Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211007396**

ID профиля: **171369**

Вариант 11

Вариант 11

чистовик

Задача №2. $\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}+3=2\sqrt{6-x-x^2}$

$$\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}-2\sqrt{(x+2)(3-x)}+3=0 \quad (1)$$

Заметим, что $x\in[-2;3]$, т. к. при других значениях x одно из значений $x+2$; $3-x$ будет отрицательным, что невозможно для подкоренного выражения.

Также заметим, что $(\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x})^2=x+2-2\sqrt{(x+2)(3-x)}+3-x=$
$=-2\sqrt{(x+2)(3-x)}+5$

То есть $(\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x})^2-2=-2\sqrt{(x+2)(3-x)}+3 \quad (2)$

Подставим (2) в (1):

$$(\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x})^2-2+\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}=0$$

Пусть $\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}=y$.

Тогда $y^2+y-2=0$:

$$\left[\begin{array}{l} y=-2 \\ y=1 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{ll} \sqrt{x+2}=\sqrt{3-x}-2 & (3) \\ \sqrt{x+2}=\sqrt{3-x}+1 & (4) \end{array}\right.$$

Решим (3): $\sqrt{x+2}=\sqrt{3-x}-2$

$x+2=3-x-4\sqrt{3-x}+4$

$2x-5=-4\sqrt{3-x}$

$4x^2-20x+25=48-16x$

$4x^2-4x-23=0$

$D=16+368=384$

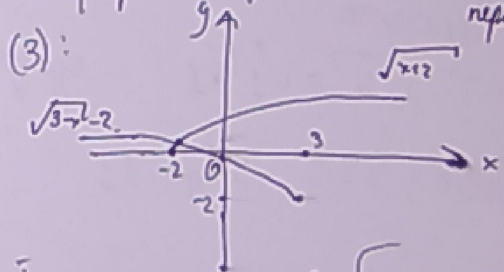
$\sqrt{D}=\sqrt{384}=8\sqrt{6}$

$x=\dfrac{4\pm8\sqrt{6}}{8}=0{,}5\pm\sqrt{6}$

Графики функций:

(3):

1 точка пересечения

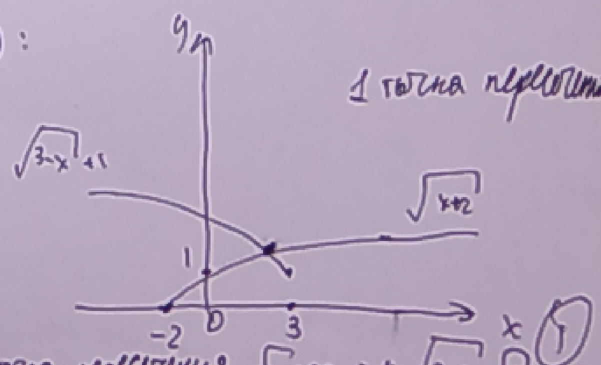


Точка пересечения будет, т. к.

$\sqrt{3-(-2)}-2=\sqrt{5}-2>0.$

(4):

1 точка пересечения



Точка пересечения будет, т. к. $\sqrt{3+2}=\sqrt{5}>1.$

№2 (продолжение) Иистовин.

Проверка корней:

$x=0{,}5+\sqrt{6}$: $\sqrt{2{,}5+\sqrt{6}}=\sqrt{2{,}5-\sqrt{6}}-2$

$\sqrt{2{,}5+\sqrt{6}}>\sqrt{2{,}5-\sqrt{6}}$, значит $\sqrt{2{,}5+\sqrt{6}}>\sqrt{2{,}5-\sqrt{6}}-2$ – противоречие

Значит, ~~что~~ это лишний корень.

Тогда $x=0{,}5-\sqrt{6}$ – подходит

Решаем (4): $\sqrt{x+2}=\sqrt{3-x}+1$

$x+2=3-x+2\sqrt{3-x}+1$

$2x-2=2\sqrt{3-x}$

$x^2-2x+1=3-x$

$x^2-x-2=0$

$\left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-1 \end{array}\right.$

Проверка:

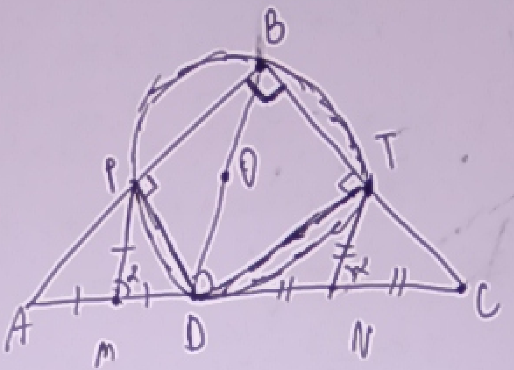
$x=2$: $\sqrt{4}=\sqrt{1}+1$ – подходит $x=-1$: $\sqrt{1}=\sqrt{4}+1$ – не подходит

Ответ: $x=2$; $x=0{,}5-\sqrt{6}$.

Чистовик.

Вариант 11

№1



Дано: ~~PM∥TN~~
$\triangle ABC$, $D \in AC$.
окр: BD - диаметр,
$P = AB \cap$ окр.
$T = BC \cap$ окр
M - серед. AD, N - серед CD
$PM \parallel TN$, $PM = \frac{1}{2}$,
$TN = 2$, $BD = \sqrt{3}$

Найти: а) $\angle ABC$
б) S_{ABC}.

Решение.

а) $\angle BPD$ опирается на диаметр $\Rightarrow \angle BPD = 90°$
Аналогично $\angle TPD = 90°$
$\triangle APD$ - прямоугольный, PM - медиана $\Rightarrow$
$PM = AM = MD$ Аналогично $TN = DN = CN$.
т.к. $PM \parallel TN$, то $\angle PMD = \angle TNC = \alpha$ (секущая AC
$\angle TND = 180° - \alpha$.
$\triangle PMD$ - равнобедренный, $\angle PMD = \alpha \Rightarrow \angle MPD = \angle MDP = 90° - \frac{\alpha}{2}$.
Аналогично $\angle DTN = \angle NDT = \frac{\alpha}{2}$
$\angle PDT = 180° - \angle PDM - \angle TDN = 180° - \frac{\alpha}{2} - 90° + \frac{\alpha}{2} = 90°$.
$\angle ABC = 180° - \angle PDT = 180° - 90° = 90°$

б) BTDP - прямоугольник.
$\angle C = 90 - \frac{\alpha}{2}$, $\triangle TDC$: $TD = CD \cdot \sin\angle C = 2CN \cdot \sin(90 - \frac{\alpha}{2}) = 2 \cdot TN \cdot \cos\frac{\alpha}{2} = 4\cos\frac{\alpha}{2}$
$\angle A = \frac{\alpha}{2}$, $\triangle APD$: $PD = AD \cdot \sin\angle A = 2AM \cdot \sin\frac{\alpha}{2} = 2PM \cdot \sin\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}$

Чистовик.

Вариант 11

№1 (продолжение)

ΔBTD: $BD=\sqrt{TD^2+BT^2}$

$BD^2=TD^2+DP^2$

$3=16\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}$

$3=15\cos^2\frac{\alpha}{2}+1$

$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{2}{15} \Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{2}{15}}$

$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{13}{15} \Rightarrow \sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{13}{15}}$

$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot AC\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\cdot \cancel{25}^{5}\cdot\frac{\sqrt{26}}{\cancel{15}_{3}}=\frac{5}{6}\sqrt{26}$

Ответ: а) 90° б) $\frac{5}{6}\sqrt{26}$

№3

Чистовик.

Вариант 11

B: $ay = ax^2 - 2a^2x + a^3 + 4$

при $a=0$ тогда $4=0$ – не имеет смысла

$y = x^2 - 2ax + a^2 + \frac{4}{a}$

$$\boxed{\begin{aligned} x_{вер} &= \frac{2a}{2} = a \\ y_{вер} &= a^2 - 2a^2 + a^2 + \frac{4}{a} = \frac{4}{a} \end{aligned}}$$

– множество всех точек B: гипербола $y = \frac{4}{x}$

A: $5a^2 + 12ax + 4ay + 8x^2 + 8xy + 4y^2 = 0$

Черновик

$\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} + 3 = 2\sqrt{6+x-x^2}$

$(x+2)(3-x) \geq 0$ max: $x=0,5$

$\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} + 3 = 2\sqrt{(x+2)(3-x)}$

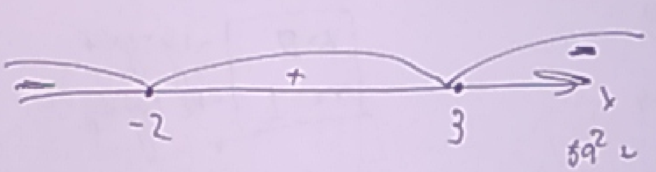
$2,5 \cdot 2,5 = 6,25$

$x^2 - x - 6$

$(x-3)(x+2)$

$\sqrt{x+2}\left(1 - \sqrt{3-x}\right) - \sqrt{3-x}\left(1 + \sqrt{x+2}\right) + 3 = 0$

$y = \sqrt{x+2} - \sqrt{3-x}$



$5a^2 = 12ax + 4ay + 4x^2 + 2(2x+3y)^2$

$\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} - 2\sqrt{(x+2)(3-x)} + 3 = 0$

$8x^2 + 12ax + 8xy$

$4y^2$

$8x^2 + 8xy + 12ax + 4ay =$

$= -5a^2 - 8xy$

$\left(\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x}\right)^2 = x+2 - 2\sqrt{(x+2)(3-x)} + 3 - x =$

$= 5 - 2\sqrt{(x+2)(3-x)}$

$\left(\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x}\right)^2 + \sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} - 2 = 0$

$4x(2x+3a) + 4y(y+a)$

$y^2 + y - 2 = 0$

$y_1 = -2$

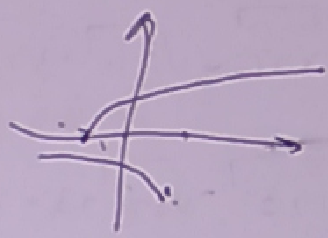
$y_2 = 1$

1

Черновик

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}=-2\\ \sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}=1\end{array}\right.$$

$$\sqrt{5}>2$$



$245 \cdot 245$: 1225, 980, 490, $6{,}0025$

$24 \cdot 24$: 96, 48, 576

$16 \cdot 23$: 48, 32, 368

$576 + 368 = 944$; $944 = 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 59$ ($944 \mid 4$, $236 \mid 2$, $118 \mid 2$...)

$384 \mid 4$; $96 \mid 3$; $32 \mid 4$; $8 \mid 4$; 2

$$\sqrt{x+2}=\sqrt{3-x}-2$$

$$x+2=3-x-4\sqrt{3-x}+4$$

$$2x-5=-4\sqrt{3-x}$$

$$4x^2-20x+25=16\cdot(3-x)$$

$$\cancel{4x^2-23x-23=0}$$

$$D=576+368=944$$

$$4x^2-4x-23=0$$

$$D=16+368=384$$

$$\sqrt{D}=8\sqrt{6}$$

$$x=\frac{4\pm 8\sqrt{6}}{8}$$

$$0{,}5\pm\sqrt{6}$$

$$\sqrt{x+2}=\sqrt{3-x}+1$$

$$x+2=3-x+2\sqrt{3-x}+1$$

$$2x-2=2\sqrt{3-x}$$

$$4x^2-8x+4=4\cdot(3-x)$$

$$4x^2-4x-8=0$$

$$x^2-x-2=0$$

$\boxed{x=2}$ – подходит

$\boxed{x=-1}$ – не подходит

$$2{,}4^2=5{,}76$$

$$2{,}45^2$$

$$\sqrt{6}\approx 2{,}45$$

Проверка плюса:

$$\sqrt{\sqrt{6}+2{,}5}=\sqrt{3-0{,}5-\sqrt{6}}-2$$

$$\sqrt{\sqrt{6}+2{,}5}=\sqrt{2{,}5-\sqrt{6}}-2$$

не подходит

минуса:

$$\sqrt{-\sqrt{6}+2{,}5}=\sqrt{2{,}5+\sqrt{6}}-2$$

2

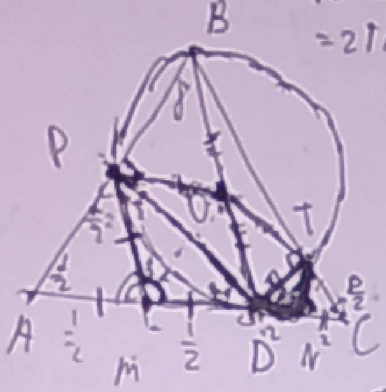
$PD = BD\sin\gamma =$
$= 2PM\sin\frac{\alpha}{2}$

Черновик

$\sqrt{3}\sin\gamma = \sin\frac{\alpha}{2}$
$\sqrt{3}\sin(135-\gamma) = \cos\frac{\alpha}{2}$

$TD = BD\sin(135-\gamma) =$
$= 2TN\cos\frac{\alpha}{2}$

$MP = \frac{1}{2}, \quad NT = 2.$



$BD = \sqrt{3}$

$3\sin^2\gamma + 3\sin^2(135-\gamma) = 1$

$3\sin^2\gamma + 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\gamma - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\gamma\right)^2 = 1$

$3\sin^2\gamma + \frac{3}{2}(\cos\gamma - \sin\gamma)^2 = 1$

$3\sin^2\gamma + \frac{3}{2}(\cos^2\gamma - 2\sin\gamma\cos\gamma + \sin^2\gamma) = 1$

5

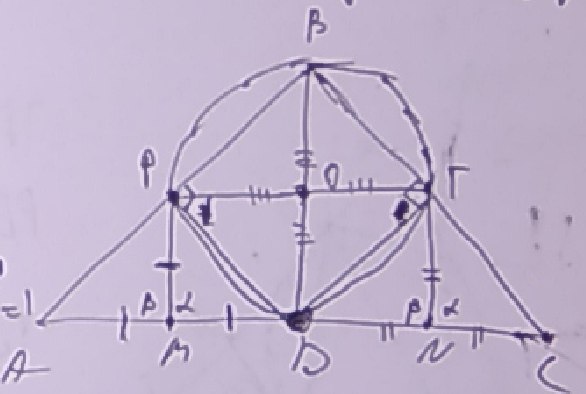
$\cancel{180} \;\; 180 = \frac{\alpha+\beta}{2}$

$\frac{\alpha+\beta}{2} = 45^0$

$\angle ABC = 135^0$

$\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right) = \frac{BC}{\cancel{5\sqrt{2}}}\cdot\frac{\sqrt{50-AB^2}}{5\sqrt{2}} + \frac{AB\cdot\sqrt{50-BC^2}}{50} = 1$

50



2

$\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2} = 90$

$AB \quad 5^2 = AB^2 + BC^2 + \sqrt{2}\,AB\cdot BC$

$\frac{AB}{\sin\frac{\beta}{2}} = \frac{5}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$

$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{BC}{5\sqrt{2}}$

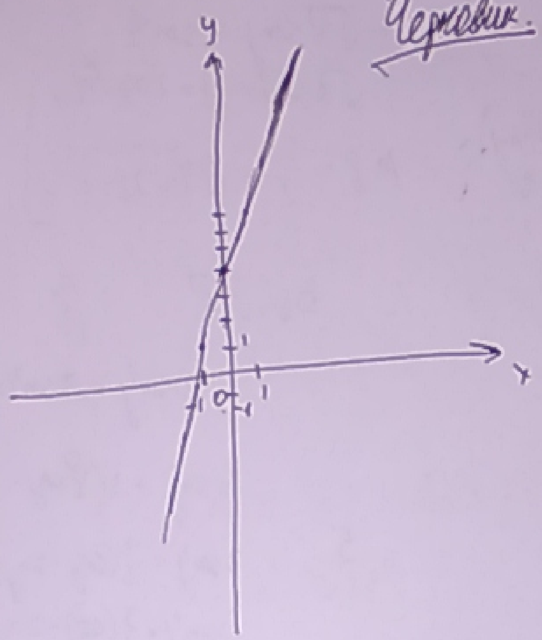
$\sin\frac{\beta}{2} = \frac{AB}{5\sqrt{2}}$

$\frac{BC}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$

$BC\cdot\sqrt{50-AB^2} + AB\cdot\sqrt{50-BC^2} = 50$

3

Черновик.



$A: 5a^2+12a x+4ay+8x^2+8xy+4y^2=0$

$4y^2+4ay+8xy=-8xy$

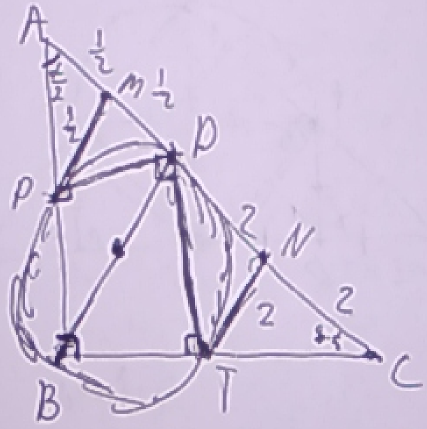
$ax^2+2a^2x-ay+a^3+4=0$

$y=x^2-2ax+a^2+\frac{4}{a}$

вершина $\boxed{x_в=a}$

$y_в=a^2-2a^2+a^2+\frac{4}{a}=$

$=\boxed{\frac{4}{a}}$



$TD=4\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$

$PD=1\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$

$TD^2+PD^2=3$

$8\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}=3$

$7\cos^2\frac{\alpha}{2}=2$

$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{2}{7}$

$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{5}{7}$

4

Часть 2

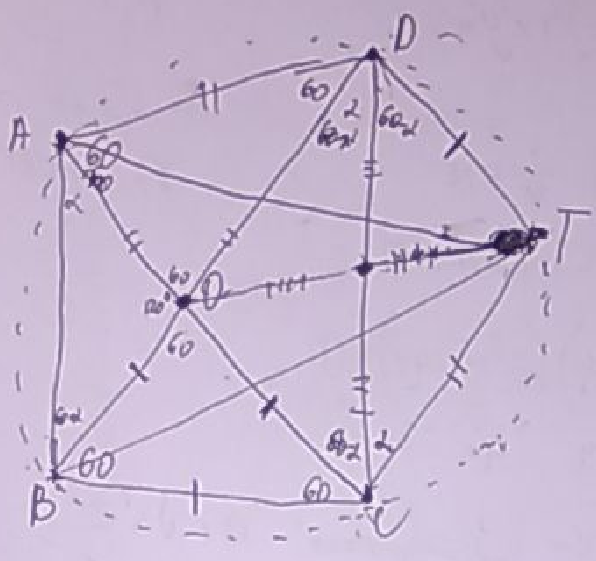
Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211007396**

ID профиля: **171369**

Вариант 11

Черновик.



Е4

211007396 (U171369 M1274087)

№5

Черновик

$$\begin{cases} \frac{4}{x^2+y^2}+x^2y^2=5 \\ x^4+y^4+3x^2y^2=20 \end{cases}$$

$$\frac{4}{x^2+y^2}+x^2y^2=5$$

$$(x^2+y^2)^2+x^2y^2=20$$

$$\frac{4}{a}+b=5$$

$$a^2+b=20$$

$a^2-\frac{4}{a}=15$

$a^3-15a-4=0$

$(a-4)(a^2+4a+1)=0$

$a=4 \quad a=-2\pm\sqrt{3}$

$a^3-15a-4 \,|\, a-4$

$-a^3-4a^2 \,|\, a^2+4a+1$

$4a^2-15a$

$-4a^2-16a$

$a-4$

$3+4-4\sqrt{3}+b=20$

$b=13+4\sqrt{3}$

$a=4: b=4$

$x^2+y^2=4$

$x^2y^2=4$

$x^2=2$

$y^2=2$

$a=\sqrt{3}-2$ — невозможно!

$$\begin{cases} x^2+y^2=\sqrt{3}-2 \\ x^2y^2=13+4\sqrt{3} \end{cases}$$

$y^2(\sqrt{3}-2-y^2)=13+4\sqrt{3}$

$y^4+(\sqrt{3}-2)y^2-13-4\sqrt{3}$

$D=7-4\sqrt{3}+16\sqrt{3}+52=59+12\sqrt{3}$

$y^2=\frac{\sqrt{3}-2\pm\sqrt{59+12\sqrt{3}}}{2}$ — не подходит

$y^2=\frac{2-\sqrt{3}+\sqrt{59+12\sqrt{3}}}{2}$

$x^2=\sqrt{3}-2-y^2=\frac{2\sqrt{3}-4-2+\sqrt{3}-\sqrt{59+12\sqrt{3}}}{2}=$

$=\frac{3\sqrt{3}-6-\sqrt{59+12\sqrt{3}}}{2}$ — не подходит.

$a=-\sqrt{3}-2$ — невозможно

$\{x^2+y^2=-\sqrt{\ }$

$$\begin{array}{r} 961 \\ \times 512 \\ \hline 1922 \\ 961 \\ 4805 \\ \hline 492032 \end{array}$$

1024

-63

961

~~123~~

(3)

211007396 (U171369 M1274087)

№5 Ильютов... 0.

Чертежи

$$\begin{cases} \frac{4}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 5 \\ x^4+y^4+3x^2y^2 = 20 \end{cases}$$

$(x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = 20$

$\frac{4}{a} + b = 5$ $\sqrt{\frac{3}{2}a \cdot \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}a} = \frac{\sqrt{3}}{4}a$

$a^2 + b = 20$

$a^2 - \frac{4}{a} = 15$

$\frac{a^3-4}{a} = 15$

$\frac{a^3-15a-4}{a} = 0$

$(a-4)(a^2+4a+1)$ $D = 16-4 = 12$ $\sqrt{D} = 2\sqrt{3}$

$$\frac{(a-4)(a-(-2+\sqrt{3}))(a-(-2-\sqrt{3}))}{a}$$

$a = 4$

$a = \sqrt{3}-2$

$a = -\sqrt{3}-2$

$a^3 - 15a - 4 \,|\, a-4$

$-\,a^3 - 4a^2 \quad a^2+4a+1$

$4a^2 - 15a$

$-\,4a^2 - 16a$

$a - 4$

1) $a = 4$: $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x^2y^2=4 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 = 4-y^2 \\ y^2(4-y^2)=4 \end{cases} =$

$= \begin{cases} x^2 = 4-y^2 \\ -y^4+4y^2-4=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 = 4-y^2 \\ y^2=2 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2=2 \\ y^2=2 \end{cases}$

$$\begin{cases} a = x^2+y^2 \\ b = 20-a^2 = x^2y^2 \end{cases}$$

2) $a = \sqrt{3}-2$

$\begin{cases} x^2+y^2 = \sqrt{3}-2 \\ x^2y^2 = 13+4\sqrt{3} \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 = \sqrt{3}-2-y^2 \\ (\sqrt{3}-2-y^2)y^2 = 13+4\sqrt{3} \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 = \sqrt{3}-2-y^2 \\ -y^4+(\sqrt{3}-2)y^2 - 13-4\sqrt{3} = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 = \sqrt{3}-2-y^2 \\ y^4-(\sqrt{3}-2)y^2 + 13+4\sqrt{3} = 0 \end{cases}$

D

2

Черновик.

66+65 способов выбрать на диагонали

$\cancel{(6566 - 265) \cdot 131}$

первая

1 на ~~одн~~ диаг другая нет. $131 \cdot 64 \cdot 64$

2 на диаг. $\frac{131 \cdot 128}{2} = 131 \cdot 64 = ?$

Сумма $\boxed{131 \cdot 65 \cdot 64}$

1

Чистовик Вариант 11

№6 (продолжение).

7) $\angle ADB = \angle ATB = 60^\circ$ (т.к. опираются на дугу AB)

8) $\angle ABT = \angle ACT = 60^\circ - \alpha + \alpha = 60^\circ$ (т.к. опираются на дугу AT)

9) В $\triangle ABT$ $\angle ATB = \angle ABT = 60^\circ$, значит, $\triangle ABT$ правильный, ч.т.д.

б) 1) $S_{ABCD} = 2S_{AOB} + S_{AOD} + S_{BOC} = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot AO\cdot OB\cdot\sin 120^\circ + \frac{\sqrt{3}}{4}AO^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot BC^2 =$

$= 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 25 + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 4 = \sqrt{3}(5 + 12{,}5 + 2) = 19{,}5\sqrt{3}$

2) $\triangle AOB$: по теореме косинусов

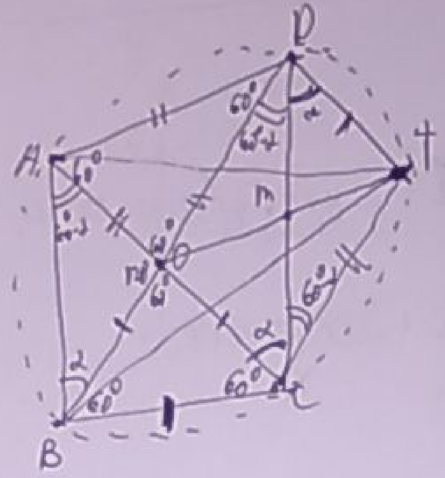
$AB = \sqrt{AO^2 + OB^2 - 2\cos\angle AOB\cdot AO\cdot OB} = \sqrt{25 + 4 + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 2} = \sqrt{39}$

3) $S_{\triangle ABT} = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot AB^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 39 = \frac{39}{4}\sqrt{3}$

4) $\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{39}{4}\sqrt{3}}{19{,}5\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$

Ответ: б) $\frac{1}{2}$.

/6 Чистовик Вариант 11.



Дано: ABCD - выпуклый четырехугольник
O - точка пересечения диагоналей
$\triangle BOC$ - правильный
$\triangle AOD$ - правильный
M - середина CD.
T симметрична O относительно M. $BC=2$, $AD=5$

а) Доказать: $\triangle ATB$ - правильный
б) Найти $\frac{S_{ATB}}{S_{ABCD}}$

Решение:

1) $\triangle AOB = \triangle COD$ ($AO=OC$, $BO=DO$, $\angle AOB = \angle DOC$ как вертикальные) $\Leftrightarrow$ $\angle ABO = \angle DCO = \alpha$, $AB=CD$, $\angle OAB = \angle ODC = 60° - \alpha$

$\triangle OMC = \triangle DMT$ ($MO=TM$ по симметрии, $DM=MC$ по условию, $\angle DMT = \angle OMC$ как вертикальные) $\Rightarrow DT=OC$, $\angle MDT=\alpha$.

Аналогично доказывается, что $\triangle MTC = \triangle MDO$ и $TC=OD$, а также $\angle ACT = \angle ODM = 60° - \alpha$.

$\triangle DTC = \triangle AOB$ ($TD=OB$, $CT=AO$, $CD=AB$)

$\angle ABC + \angle ADC = \alpha + 60° + 60° + 60° - \alpha = 180°$ $\Rightarrow$ вокруг ABCD можно описать окружность

$\angle ADT + \angle ACT = 60° + 60° - \alpha + \alpha + \alpha + 60° - \alpha = 180°$ $\Rightarrow$ вокруг ACTD можно описать окружность.

Из а) и б) следует, что точки A, B, C, D, T лежат на одной окружности.

4

История. Вариант 11.

№5 (продолжение)

Итого: $128 \cdot \left(64 \cdot 64 - 128 - 62 - 62 + \frac{125}{2}\right) = 128 \cdot 4 (32 \cdot 32 - 32 - 31)$

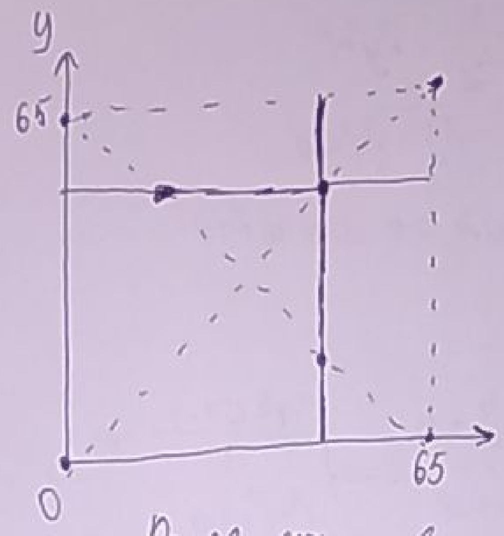
$+ 64 \cdot 125 = 128 \cdot 4 \cdot 961 + 64 \cdot 125 = 492032 + 8000 = 500032$

Ответ: 500032

3

211007396 (U171369 M1274087)

№5 Чистовик Вариант 11.



В каждой „строке" и „столбце" по 64 точки (т.к. границу не включаем)

~~Хотя~~ $y=x$ и $y=65-x$ – диагонали квадрата. Всего диагональных точек 128 (на каждой диагонали по 64)

128 способов выбрать диагональную точку

Далее есть 2 варианта:

1) Выбрать точку, не лежащую на диагонали, не из той же вертикали или горизонтали.

Число способов выбрать эту точку: $64 \cdot 64 - 128 - 62 - 62$

диагональные (включая её саму)

Не диагональные на той же вертикали или горизонтали.

2) Выбрать ещё одну диагональную точку. Нам подходит 126 точек (одна уже занята, 2 на той же линии.) Число этих случаев нужно поделить на 2, т.к. каждую точку мы рассматриваем 2 раза

Чистовик

Вариант 11

№4. $\begin{cases} \frac{4}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 5 \\ x^4+y^4+3x^2y^2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 5 \\ (x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = 20 \end{cases}$

Пусть $x^2+y^2=a$, $x^2y^2=b$. Заметим, что $a \geq 0$ и $b \geq 0$

тогда система имеет вид:

$\begin{cases} \frac{4}{a} + b = 5 \\ a^2 + b = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \frac{4}{a} = 15 \\ a^2 + b = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a^3 - 15a - 4}{a} = 0 \\ a^2 + b = 20 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(a-4)(a^2+4a+1)}{a} = 0 \\ a^2 + b = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a = 4 \\ a = \sqrt{3} - 2 \\ a = -\sqrt{3} - 2 \end{array} \right. \\ a^2 + b = 20 \end{cases}$ невозможно, т.к. $a \geq 0$. $\Leftrightarrow$

$\begin{cases} a = 4 \\ a^2 + b = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 - y^2 \\ y^2(4 - y^2) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 - y^2 \\ y^4 - 4y^2 + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 - y^2 \\ y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2 \\ y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = \sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = -\sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = \sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = -\sqrt{2} \end{cases} \end{array} \right.$

Ответ: $(\sqrt{2}; \sqrt{2})$; $(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$; $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$; $(-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$

1