Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211007789**

ID профиля: **273527**

Вариант 11

Черновик

$$\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}+m=2\sqrt{6+x-x^2}-3$$

$$x+2+3-x-2\sqrt{6+x-x^2}=4(6+x-x^2)+9-12\sqrt{6+x-x^2}$$

$$5-2\sqrt{6+x-x^2}=24+4x-4x^2+9-12\sqrt{6+x-x^2}$$

$$10\sqrt{6+x-x^2}=28+4x-4x^2$$

$$10\sqrt{6+x-x^2}=4+4(6+x-x^2)$$

$$4(6+x-x^2)-10\sqrt{6+x-x^2}+4=0$$

$\sqrt{6+x-x^2}\geq 0$; $\sqrt{6+x-x^2}=y$, но $y\geq 0$

$$4y^2-10y+4=0$$

$$2y^2-5y+2=0$$

$$D=25-4\cdot 2\cdot 2=9$$

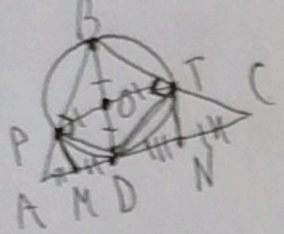
$$y=\frac{5\pm 3}{2\cdot 2}=1{,}25\pm 0{,}75;\ y_1=0{,}5;\ y_2=2;\ y\geq 0.$$

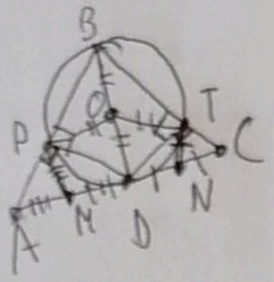
$$\begin{cases}\sqrt{6+x-x^2}=0{,}5 \;|(\,)^2\\ x\in[-2;3]\\ \sqrt{6+x-x^2}=2 \;|(\,)^2\end{cases}\quad \begin{cases}6+x-x^2=0{,}25\\ x\in[-2;3]\\ 6+x-x^2=4\end{cases}\quad \begin{cases}x^2-x-5{,}75=0\\ x\in[-2;3]\\ x^2-x-2=0\end{cases}\quad \begin{cases}(x-0{,}5)^2-6=0\\ (x-0{,}5)^2-2{,}25=0\\ x\in[-2;3]\end{cases}$$

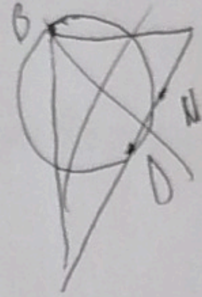
$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=0{,}5+\sqrt{6}\\ x=0{,}5-\sqrt{6}\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x=0{,}5+1{,}5=2\\ x=0{,}5-1{,}5=-1\end{array}\right.\\ x\in[-2;3]\end{cases}$$

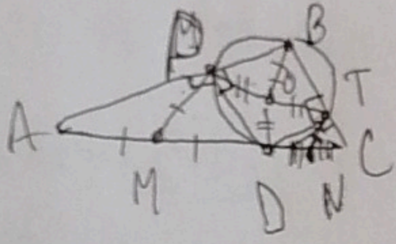
211007789 (U273527 M1273655)

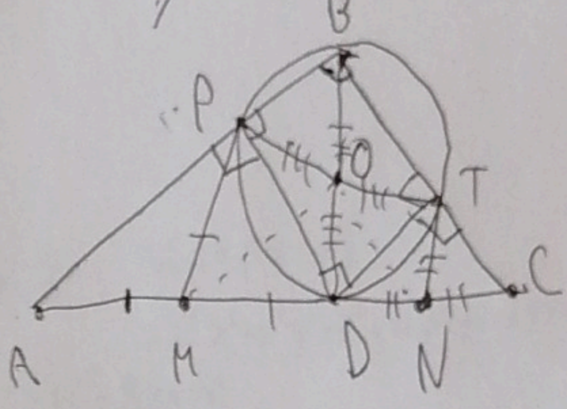
Черновик.

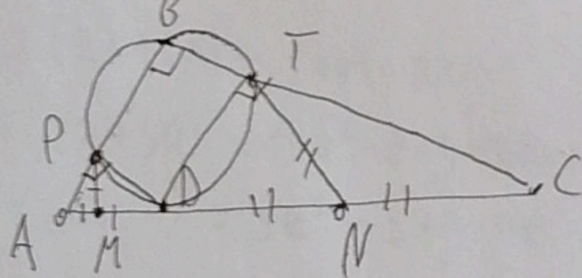












$x \geq -2$

$x \leq 3$

$-x^2+x+6=0$

$D = 1+24=25$

$x = \frac{-1 \pm 5}{-1 \cdot 2} = -\frac{1 \pm 5}{2}$; $x=-2$ или $x=3$, $\Rightarrow -x^2+x+6 \geq 0$ при $x \in [-2;3]$.

$x-0{,}5=y$

$\underset{y+2{,}5}{\sqrt{x+2}} - \underset{2{,}5-y}{\sqrt{3-x}} + 3 = 2\sqrt{(3-x)(x+2)}$

$\sqrt{y} - \sqrt{5-y} + 3 = 2\sqrt{y(5-y)}$

$\sqrt{5-y} - \sqrt{y} = 3 - 2\sqrt{y(5-y)}$

$5-y-y = 3(\sqrt{5-y}+\sqrt{y}) - 2y\sqrt{5-y} - 2(y-5)\sqrt{y}$

$5-2y = 3\sqrt{5-y} + 3\sqrt{y} - 2y\sqrt{5-y} - 2y\sqrt{y} - 10\sqrt{y}$

$5-2y = (3-2y)\sqrt{5-y} - (7+2y)\sqrt{y}$

$1-2x = -(2x+1)\sqrt{3-x} - (3-2x)\sqrt{x+2}$

$\ldots = (2x+1)\sqrt{3-x} + (3-2x)\sqrt{x+2}$

$\sqrt{y+2{,}5} - \sqrt{2{,}5-y} + 3 = 2\sqrt{6{,}25-y^2}$

$\sqrt{y+2{,}5} - \sqrt{2{,}5-y} = 2\sqrt{6{,}25-y^2} - 3$

$y+2{,}5-2{,}5+y = 2\sqrt{6{,}25-y^2}\,(\sqrt{y+2{,}5}+\sqrt{2{,}5-y}) - 3(\ldots)$

$2y = 2(2{,}5+y)\sqrt{2{,}5-y} + 2(2{,}5-y)\sqrt{2{,}5+y} - 3\sqrt{y+2{,}5} - 3\sqrt{2{,}5-y}$

$2y = 5\sqrt{2{,}5-y} + 2y\sqrt{2{,}5-y} + 5\sqrt{2{,}5+y} - 2y\sqrt{2{,}5+y} - 3\sqrt{2{,}5+y} - 3\sqrt{2{,}5-y}$

$2y = 2\sqrt{2{,}5-y} + 2\sqrt{2{,}5+y} + 2y\sqrt{2{,}5-y} - 2y\sqrt{2{,}5+y}$

$y = \sqrt{2{,}5-y}\,(1+y) - (y-1)\sqrt{2{,}5+y}$

Черновик.

№3.

1) $ax^2-2a^2x-ay+a^3+4=0$; $a\neq 0$, иначе $4=0$ при всех x и y.

$ay=ax^2-2a^2x+a^3+4 \quad |:a\neq 0$

$y=x^2-2ax+a^2+4$

$y=(x-a)^2+4 \quad$; В $(a;4)$

2) $4y^2+4ay+a^2+8x^2+8xy+12ax+4a^2=0$

$(\alpha x+\beta y+\varphi)^2=$

$=\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\varphi^2+2\alpha\beta xy+2\alpha\varphi x+2\beta\varphi y$

$(2y+a)^2+2(4x^2+6ax+9a^2)-14a^2+8xy=0$

$(2y+a)^2+2(2x+3a)^2=14a^2-8xy$

$(2y+a)^2+(2x+3a)^2=14a^2-8xy+(4x^2+6ax+9a)$

$(2y+a)^2+(2x+3a)^2=5a^2-8xy-4x^2-6ax$

$2(2x+2y)^2=4y^2-4ay-5a^2-12ax$

$\alpha^2=8$

$\beta^2=4$

$2\alpha\beta=8$

$2(2x+2y)^2=(2y-a)^2-6a^2-12ax$

$2(2x+2y)^2=(2y-a)^2-6a(a-2x)$

$\cancel{2(x+y)^2=(y-0{,}5a)^2-3a(0{,}5a-x)}$

$(2x+2y)^2=-4x^2-5a^2\underbrace{-4ay-4ax}_{}-8y=-4x^2-5a^2-4a(x+y)-8ay$

$4(x+y)^2=-4x^2-5a^2-4a(x+y)-8ay$

$4(x+y)^2+4a(x+y)+a^2=-4x^2-6a^2-8ay$

$(2(x+y)+a)^2=-4x^2-6a^2-8ay$

$(2x+2y+a)^2=-4x^2-6a^2-8ay+4a$

Вариант 11, 10 класс, часть 1.

1) $ax^2-2a^2x-ay+a^3+4=0$, $a\neq 0$, иначе $4=0$ при любых x и y.

$ay=ax^2-2a^2x+a^3+4 \quad |:a\neq 0$

$y=x^2-2ax+a^2+4$

$y=(x-a)^2+4$; т. B $(a;4)$, т.к. смещ. $\xrightarrow{a}$ и $\uparrow 4$.

2) $4y^2+4ay+5a^2+8x^2+8xy+12ax=0$

$(2x+2y)^2+4ay+5a^2+4x^2+12ax=0$

$4(x+y)^2+4a(x+y)+a^2=-4x^2-4a^2-8ax$

$(2x+2y+a)^2=-4x^2-4a^2-8ax$

$(2x+2y+a)^2=-4(x+a)^2$

$\begin{cases} 2x+2y+a=0 \\ x+a=0 \end{cases}$ $\begin{cases} y=-\frac{a}{2}-a=-1{,}5a. \\ x=-a \end{cases}$

3) т. A $(-a;-1{,}5a)$.

4)

Чистовик.

Вариант 11, 10 класс, часть I.

№2.

$\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} = 2\sqrt{6+x-x^2} - 3$; $2\sqrt{6+x-x^2} \geq 0$, возведём в квадрат;

ОДЗ: $x \in [-2;3]$ для подкоренных выражений.

$x+2-2\sqrt{6+x-x^2}+3-x = 4(6+x-x^2) - 12\sqrt{6+x-x^2}+9$

$5-2\sqrt{6+x-x^2} = 4(6+x-x^2) - 12\sqrt{6+x-x^2}+9$

$4(6+x-x^2) - 10\sqrt{6+x-x^2}+4=0$

1) Пусть $y=\sqrt{6+x-x^2}$, тогда $y \geq 0$;

$4y^2-10y+4=0$

$D=100-4\cdot4\cdot4=100-64=36$; $\sqrt{D}=6$.

$y=\frac{10\pm6}{2\cdot4}$; $y_1=2$; $y_2=0{,}5$; $y\geq0$ соблюдено.

2) $\begin{cases} \sqrt{6+x-x^2}=0{,}5 \\ \sqrt{6+x-x^2}=2 \\ x\in[-2;3] \end{cases}$ $\begin{cases} 6+x-x^2=0{,}25 \\ 6+x-x^2=4 \\ x\in[-2;3] \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-x+0{,}25-6=0 \\ x^2-x+0{,}25-2{,}25=0 \\ x\in[-2;3] \end{cases}$

$\begin{cases} (x-0{,}5)^2=6 \\ (x-0{,}5)^2=1{,}5^2 \\ x\in[2;3] \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=0{,}5+\sqrt{6}<3 \\ x=0{,}5-\sqrt{6}>-2 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x=2<3 \\ x=-1>-2 \end{array}\right. \\ x\in[2;3] \end{cases}$

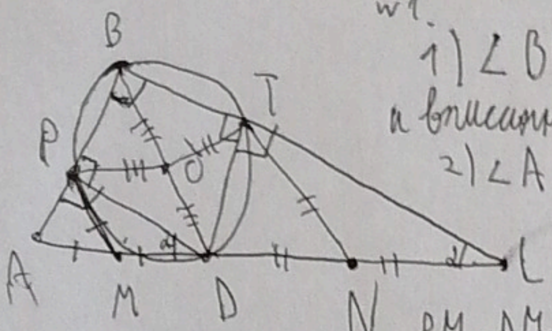
Ответ: (-1); 2; $(0{,}5\pm\sqrt{6})$.

211007789 (U273527 M1273655)

Чистовик.

Вариант 11, 10 класс, часть I.

№1.



1) $\angle BPD = \angle BTD = 90^\circ$, т.к. опираются на диаметр BD и вписанные.

2) $\angle APD = \angle DTC = 90^\circ$ как смежные им.

3) т.к. $\triangle APD$ и $\triangle DTC$ – прямоугольные, а т. M и т. N – середины их гипотенуз, то $PM = AM = AD$ и $DN = NT = CN$ как медиана к гипотенузе.

4) Пусть $\angle PDM = \alpha$, тогда $\angle MPD = \alpha$, т.к. $\triangle MPD$ – равнобедренный; $\angle AMP = 2\alpha$ как внешний для $\triangle MPD$. $\angle DNT = \angle AMP = 2\alpha$ как соответственные при $NT \parallel PM$ и сек. AC, $\Rightarrow \angle CTN = \angle NCT = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$, т.к. $\angle DNT$ – внешний для равнобедренного $\triangle CTN$.

5) $\angle APD = \angle DTC = 90^\circ$; $\angle PDA = \angle TCD = \alpha$, $\Rightarrow \angle PAD = \angle TDC = 90^\circ - \alpha$, $\Rightarrow$

$\angle ABC = 180^\circ - \angle PAD - \angle TCD = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) - \alpha = 90^\circ$.

6) Рассмотрим вписанный PBTD: $\angle DPB = \angle PBT = \angle BTD = 90^\circ$, $\Rightarrow$ вписанный прямоугольник $\Rightarrow$ квадрат; тогда:

$PD = DT$

$AD \cdot \cos\alpha = CD \cdot \sin\alpha$

$2PM\cos\alpha = 2TN\sin\alpha$

$\frac{1}{2}\cos\alpha = 2\sin\alpha$

$4\sin\alpha = \cos\alpha$, $\Rightarrow 1 = 17\sin^2\alpha$; $\sin\alpha = \sqrt{\frac{1}{17}}$, тогда $\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{17}}$.

7) $S_{APD} = \frac{PD \cdot AD \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{AD^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{2} = \frac{4 \cdot PM^2 \cdot 4}{2 \cdot \sqrt{17} \cdot \sqrt{17}} = \frac{2}{17}$;

8) $S_{CTD} = \frac{CD^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{2} = \frac{4TN^2 \cdot 4}{2 \cdot 17} = \frac{32}{17}$.

9) $S_{PBTD} = DT^2 = CD^2 \cdot \sin^2\alpha = \frac{4 \cdot TN^2}{17} = \frac{16}{17}$.

10) $S_{ABC} = S_{APD} + S_{CTD} + S_{PBTD} = \frac{2}{17} + \frac{32}{17} + \frac{16}{17} = 2\frac{16}{17}$.

Ответ: $\angle ABC = 90^\circ$, $S_{ABC} = 2\frac{16}{17}$.

211007789 (U273327/ M1273653)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211007789**

ID профиля: **273527**

Вариант 11

Чистовик.

10 класс, вариант 11, часть 2, стр. 1.

№4.

$$\begin{cases} \dfrac{4}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 5 \\ x^4+y^4+3x^2y^2 = 20 \end{cases}$$

1) Обозначим $a = x^2 \geq 0$ и $b = y^2 \geq 0$; ОДЗ: $a+b \neq 0$.

2) $\begin{cases} \dfrac{4}{a+b} + ab = 5 \\ a^2+b^2+3ab = 20 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{4}{a+b} + ab = 5 & (1) \\ (a+b)^2 + ab = 20 & (2) \end{cases}$

4) $(2)-(1)$:

$(a+b)^2 - \dfrac{4}{a+b} = 20-5 \quad | \cdot (a+b) \neq 0$

$(a+b)^3 - 15(a+b) - 4 = 0$

5) Пусть $a+b = d$, тогда $d > 0$ и:

$d^3 - 15d - 4 = 0.$

6) d_1 ~~кр~~ является делителем (-4), $\Rightarrow$ проверяем $(\pm 1, \pm 2, \pm 4)$;

угадываем $d_1 = 4$.

7)
$$\begin{array}{l|l} d^3+0d^2-15d-4 & d-4 \\ \hline -\ d^3-4d^2 & d^2+4d+1 \\ \quad 4d^2-15d & \\ -\ 4d^2-16d & \\ \qquad d-4 & \\ \quad -\ d-4 & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$d^2+4d+1 = (d+2)^2 - 3 = (d+2+\sqrt{3})(d+2-\sqrt{3})$;

$d_2 = -2-\sqrt{3} < 0$

$d_3 = -2+\sqrt{3} < 0$, $\Rightarrow d = 4$.

8) Подставим $a+b = d$: $\dfrac{4}{4} + ab = 5$; $ab = 5-1 = 4$.

9) $\begin{cases} a+b = 4 & (3) \\ ab = 4 & (4) \end{cases}$ $\begin{cases} (3) \\ \sqrt{(3)^2 - 4\cdot(4)} \end{cases}$ $\begin{cases} a+b = 4 \\ (a-b)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b = \frac{4}{2} = 2. \\ a = b \end{cases}$

10) $x = \pm\sqrt{a} = \pm\sqrt{2}$; $y = \pm\sqrt{b} = \pm\sqrt{2}$.

Ответ: $(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$; $(-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$; $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$; $(\sqrt{2}; \sqrt{2})$.

Чистовик.

10 класс, 11 вариант, часть 2, стр. 2.

№5.

1) Т.к. $x \neq 0$, $x \neq 65$, $y \neq 0$, $y \neq 65$, то $x \in [1; 64]$, а $y \in [1; 64]$ и являются целыми для узлов, => каждое значение можно определить 64 способами

2) Рассмотрим прямые $y = x$ и $y = 65 - x$:

$$\begin{cases} y = x \\ y = 65 - x \end{cases} \Rightarrow \quad x = 65 - x$$

$$65 = 2x$$

$$x = 32{,}5 \not\vdots\, 1,$$ => прямые не пересекаются в узлах.

3) Тогда выбрать одну точку, принадлежащую этим прямым (одной из них) $64 + 64 = 128$ способов, т.к. на каждое значение $x \in [1; 64]$ имеется $y \in [1; 64]$ для каждой прямой, => число узлов на каждой - по 64 шт.

4) Вариантов выбрать другой узел ($y_2 \neq y_1$ и $x_2 \neq x_1$, где $(x_1; y_1)$ - I точки, $(x_2; y_2)$ - II точки, будет $\underbrace{64 \cdot 64}_{\text{всего}} - \underbrace{64}_{\text{вычет по } x} - \underbrace{64}_{\text{вычет по } y} + 1 = 4096 - 128 + 1 = 3969$ вариантов.

дубликация $(x_1; y_1)$ при вычитании

5) Если взять произведение способов выбора т. 1 и т. 2, то дважды учтутся случаи, где обе точки принадлежат прямым $y = x$ и $y = 65 - x$, поэтому рассчитаем их количество:

$$\underbrace{128}_{\text{I точка}} \cdot \underbrace{(128 - 1 - 1 - 1)}_{\text{II точка, не совпадает (т. I) и имеет отличные от I } x_2 \text{ и } y_2} : \underbrace{2}_{\text{учёт дублирования вариант}} = 64 \cdot 125 = 8000$$

6) Итого вариантов выбрать две точки по заданным условиям:

$128 \cdot 3969 - 8000 = 508032 - 8000 = 500032$ способа.

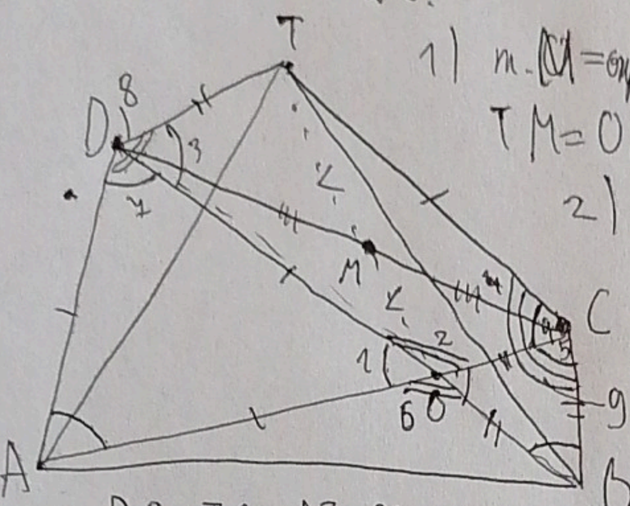
Ответ: 500032 способа.

211007789 (U273527 M1273656)

Чистовик

10 класс, 11 вариант, часть 2, стр. 3.

№6.



1) т. M = отр. $OT \cap$ отр. DC; $DM = MC$ по условию; $TM = OM$ по построению т. T;

2) $\angle 2 = 120^\circ = 180^\circ - \angle 1$ как смежные;

3) $OCTD$ − параллелограмм (TO и DC делятся т. M − точкой пересечения, пополам), $\Rightarrow \angle 4 = \angle 3 = 60^\circ$ (смежные по стороне с $\angle 2$; $\angle 4 = \angle TCO$; $\angle 3 = \angle TDO$);

$DO = TC$ и $DT = CO$ как противолежащие стороны;

4) $\angle 7 = \angle 5 = 60^\circ$, т.к. в правильном треугольнике ($\angle 5 = \angle BCA$; $\angle 7 = \angle ADB$).

5) $\angle 6 = \angle 2 = 120^\circ$ как вертикальные; $\angle 8 = \angle 3 + \angle 7 = 120^\circ = \angle 4 + \angle 5 = \angle 9 = 120^\circ$, т.к. два угла с общей стороной образуют третий ($\angle 8 = \angle ADT$; $\angle 9 = \angle TCB$).

6) $\Delta ADT = \Delta TCB = \Delta AOB$ по углу и прилежащим сторонам:

$AD = TC = AO$ и $DT = BC = BO$; $\angle 8 = \angle 6 = \angle 9 = 120^\circ$; $\Rightarrow$

7) равны соответственные элементы:

$AT = TB = AB$, $\Rightarrow$ треугольник правильный (ΔABT).

8) $AT = \sqrt{2^2 + 5^2 + 2\cdot 2\cdot 5\cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{4 + 25 + 20\cdot 0{,}5} = \sqrt{39}$; $\Rightarrow$

$S_{BAT} = \dfrac{AT^2\cdot\sqrt{3}}{4} = \dfrac{39\sqrt{3}}{4}$ для правильного треугольника.

9) $S_{ABCD} = S_{AOD} + S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} = \dfrac{4\cdot 2\cdot 5\cdot 2(\sin 60^\circ + \sin 120^\circ)}{2} =$

$= 40\cdot 2\sin 60^\circ = 40\cdot\sqrt{3}$.

10) $\dfrac{S_{BAT}}{S_{ABCD}} = \dfrac{\frac{39\sqrt{3}}{4}}{40\sqrt{3}} = \dfrac{39}{160}$.

Ответ: а) доказано в п. 7); б) $S_{BAT} : S_{ABCD} = 39 : 160 = 0{,}24375$

Черновик.

№4.

$x^2=a,\ a\geq 0;\ y^2=b,\ b\geq 0$

$$\begin{cases}\frac{4}{a+b}+ab=5\\ a^2+b^2+3ab=20\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{4}{a+b}=5-ab\\ (a+b)^2=20-ab\end{cases}$$

$$16=(20-ab)(5-ab)^2$$

$$16=(20-ab)(25-10ab+a^2b^2)$$

$$16=500-200ab+20a^2b^2-25ab-10a^2b^2-a^3b^3$$

$$a^3b^3-10a^2b^2+225ab-484=0 \quad ab=c,\ \text{то } c\geq 0:$$

$$c^3-10c^2+225c-484=0 \quad 2..3$$

$$(a+b)^2-\frac{4}{a+b}=15$$

$$(a+b)^3-15(a+b)-4=0$$

$$d^3-15d-4=0 \qquad (d-4)(d^2+4d+1)=(d-4)(d+2+\sqrt{3})(d+2-\sqrt{3})$$

$$4>0 \quad -2-\sqrt{3}<0 \quad -2+\sqrt{3}<0$$

$$d_1=4$$

$$\begin{array}{l|l} d^3-\cancel{0}d^2-15d-4 & d-4\\ \hline -\ d^3-4d^2 & d^2+4d+1\\ \quad 4d^2-15d & \\ \quad -\ 4d^2-16d & \\ \qquad d-4 & \\ \qquad -\ d-4 & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

Черновик

Черновик.

№5.

$x \neq 0$

$x \neq 65$

$y \neq 0$

$y \neq 65$

1 ... 64

1 ... ...

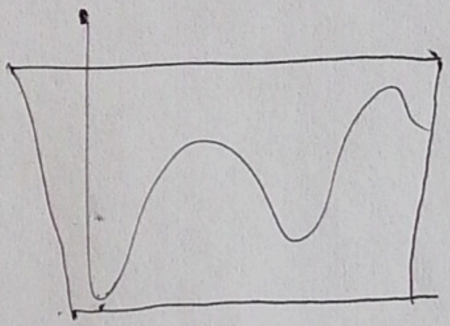
64 ...

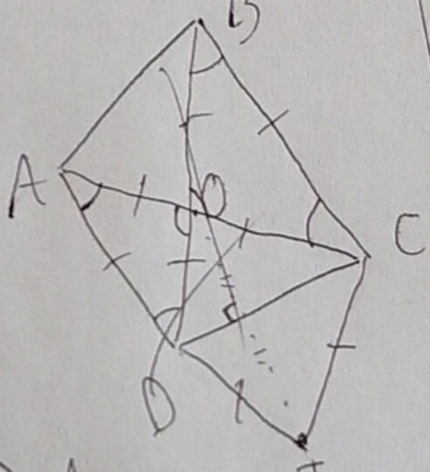
1) Выберем одну точку так, что она принадлежит одной из прямых $y = x$ или $y = 65 - x$.

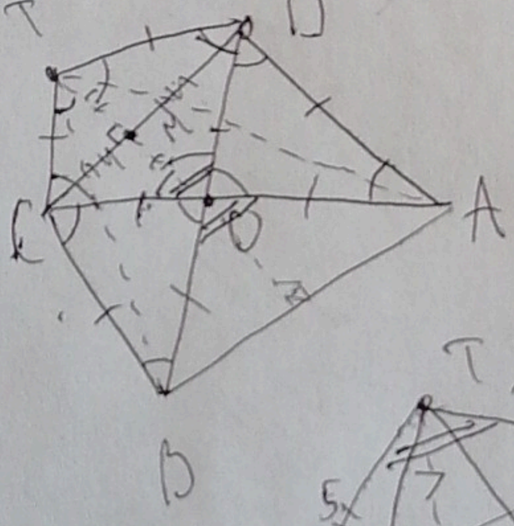
2) т.к. прямые не пересекаются в узлах клеток, которые являются точками с целыми числами, то вариантов выбрать точку на каждой прямой по 64

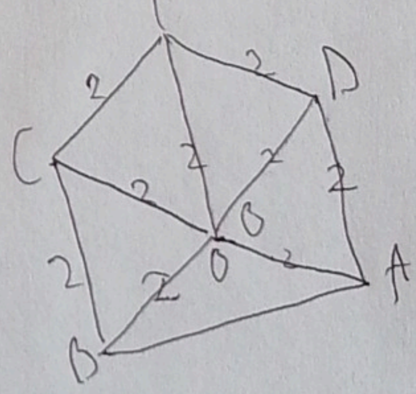
$$
\begin{array}{r}
3969 \\
\times\ 128 \\
\hline
31752 \\
+\ 7938 \\
+\ 3969 \\
\hline
508032
\end{array}
$$

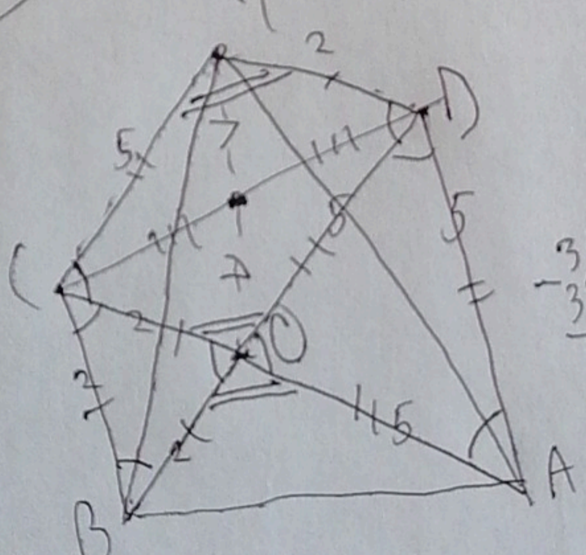
№6.











$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$$
\begin{array}{r|l}
3{,}90 & 16 \\
\cline{2-2}
-3\,2 & 0{,}24375 \\
\hline
70 & \\
-64 & \\
\hline
60 & \\
-48 & \\
\hline
120 & \\
-112 & \\
\hline
80 & \\
-80 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

211007789 (U273527 M1273656)