

Часть 1

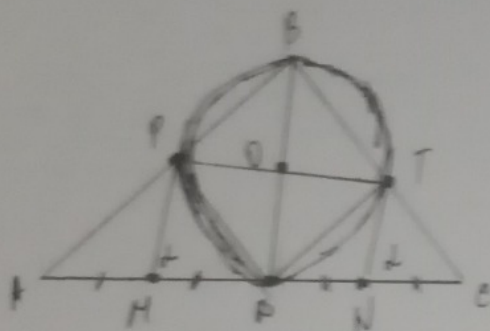
Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211007490**

ID профиля: **316360**

Вариант 11

Исходник
Вариант II
Задача №1



Дано: BD - диаметр
 $AM = MB, AN = NW$
 $PM \parallel TN$
 $MP = \frac{1}{2}$
 $NT = 2$
 $BP = \sqrt{3}$
 Найти:
 $\angle ABC = ?$
 $S_{ABC} = ?$

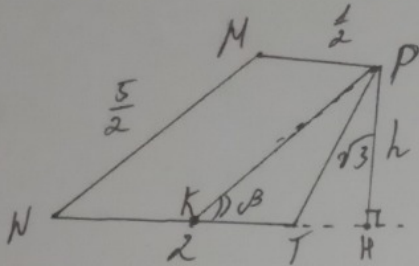
- 1) Проведем PQ и TR .
- 2) $\angle BPA = \angle RTB = 90^\circ$, т.к. оба вписаны в окружность на диаметре.
 Тогда $\angle APB = \angle RTC = 180 - 90 = 90^\circ \Rightarrow \triangle APB$ и $\triangle RTC$ - прямоуголь.
- 3) В $\triangle APB$ PM - медиана $\Rightarrow AM = MP = MB$
 Аналогично в $\triangle RTC$ $AN = TN = NC$
- 4) $PM \parallel TN \Rightarrow \angle PMB = \angle TNC = \alpha$ (как соответств.)
 $\Rightarrow \angle MPB = \frac{180 - \alpha}{2} = 90 + \frac{\alpha}{2}$ и $\angle ANT = 180 - \alpha \Rightarrow \angle TRN = \frac{180 - \alpha}{2} = 90 - \frac{\alpha}{2}$
- 5) $\angle MBP + \angle TRN + \angle PAT = 180$.
 $\frac{\alpha}{2} + 90 - \frac{\alpha}{2} + \angle PAT = 180$
 $\angle PAT = 90$, тогда, т.к. четырех. $PATB$ - вписан $\angle ABC = \angle PAT = 90^\circ$
 $\Rightarrow \angle ABC = 90^\circ$
- 6) Из н.з. следует, что $PM = AM = MB = \frac{1}{2}$ и $NT = AN = NC = 2$
 Тогда $MN = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$
- 7) $\angle PBT = 90^\circ \Rightarrow PT$ - диаметр $\Rightarrow PT = BD = \sqrt{3}$
- 8) Т.к. PM - медиана $\Rightarrow S_{APM} = S_{MPB} = \frac{1}{2} S_{APB}$. Аналогично $S_{ATN} = \frac{1}{2} S_{RTC}$.
- 9) \square Четырех. $PATB$ - прямоугольный, т.к. PT - диаметр и все углы 90° .
 PT - его диаметр $\Rightarrow S_{PAT} = \frac{1}{2} S_{PATB}$

Чистовик Вариант II
Задача №1 (пропорции)

10) MPTN - трапеция, т.к. PM || NT и PT || MN.

$$S_{MPTN} = S_{MPO} + S_{OPT} + S_{NTP} = \frac{1}{2} S_{MPO} + \frac{1}{2} S_{NTP} + \frac{1}{2} S_{OPT} = \frac{1}{2} S_{ABO} \Rightarrow S_{ABO} = 2 S_{MPTN}$$

11) В трапеции MPTN $MP = \frac{1}{2}$; $NT = 2$; $MN = \frac{5}{2}$; $PT = \sqrt{3}$.



Пробегим PK и MN

$NMPK$ - вып-м $\Rightarrow NM = PK = \frac{5}{2}$ и $MP = NK = \frac{1}{2}$, тогда $KT = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

По т. косин. в $\triangle KPT$:

$$3 = \frac{25}{4} + \frac{9}{4} - 2 \cos \beta \cdot \frac{25}{2} \cdot \frac{3}{2}$$

$$\cos \beta = \frac{\frac{25}{4} + \frac{9}{4} - 3}{2 \cdot \frac{15}{4}} = \frac{11}{15} \Rightarrow \sin \beta = \sqrt{1 - \frac{121}{225}} = \frac{2\sqrt{26}}{15}$$

$$\Rightarrow h = KP \cdot \sin \beta = \frac{5}{2} \cdot \frac{2\sqrt{26}}{15} = \frac{\sqrt{26}}{3}$$

$$12) S_{NMPT} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot \left(\frac{MP + NT}{2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{26}}{3} \cdot \left(\frac{\frac{1}{2} + 2}{2} \right) = \frac{5\sqrt{26}}{24} \Rightarrow S_{ABO} = \frac{5\sqrt{26}}{12}$$

Ответ: $\angle ABC = 90^\circ$; $S_{ABO} = \frac{5\sqrt{26}}{12}$

Числовые
Вариант 11
Задача 12

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} + 3 = 2\sqrt{6+x-x^2}$$

$$\sqrt{6+x-x^2} = \sqrt{x+2} \cdot \sqrt{3-x}$$

Введем замену: $\sqrt{x+2} = a$; $\sqrt{3-x} = b$. Тогда $a \geq 0$; $b \geq 0$
Перепишем систему:

$$\begin{cases} a^2 - b + 3 = 2ab \Rightarrow a = \frac{b-3}{1-2b} \quad (b \neq \frac{1}{2} \text{ т.к. не подходит по системе}) \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases}$$

$$\left(\frac{b-3}{1-2b}\right)^2 + b^2 = 5$$

$$b^2 - 6b + 9 + b^2 - 4b^3 + 4b^4 - 5 + 10b - 20b^2 = 0$$

$$4b^4 - 4b^3 - 18b^2 + 14b + 4 = 0$$

$$4b^3(b-1) - 2(9b^2 - 7b - 2) = 0$$

$$2b^3(b-1) - (b-1)(9b+2) = 0$$

$$(b-1)(2b^3 - 9b - 2) = 0$$

$$(b-1)(2b^3 - 8b - (b+2)) = 0$$

$$(b-1)(2b(b-2)(b+2) - (b+2)) = 0$$

$$(b-1)(b+2)(2b^2 - 4b - 1) = 0$$

$$\begin{cases} b = 1 \\ b = -2 \quad b \geq 0 \Rightarrow \text{этот вариант не подходит} \\ 2b^2 - 4b - 1 = 0 \quad (1) \end{cases}$$

$$(1): 2b^2 - 4b - 1 = 0$$

$$D = 16 + 8 = 24$$

$$b_{1,2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{6}}{4} = 1 \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$b = 1 - \frac{\sqrt{6}}{2} < 0 \Rightarrow \text{не подходит}$$

Числовые неравенства II
Задача 12 (неравенства)

$$\begin{cases} b=1 \\ b=1+\frac{\sqrt{b}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{3-x^2}=1 \\ \sqrt{3-x^2}=1+\frac{\sqrt{b}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2 \\ 3-x^2=1+\frac{\sqrt{b}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2 \\ x=\frac{1}{2}-\sqrt{6} \quad (2) \end{cases}$$

След. т.е. $x+2 \geq 0$ и $3-x \geq 0$ (условие существования корней), то $x \in [-2; 3]$.

Сравним (2) с (-2)

$$\frac{1}{2}-\sqrt{6} > -2$$

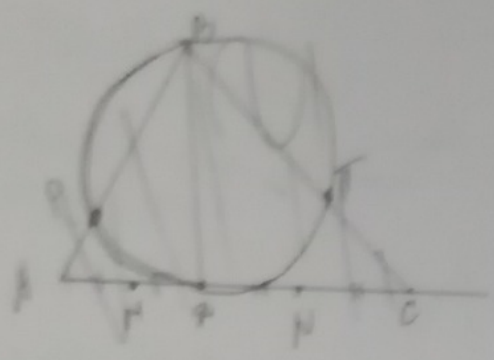
$$\frac{5}{2} > \sqrt{6}$$

$$6,25 > 6 \Rightarrow \frac{1}{2}-\sqrt{6} > -2$$

Тогда $x = \frac{1}{2}-\sqrt{6}$ и $x = 2$

Ответ: $x = \frac{1}{2}-\sqrt{6}; x = 2$

Refraction



$$\sqrt{x^2} - \sqrt{1-x^2} = 3 + 2\sqrt{1-x^2}$$

$$\sqrt{x^2} = a$$

$$\sqrt{3-x^2} = b$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \\ 6-x^2 \geq 0 \end{cases}$$

$$x \in [-1, 3]$$

$$\begin{cases} a - b + 3 = 2ab \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2ab - a + b + 3 \\ \frac{2}{5}a^2 + \frac{3}{5}b^2 = 3 \end{cases}$$

$$\frac{2}{5}a^2 + \frac{3}{5}b^2 - 2ab + a - b = 0$$

$$\begin{cases} a(1-2b) = b-3 \implies a = \frac{b-3}{1-2b} \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases}$$

$$\frac{(b-3)^2}{(1-2b)^2} + b^2 = 5$$

$$\frac{b^2 - 6b + 9}{1 - 4b + 4b^2} + b^2 = 5$$

$$b^2 - 6b + 9 + b^2 - 4b^3 + 4b^4 - 5 + 20b - 20b^2 = 0$$

$$4b^4 - 4b^3 - 18b^2 + 14b + 4 = 0$$

$$b = 1$$

$$\frac{2b^3 - 4b^2 - 4b^2 + 4b^2 + 4b^2}{-4b^2 - 4b^2} \left| \frac{b-1}{2b^3} \right.$$

Usporedimo

$$2b^3(b-1) - (11b^2 + 4b - 4) = 0$$

$$2b^3(b-1) - (b-1)(3b+2) = 0$$

$$(b-1)(2b^3 - 3b - 2) = 0$$

$$(b-1)(2b^2 - 3b - 2) = 0$$

$$(b-1)(2b(b-2)(b+2) - (b+2)) = 0$$

$$2b(b-1)(b+2)(2b^2 - 4b - 1) = 0$$

$$\begin{cases} b=1 \\ b=2 \text{ or } b=0 \\ 2b^2 - 4b - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=1 \\ b = \frac{4 \pm \sqrt{16}}{4} \\ b = \frac{4 - \sqrt{16}}{4} \text{ or } x \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=1 \Rightarrow a=2 \\ b=1 + \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow a = \frac{11 \frac{\sqrt{6}}{2} - 3}{1 - 2 + \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6} - 4}{-2 - \sqrt{6}} = \frac{4 - \sqrt{6}}{2\sqrt{6} + 2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} = 2 \Rightarrow x=2 \\ \sqrt{3-x} = 1 \Rightarrow x=2 \\ \sqrt{x+2} = \frac{4-\sqrt{6}}{2\sqrt{6}+2} \\ \sqrt{3-x} = 1 + \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow x = 3 - x = 1 + \sqrt{6} \Rightarrow x = \frac{1 - \sqrt{6}}{2} \end{cases}$$

$$2 \pm \frac{5}{2} \sqrt{16}$$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211007490**

ID профиля: **316360**

Вариант 11

Числовые
Вариант 11
Задача 14.

$$\begin{cases} \frac{4}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 5 \\ x^4 + y^4 + 3x^2y^2 = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{4}{x+y^2} + x^2y^2 = 5 \\ (x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = 20 \end{cases}$$

Пусть $x^2+y^2 = a$ и $x^2y^2 = b$, тогда $a > 0$; $b > 0$ и

$$\begin{cases} \frac{4}{a} + b = 5 \\ a^2 + b = 20 \end{cases}$$

$$a^2 - \frac{4}{a} - 15 = 0$$

$$a^3 - 15a - 4 = 0, a \neq 0$$

$$a^3 - 64 - 15a + 60 = 0$$

$$(a-4)(a^2+4a+16) - 15(a-4) = 0$$

$$(a-4)(a^2+4a+1) = 0.$$

$$\begin{cases} a = 4 \\ a^2 + 4a + 1 = 0. \quad (1) \end{cases}$$

$$(1): a^2 + 4a + 1 = 0.$$

$$D = 16 - 4 = 12$$

$$a_{1,2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

$$a_1 = \frac{-4 - 2\sqrt{3}}{2} < 0 \Rightarrow \text{не подходит}$$

$$a_2 = \frac{-4 + 2\sqrt{3}}{2} < 0 \Rightarrow \text{не подходит}$$

Тогда $a = 4 \Rightarrow b = 4$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2y^2 = 4 \Rightarrow y^2 = \frac{4}{x^2} \end{cases}$$

$$x^2 + \frac{4}{x^2} = 4$$

$$x^4 - 4x^2 + 4 = 0$$

$$(x^2 - 2)^2 = 0$$

Умовки
Бапуант 211
Задача №4 (неопределенное)

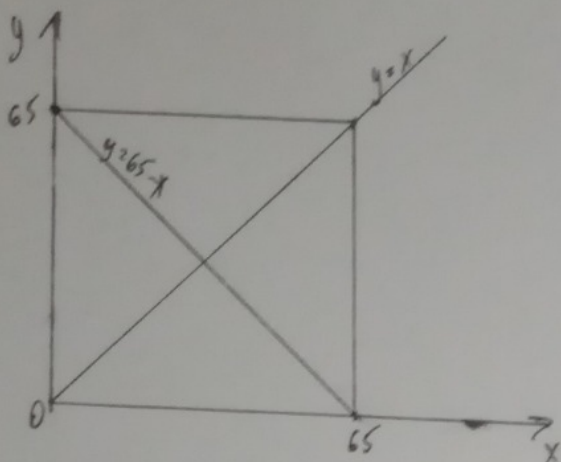
$$x^2 = 2$$

$$\begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases}$$

Введем $x = \sqrt{2}$, $т$ е $y^2 = 4$
Тогда $y^2 = \frac{4}{(\pm\sqrt{2})^2} = 2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2}$.

Ответ: $(-\sqrt{2}, +\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (\sqrt{2}, +\sqrt{2})$

Числовые
Вариант #11
Задача №5



кратко ответом

- 1) Всего узлов сетки внутри квадрата! $(65-1)(65-1) = 64^2$
 - 2) Из этих 64^2 узлов на прямых $y=x$ и $y=65-x$ лежат $2 \cdot 64 = 128$. Значит кол-во способов выбрать узел на одной из этих прямых равно 128.
 - 3) После того, как выбран первый узел, нельзя, чтобы второй был выбран так, что он бы попал на вертикальной и горизонтальной прямой, проходящей через первый узел. Тогда кол-во вариантов выбора 2-го узла уменьшится на общее кол-во узлов в вертикальной и горизонтальной прямой: $64^2 - 64 - 64 = 63^2$
 - 4) Т.е. узлы между собой не отключаются, то кол-во способов выбрать 2 узла будет: $\frac{128 \cdot 63^2}{2} = 64 \cdot 63^2 = 254016$
- Ответ: 254016

Числовы
 Вариант II
 Задача №6 (продолжение)

7) $\angle BOA = 180 - 60 = 120$.

8) Из $\triangle BOA$:

$$x + 120 + y = 180 \Rightarrow x + y = 60$$

9) $\triangle AOB$ по Т. в сумме угл. в треуго. $\triangle AOB$:

$$\angle AOB + \angle OAB + \angle OBA = 180$$

$$x + 60 - x + y + 60 - y + \angle AOB = 180$$

$$60 + 60 + 60 - 60 + \angle AOB = 180$$

$$\angle AOB = 60$$

Тогда т.е. $\triangle AOB$ - \triangle $\Rightarrow \angle AOB = \angle OAB = \frac{180 - \angle AOB}{2} = \frac{180 - 60}{2} = 60$

10) В $\triangle AOB$ все углы $60 \Rightarrow \triangle AOB$ - равносторонний

11) Пропорционны отрезки BE и AK с пропорциональными AD :

\triangle Пусть $BE \cap AD = K$, тогда $BE \parallel AK$ и $CK \parallel BD$ (т.е. $AK \parallel BD$)

Тогда $BEAD$ - трап-м $\Rightarrow BE = KD$ и $BD = EK$.

12). $AC = CE = AK$ т.е. $AC = AD + DC$, $AK = AD + DK = AD + BE$,
 $CE = BD = CD + DB \Rightarrow \triangle ABE$ - равносторонний.

13) Пусть h - высота $\triangle ABE$ - высота $ABED$ и AEK .

$$\text{Тогда } S_{ABED} = \frac{1}{2} h (AD + BE)$$

$$S_{AEK} = \frac{1}{2} h (AK = \frac{1}{2} h (AD + BE))$$

$$\text{Тогда } S_{ABED} = S_{AEK} = \frac{BK^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{(5\sqrt{2})^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{25 \sqrt{3}}{1}$$

$$\text{Тогда } S_{AEK} = \frac{1}{2} h (5\sqrt{2}) = \frac{1}{2} h \Rightarrow \frac{1}{2} h = \frac{25 \sqrt{3}}{1} = \frac{50 \sqrt{3}}{2}$$

Условия
Вариант 11
Задача 16 (геометрия)

14) По об-бу п/с стороны:

$$AK = \frac{AD - BC}{2} = \frac{5 - 2}{2} = \frac{3}{2}$$

15) По т. Пиф. в $\triangle ABK$:

$$AB = \sqrt{AK^2 + BK^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{49 \cdot 3}{4}} = \sqrt{39}$$

16) $\triangle ABK$ - прав. $\Rightarrow S_{ABK} = \frac{AB^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{39\sqrt{3}}{4}$

$$17) \frac{S_{ABK}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{39\sqrt{3}}{4}}{\frac{49\sqrt{3}}{4}} = \frac{39}{49}$$

Ответ: $\frac{S_{ABK}}{S_{ABCD}} = \frac{39}{49}$.

Upplysning

~ 4

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{4}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 5 \\ x^4+y^4+3x^2y^2 = 10. \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} x^2+y^2 = a \\ x^2y^2 = b. \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{4}{a} + b = 5 \\ a^2 + b = 10. \end{array} \right.$$

$a \neq 0$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 11 \\ \underline{22} \\ 1331 \\ \underline{14641} \end{array}$$

$$a^3 - 15a - 4 = 0$$

$a = 4$

$$a^3 - 64 - 15a + 60 = 0$$

$$(a-4)(a^2+16a+16) - 15(a-4) = 0$$

$$(a-4)(a^2+16a+1) = 0.$$

$$a = 4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a_2 = 4 \\ a_2 = \frac{4 - 16 \pm \sqrt{252}}{2} < 0 \end{array} \right. \phi$$

$$a = 4 \Rightarrow b = 4.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2+y^2 = 4 \\ x^2y^2 = 4 \Rightarrow y^2 = \frac{4}{x^2} \end{array} \right.$$

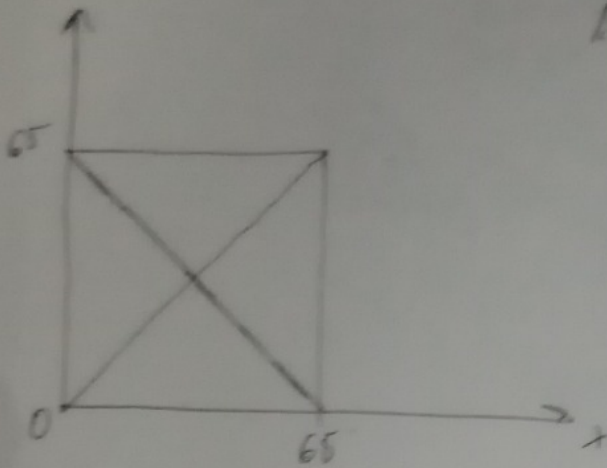
$$x^2 + \frac{4}{x^2} - 4 = 0$$

$$x^4 - 4x^2 + 4 = 0 \quad x \neq 0.$$

$$x^2 - 2 = 0$$

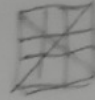
$$x = \pm \sqrt{2} \Rightarrow y = \pm \sqrt{2}$$

Задача 25.



Решено 64^2 квадратов
 2^n

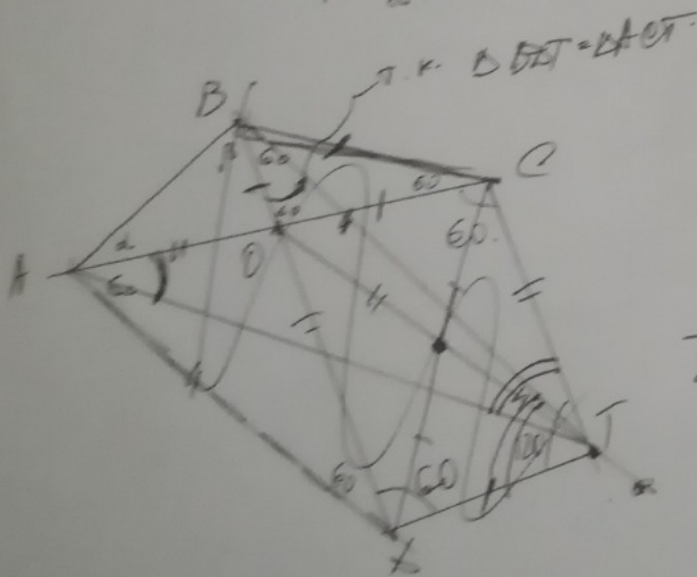
128 на $y=0$ и $y=64-x$ кресте



$$\frac{128 \cdot (64^2 - 64 \cdot 4 - 63)}{2} = \frac{64 \cdot 63^2}{64 \cdot 63 \cdot 62}$$

~~4225~~ - 260 + 42

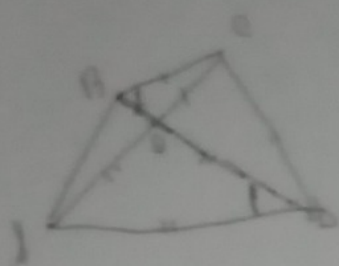
26.



$$\begin{array}{r} 238965+42 \\ = 23969 \\ \begin{array}{r} 23 \\ \times 3969 \\ \hline 15876 \\ 23814 \\ \hline 254016 \end{array} \end{array}$$

209
=60

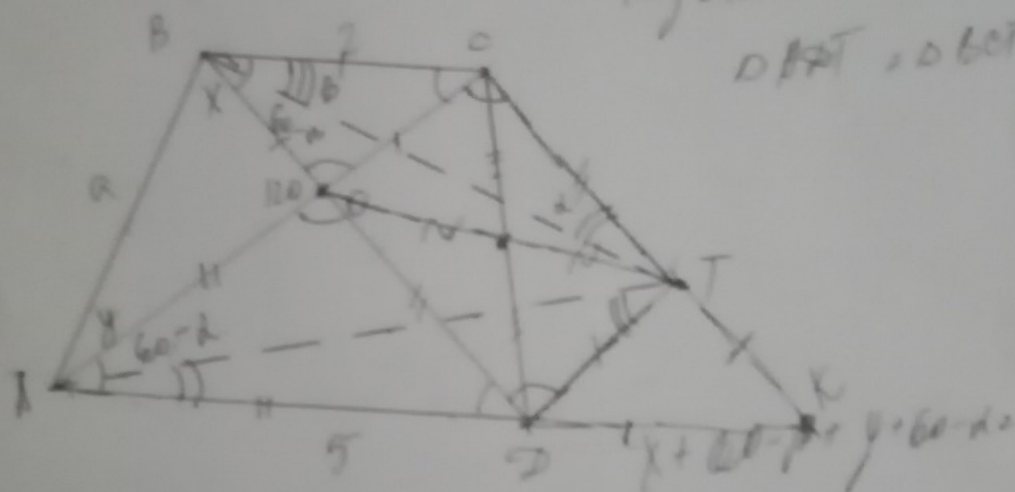
Gegeben



$$d + \beta = 120 - 120 = 60$$

$$\alpha + \gamma = 120 - 120 = 60$$

$$D \Delta A T = D \Delta B T$$



$$S_{\text{Ges}} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

$$= 60 + 1200 - 60 \cdot 1200$$

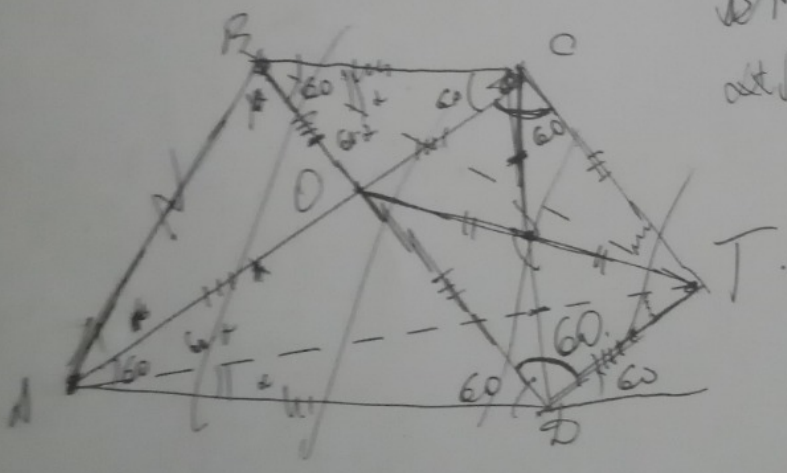
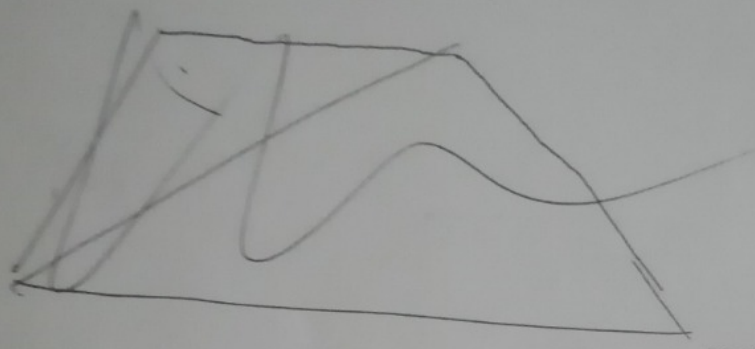
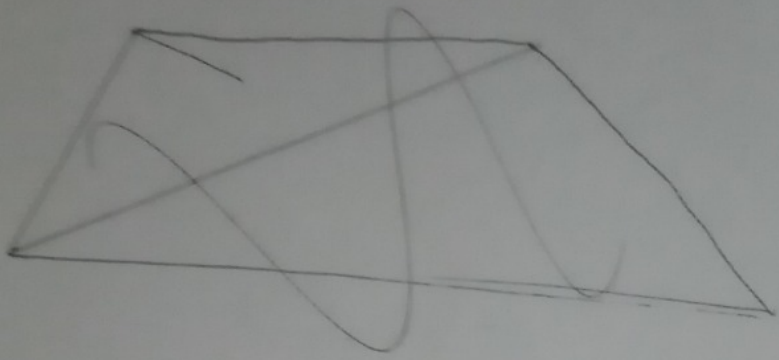
$$\Rightarrow \angle B T A = 60^\circ$$

$$S_{\text{Ges}} = S_{\text{Ges}} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \Rightarrow \angle A T B = \angle B A T = \angle B T A = 60^\circ$$

$$a = \sqrt{\frac{1200}{\frac{\sqrt{3}}{4}} + \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S_{\text{Ges}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{12}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{S_{\text{Ges}}}{a^2} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

депробна



$\triangle APT \cong \triangle BPT$
 $\text{out } A = 60^\circ$
 $\triangle APT \cong \triangle BET$