ проходит через $(0,63)$ и $(63,0)$)

Прямая $y=x$ проходит через ~~64 узла~~ 62 узла (~~(0,0)~~, $(1,1)$, $\dots$, $(62,62)$ ~~(63,63)~~), аналогично прямая $y=63-x$ проходит через ~~64~~ 62 узла (~~(0,63)~~, $(1,62)$, $(2,61)$, $(3,60)$, $\dots$, $(62,1)$ ~~(63,0)~~)

$\Rightarrow$ ~~выбрать~~ т.к. 1 из точек должна лежать на 1 из этих прямых, то ~~1 точк~~ первую точку мы можем выбрать ~~128~~ 124 способами. Всего ~~точек~~ узлов внутри квадрата ~~...~~ $62 \cdot 62$ (62 на каждой внутренней ~~вертикали~~ прямая вертикали квадрата), но т.к. ~~...~~ ~~образовать~~ ~~прям~~ проходящая через эти точки не должна быть параллельна осям, то исключаем точки, которые лежат на

211005135 (U376626 M1277631)

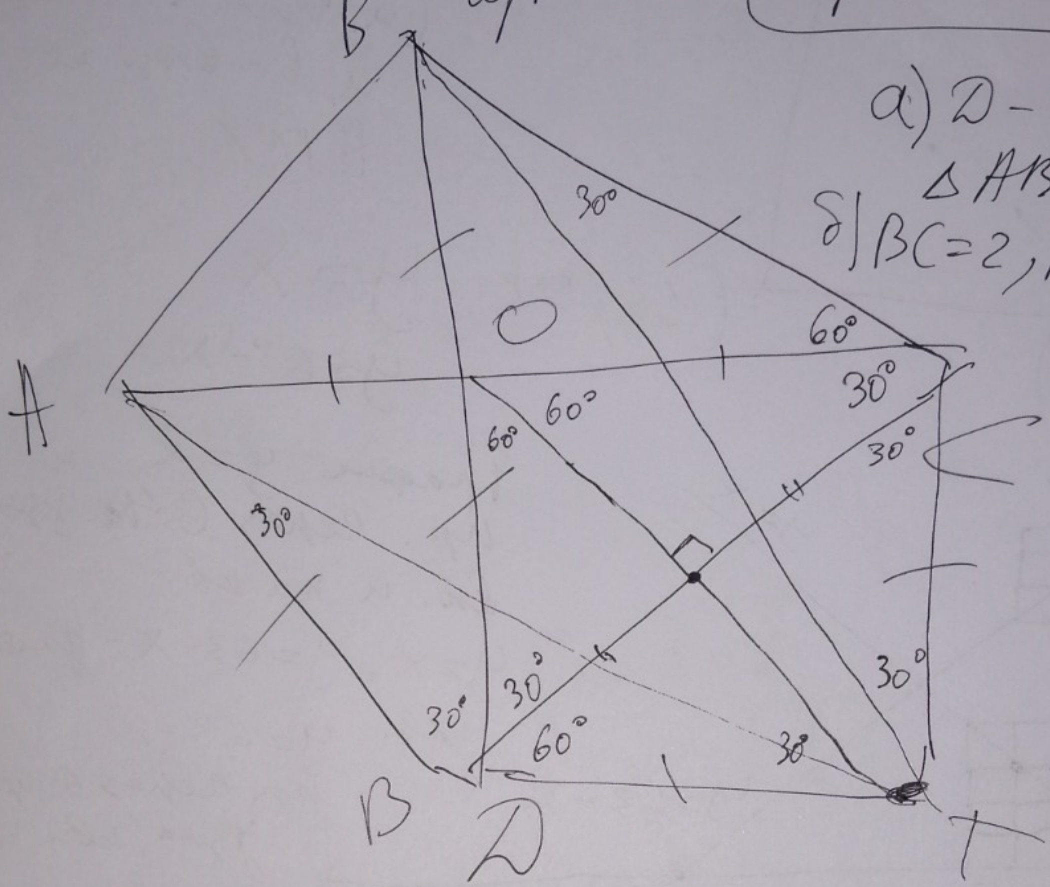
Черновик (Страница 4)

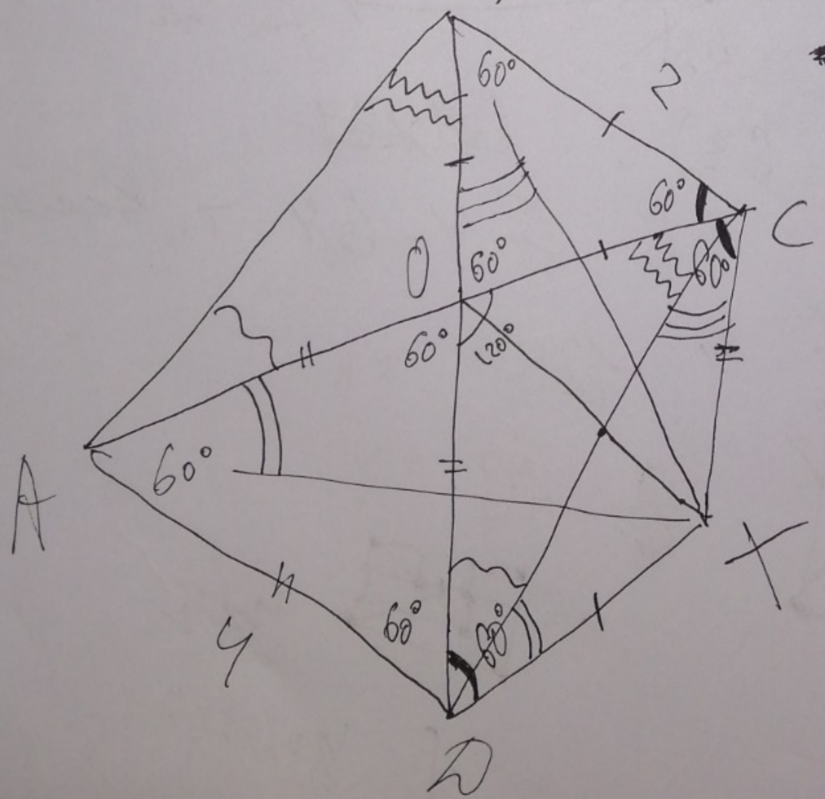
а) D – т. (

$\triangle ABT$ – правил.

б) $BC = 2$, $AD = 4$

$\dfrac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}}$ – ?





Черновик

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \dfrac{5}{4} \\ 2x^4 + 2y^4 + 5x^2y^2 = \dfrac{9}{4} \end{cases}$$

$$\cancel{\dfrac{x^4y^2 + y^4x^2}{x^2+y^2}}$$

$$2(\overset{a}{x^2+y^2})^2 + \overset{b}{x^2y^2} = \frac{9}{4}$$

$$\cancel{\dfrac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a} + b = \dfrac{5}{4} \Rightarrow b = \dfrac{5}{4} - \dfrac{1}{a} \\ 2a^2 + b = \dfrac{9}{4} \end{cases}$$

$$2a^2 + \frac{5}{4} - \frac{1}{a} = \frac{9}{4}$$

$$2a^2 - \frac{1}{a} = 1$$

$$\frac{2a^3 - a - 1}{a} = 0$$

$$a = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \underbrace{x^2}_{=u} + \underbrace{y^2}_{=v} = 1 \\ x^2y^2 = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u + v = 1 \Rightarrow u = 1 - v \\ uv = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

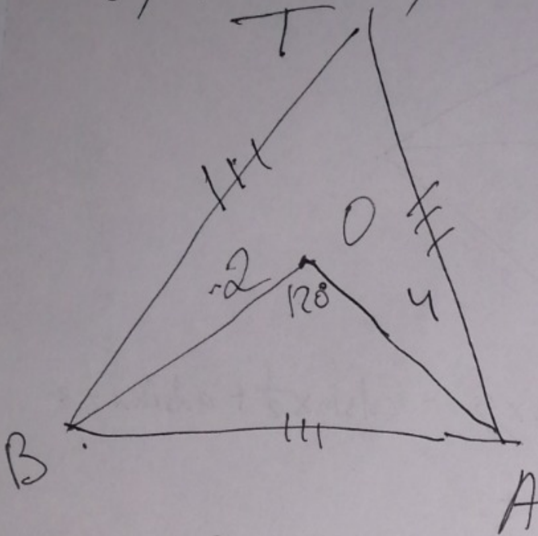
$$v(1-v) = \frac{1}{4}$$

$$-v^2 + v - \frac{1}{4} = 0$$

211005135 (U376626 M1277631)

Черновик (Страница 5)

б) $BC = 2$, $AD = 4$



$$AB^2 = 4^2 + 2^2 - 2\cdot 2\cdot 4\cdot \cos 120^\circ$$

$$AB^2 = 20 + 16\cdot\frac{1}{2} = 28$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

$$S_{\triangle ABC} = \sin 60^\circ \cdot a\cdot a\cdot\frac{1}{2} =$$

$$= \frac{28\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 7\sqrt{3}$$

$$S_{ABCD} = d_1 d_2\cdot\sin 60^\circ\cdot\frac{1}{2} = \overset{6\,6}{\cancel{4\cdot 8}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} =$$

$$= \cancel{8\sqrt{3}}\ 9\sqrt{3}$$

211005135 (U376626 M1277631)

чистовик

Страница 4

одной вертикали и горизонтали с первой точкой, т.е. вычитаем 2 раза по ~~63~~ 61

г) 2 точку можно выбрать $62\cdot 62-2\cdot 61$ способами $\Rightarrow$ всего ~~то~~ способов выбрать 2 точки по правилу произведения

1 (первая точка)

~~$124(62^2-2\cdot 61)=\ldots$~~

~~$=248(62\cdot 31-61)=461528$ способов~~

$124(62^2-2\cdot 61-1)=124(62^2-2\cdot 61)-124=$

$=248(62\cdot 31-61)-124=$

$=461528-124=461404$ способов

$$\begin{array}{r} \times\ 62 \\ 31 \\ \hline 62 \\ 186 \\ \hline 1922 \end{array}$$

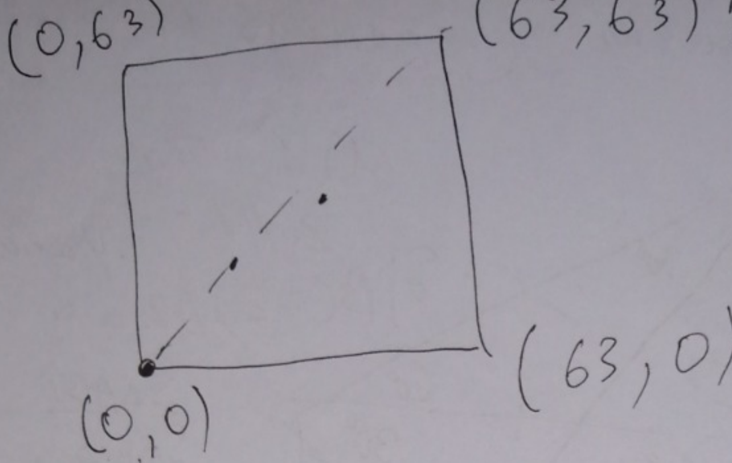
$$\begin{array}{r} -\ 1922 \\ 61 \\ \hline 1861 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\ 1861 \\ 248 \\ \hline 14888 \\ 7444 \\ 3722 \\ \hline 461528 \end{array}$$

Ответ: ~~461528~~ 461404 способов

211005135 (U376626 M1277631)

Черновик (Страница 3)



(a, b) – a

a, b – внутр. кв.

$\in \mathbb{N}$

$y = x$

$y = 63 - x$

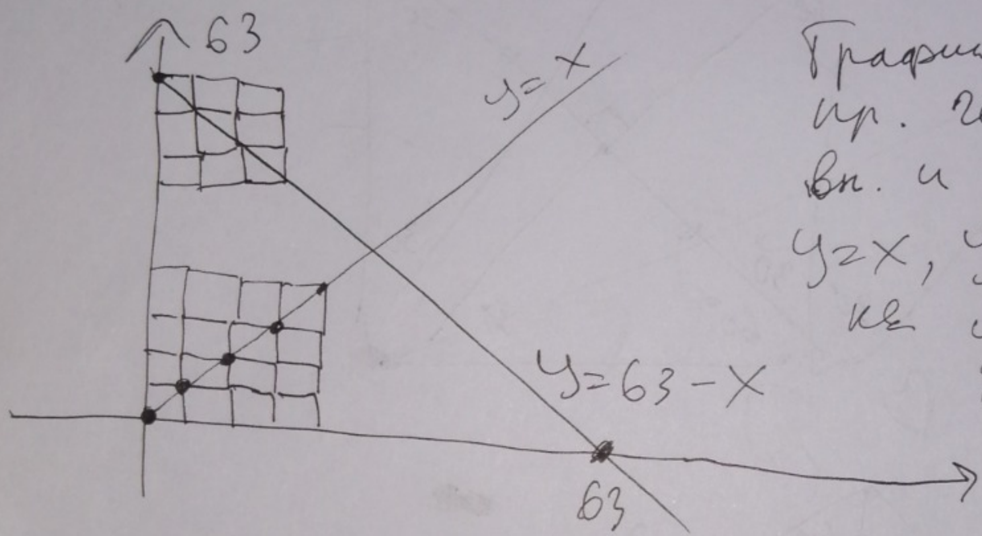


График $y = x$ пр. через 64 ц. узла вн. и на кв.

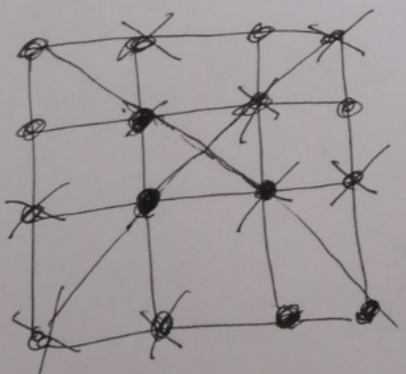
$y=x$, $y=63-x$ – диаг. кв.

$y=63-x$ пр. через 64 цел. узла кв. и на кв.

$64\cdot(64^2 - 63)$

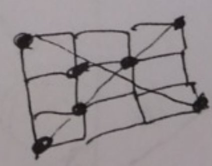
~~64~~ 64·64

64·64 – т. всего



128

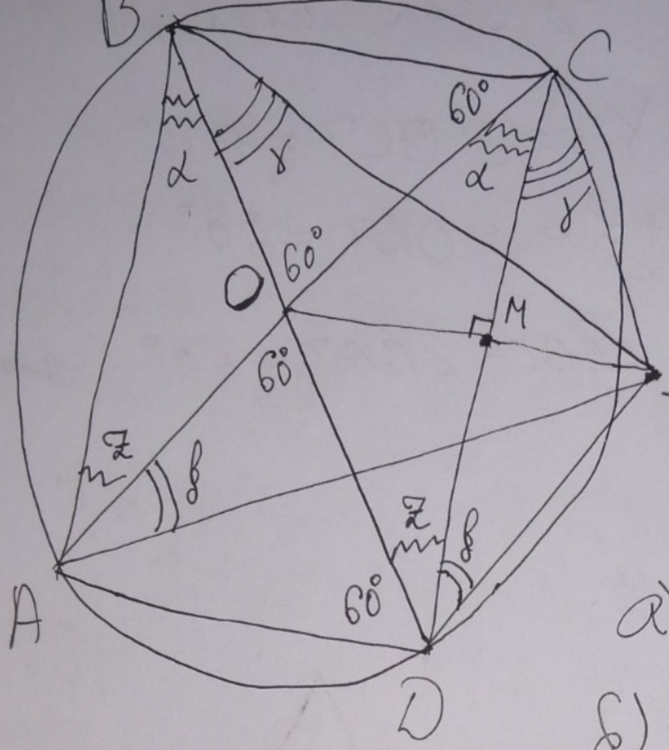
16·



~~y=x~~

y=63−y

Чистовик (Страница 5)



Дано:

$\triangle OBC$ – р/с

$\triangle ODA$ – р/с

T – симм O отн. M – сер. CD

а) D-ть $\triangle ABT$ – р/с

б) Найти $\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}}$ – ?, если $BC=2$, $AD=4$

а) Док-во:

1) $OM=MT$ (т.к. симм.), $CM=MD$ (по усл.) $\Rightarrow$ DOCT – паралл-м (по признаку) $\Rightarrow \angle OCT=\angle ODT$ (по св-ву)

2) $\angle BOC=60°$ (т.к. $\triangle BOC$ – р/с) $\Rightarrow \angle COD = 120°$

3) $OD \parallel CT$ (DOCT – паралл-м) $\Rightarrow \angle OCT = 60° = \angle ODT$ по п.1 (как внутр.)

4) $\angle BDA=\angle BCA=60°$ (впис.) $\Rightarrow$ BCDA – вписанн. четыр.

$\Rightarrow \angle CDB=\angle CAB=z$, $\angle ACD=\angle ABD=\alpha$ (как впис.)

5) $\angle BDT+\angle BCT=180° \Rightarrow$ DBCT – вписанн четыр.

$\Rightarrow \angle DCT=\angle DBT=\gamma$ (как вписанн)

6) $\angle ACT+\angle ADT=180° \Rightarrow$ ACTD – вписанн четыр.

211005135 (U376626 M1277631)

Чистовик

(Страница 1)

4. $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \dfrac{5}{4} \\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2 = \dfrac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \dfrac{5}{4} \\ 2(x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = \dfrac{9}{4} \end{cases}$

Пусть $a = x^2+y^2$, $b = x^2y^2$, тогда система ур-ий переписывается в виде:

$\begin{cases} \dfrac{1}{a} + b = \dfrac{5}{4} \\ 2a^2 + b = \dfrac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{5}{4} - \dfrac{1}{a} \\ 2a^2 + b = \dfrac{9}{4} \end{cases}$ (*)

$\Rightarrow 2a^2 + \left(\dfrac{5}{4} - \dfrac{1}{a}\right) = \dfrac{9}{4}$

$2a^2 - \dfrac{1}{a} = 1$

$\dfrac{2a^3-a-1}{a} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^3-a-1=0, \\ a \neq 0 \end{cases}$

Заметим, что ур-е $2a^3-a-1=0$ имеет корень $a=1 \Rightarrow$ он делится на $a-1$. Поделим на $a-1$ столбиком:

$$\begin{array}{r|l} 2a^3 - a - 1 & a-1 \\ \underline{-\ 2a^3-2a^2} & 2a^2+2a+1 \\ 2a^2-a-1 & \\ \underline{-\ 2a^2-2a} & \\ a-1 & \\ \underline{-\ a-1} & \\ 0 & \end{array}$$

Исходное ур-е:

$(a-1)(2a^2+2a+1)=0$

Решим ур-е $2a^2+2a+1=0$:

$D/4 = 1-2 = -1 < 0 \Rightarrow$ нет решений

$\Rightarrow$ Система (*) $\Leftrightarrow$

211005135 (U376626 M1277631)