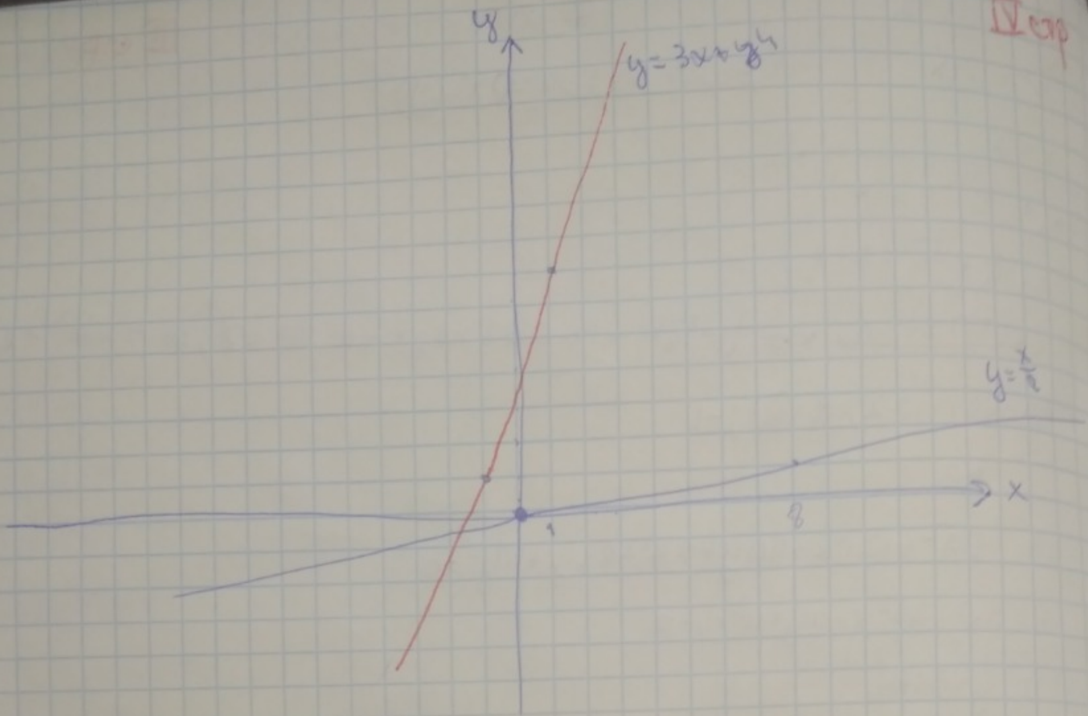
Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211007374**

ID профиля: **201624**

Вариант 11



Рассм. сл когда т. A справа от $y=3x+4$, а т. B слева от $y=3x+4$.

Тогда ~~в~~ вершина ($y=\frac{4}{a}$) должна быть $< y=3x+4 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{4}{a} < 3x+4$

а ~~$y=\frac{x}{8}$~~ т. $B\left(-\frac{a}{2}; -\frac{2a}{3}\right)$ должна быть $> y=3x+4$

$$\begin{cases} \frac{4}{a} < 3x+4 \\ -\frac{2a}{3} > 3x+4 \;|\cdot(-1) \Rightarrow \frac{2a}{3} < -3x-4 \end{cases} +$$

$\frac{4}{a} + \frac{2a}{3} < 0$

$\frac{\cancel{2}a^2+\cancel{12}6}{3a} < 0$

обе т. по разн. ст.

a^2+6 всегда $>0 \Rightarrow \frac{1}{3a} < 0 \Rightarrow a<0$. При $a<0$ ~~это верно~~.

Рассм. противоп. сл.

$$\begin{cases} \frac{4}{a} > 3x+4 \\ \frac{2a}{3} > -3x-4 \end{cases}$$

$\frac{1}{a} > 0$, то есть при $a>0$ ~~это верно~~ обе т. по разн. стороны

~~При $a=0$~~

Ответ: ~~это~~ т. A и B лежат по разн. ст. от $y-3x=4$ при любых a, кроме 0

$b = 1;\ 1+\frac{\sqrt{6}}{2}$ ~~$b=-x:\ 4=3-x \Rightarrow x=-1$~~ III стр

$b=1:\ b^2=3-x$

$x=2$

$b=1+\frac{\sqrt{6}}{2}:\ \left(1+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2=3-x$

$1+\frac{6}{4}+\sqrt{6}=3-x$

$10+\cancel{4\sqrt{6}}=12-4x$ $x=\frac{1}{2}-\sqrt{6}$ – по ОДЗ подх т.к $\sqrt{6}<\overset{2,5}{3}$, то $\frac{1}{2}-\sqrt{6}>2-2$

Ответ: 2; $\frac{1}{2}-\sqrt{6}$; −1

№3

(1) $5a^2+12ax+4ay+8x^2+8xy+4y^2=0$

(2) $ax^2-2a^2x-ay+a^3+4=0$

(3) $y=3x+4$

приобразуем (2):

$y=x^2-2ax+a^2+\frac{4}{a}$ (Если $a=0$, то $4=0 \Rightarrow \varnothing$)

Это парабола вершина которой явл. $x=a$ $y=\frac{4}{a}$ $\left(\left(a;\frac{4}{a}\right)\right)$

Преобразуем (1):

$5a^2+12ax+4ay+8x^2+8xy+4y^2=0$

$4y^2+4ay+8xy+8x^2+12ax+5a^2=0$

$4y^2+4ay+a^2+9x^2+12ax+4a^2-x^2+8xy=0$

$(2y+a)^2+(3x+2a)^2=x^2-8xy$

Посмотрим на преобр. выр: $(2y+a)^2+(3x+2a)^2=x^2-8xy$

Слева окр. с ц $\left(-\frac{a}{2};-\frac{2a}{3}\right)$ и $r=0$.

Справа прямая $y=\frac{x}{8}$

~~Найд~~ Построим графики $y=\frac{x}{8}$ и (3)

211007374 (U201624 M1276582)

По т. Пиф $\triangle ABC$ $AB = \sqrt{25 - \frac{25}{6}a^2} = 5\sqrt{1 - \frac{1}{6}a^2} = 5\sqrt{\frac{2}{15}}$ **II стр**

$S_{\triangle ABC} = AB \cdot BC = 5\sqrt{\frac{2}{15}} \cdot \frac{5}{4}a \cdot \frac{1}{2} = \cdot \cancel{\frac{25}{4}\sqrt{\ }}$ $\frac{25\sqrt{\frac{26}{15^2}}}{2} = \boxed{\frac{5}{6}\sqrt{26}}$

Ответ: $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$; $S = \frac{5}{6}\sqrt{26}$

№2

$\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} + 3 = 2\sqrt{6+x-x^2}$ ОДЗ: $a \geq 0$; $b \geq 0$

$x \leq 3$ $x \geq -2 \Rightarrow x \in [-2; 3]$

$6 + x - x^2 = 0$

$-(x^2 - x - 6) = 0$

$(3-x)(x+2) = 0$

$6 + x - x^2 = (3-x)(x+2)$

$\sqrt{x+2} = a$ $\sqrt{3-x} = b$ $a^2 = x+2$ $b^2 = 3-x$ $a^2 + b^2 = 5 \Rightarrow a^2 = 5 - b^2$

$a - b + 3 = 2ab$

$a = \sqrt{5 - b^2}$

$\sqrt{5-b^2} - b + 3 = 2b\sqrt{5-b^2}$

$\sqrt{5-b^2}(1 - 2b) = b - 3$

$\sqrt{5-b^2} = \frac{b-3}{1-2b}$

$5 - b^2 = \frac{b^2 - 6b + 9}{1 - 4b + 4b^2}$

$(5 - b^2)(4b^2 - 4b + 1) = b^2 - 6b + 9$

$20b^2 - 20b + 5 - 4b^4 + 4b^3 - b^2 = b^2 - 6b + 9$

$4b^4 - 4b^3 - 18b^2 + 14b + 4 = 0$

$b = 1$

$$\begin{array}{r|l} 4b^4 - 4b^3 - 18b^2 + 14b + 4 & b - 1 \\ \hline -\ 4b^4 - 4b^3 \qquad\qquad\qquad & 4b^3 - 18b - 4 \\ -18b^2 + 14b \qquad & \\ -\ -18b^2 + 18b \qquad & \\ -4b + 4 & \\ -\ -4b + 4 & \\ 0 & \end{array}$$

$(b-1)(4b^3 - 18b - 4) = 0$

$b = -2$

$$\begin{array}{r|l} 4b^3 - 18b - 4 & b + 2 \\ \hline -\ 4b^3 + 8b^2 \qquad\quad & 4b^2 - 8b - 2 \\ -8b^2 - 18b \quad & \\ -\ -8b^2 - 16b \quad & \\ -2b - 4 & \\ -\ -2b - 4 & \\ 0 & \end{array}$$

$(b-1)(b+2)(4b^2 - 8b - 2) = 0$

$2b^2 - 4b - 1 = 0$

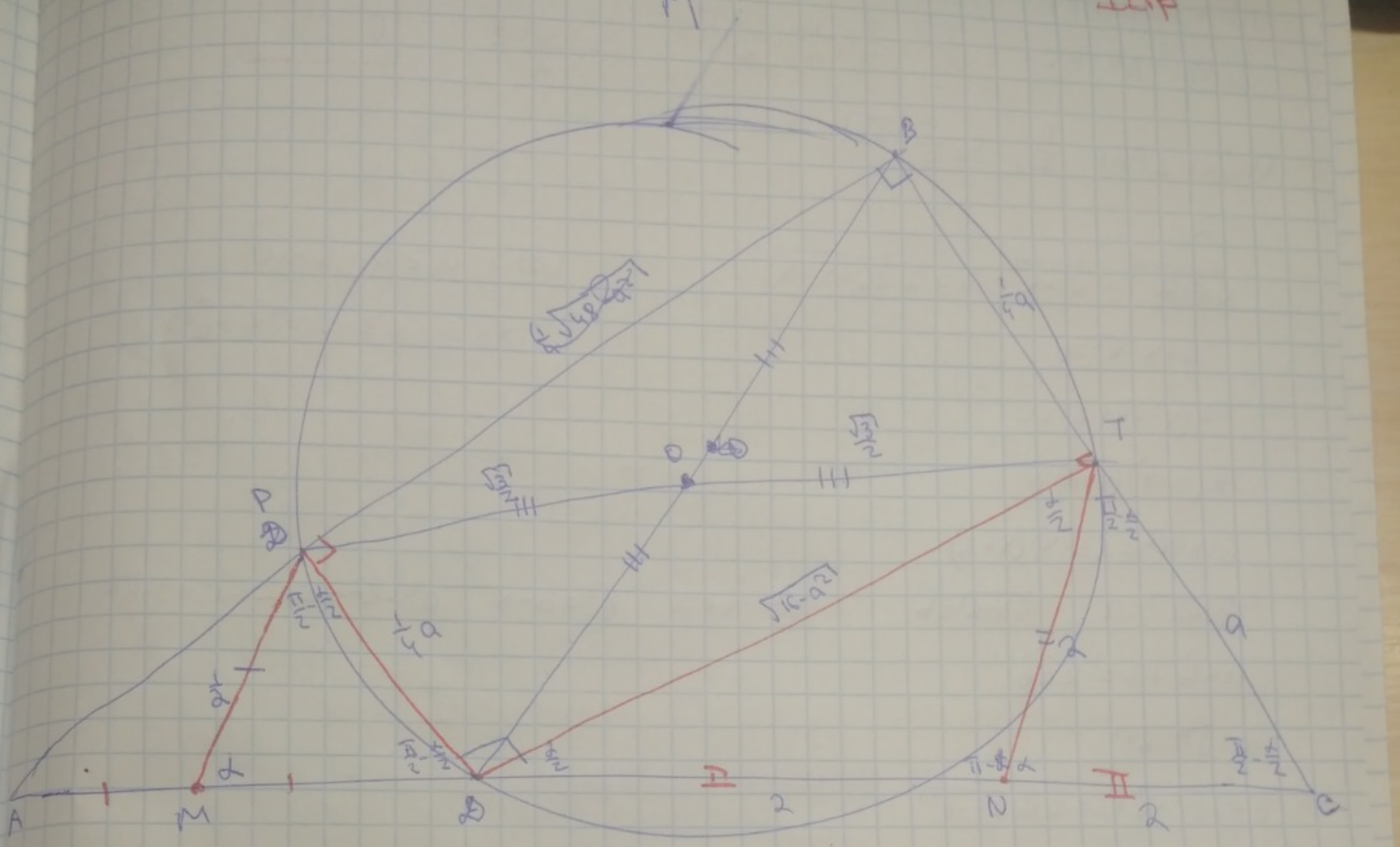
$D = 16 + 8 = 24$ -2; не подх по ОДЗ

$b = \frac{4 \pm 2\sqrt{6}}{...} = 1 \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$ | $1 - \frac{\sqrt{6}}{2}$

Чистовик

№1

I стр



1) Соединим PD, TD. ~~Тогда~~ $\angle BPD = \angle BTD = \frac{\pi}{2}$, т.к. опир. на диам. BD.

Обозн. $\angle PMD = \angle TNC$ за α. т.к. $\triangle DTN$ — п/у т.к. $\angle DTC = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$, а TN медиана, то по св-вам $TN = ND = NC$. Тогда $\angle NTC = \angle NCT = \frac{\pi}{2} - \alpha$, а $\angle NDT = \angle NTD = \frac{\alpha}{2}$. Аналог. для $\triangle APD$, $\angle MPD = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} = \angle MDP$.

Отсюда $\angle MDP = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$ и $\angle TDC = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \angle MDP + \angle TDC = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \angle PDT = \frac{\pi}{2}$.

$\Rightarrow$ ~~PDT =~~ $\Rightarrow \angle PDT$ опир. на диам. $\Rightarrow PT$ диам $\Rightarrow$ $\boxed{\angle ABC = \frac{\pi}{2}}$

2) Обозн. TC за a. Тогда из подобия $\triangle MPD$ и NTC следует, что ~~PD =~~

$\frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{PD}{TC} \Rightarrow PD = \frac{1}{4}a$

~~Можно ск~~ Скажем, что $PDTB$ — прямоуг., т.к. все углы $= \frac{\pi}{2} \Rightarrow PD = BT = \frac{1}{4}a$

~~Из т. Пиф. $\triangle PDB$ можно найти PB. Он равен $\sqrt{3 - \frac{a^2}{16}} = \frac{1}{4}\sqrt{48 - a^2}$~~

т.к. PM и TN — мед. п/у $\triangle$, то $PM = MA = MD = \frac{1}{2}$ и $TN = DN = NC = 2 \Rightarrow AC = 5$

~~По т. Пиф. $\triangle ABC$, $AB = \sqrt{25 - \frac{25}{16}a^2} = 5\sqrt{1 - \frac{1}{16}a^2}$~~

По т. Пиф. $\triangle TDC$ $TD = \sqrt{16 - a^2}$

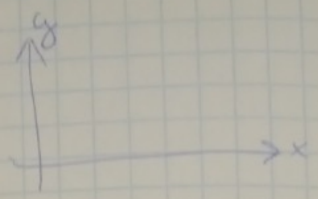
~~По~~ т. Пиф. $\triangle BDT$ $3 = \frac{1}{16}a^2 + 16 - a^2 = 16 - \frac{15}{16}a^2 \Rightarrow a^2 = \frac{13 \cdot 16}{15} \Rightarrow a = 4\sqrt{\frac{13}{15}}$

$5a^2+12ax+4ay+8x^2+8xy+4y^2=0$

$ax^2-2a^2x-ay+a^3+4=0$

$y=3x+4$

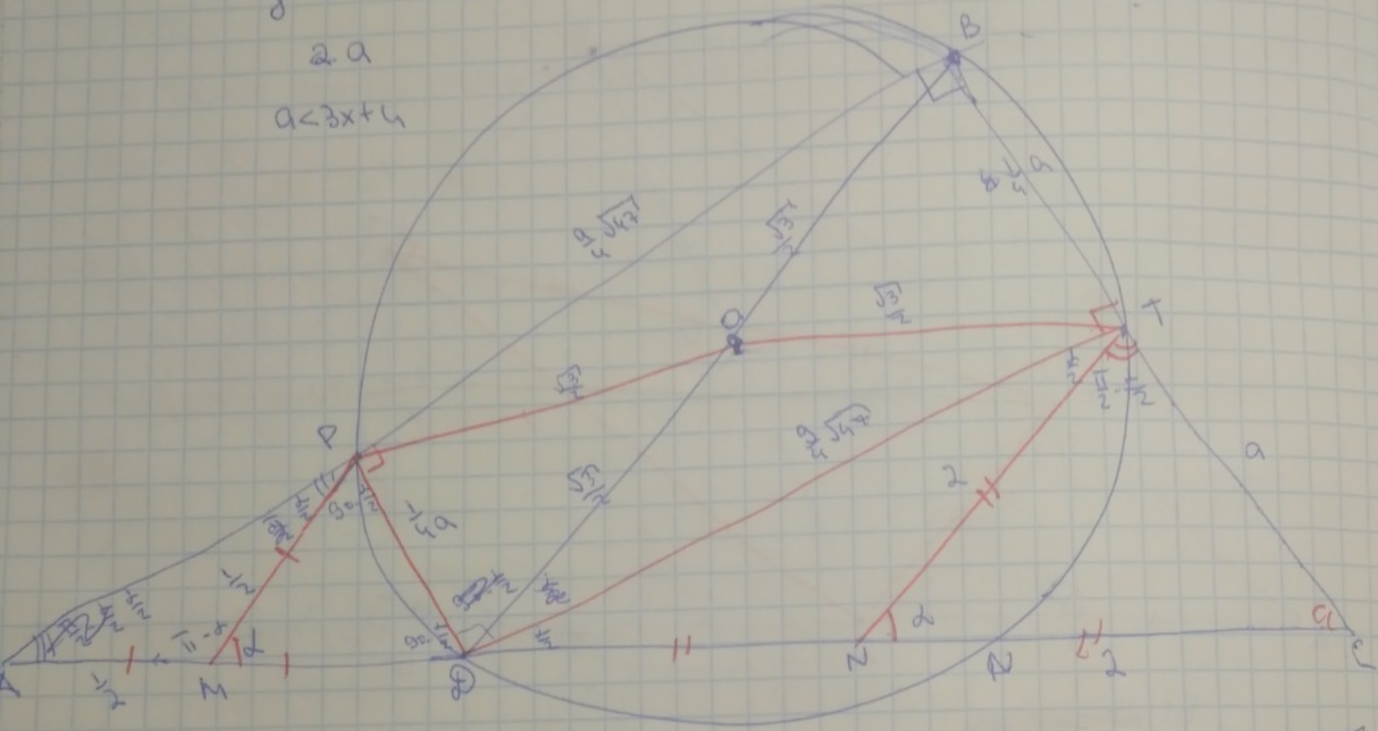
$4y^2+4ay+8xy$



$y=x^2-2ax+a^2+\frac{4}{a}$

$2a$

$a<3x+4$



$\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}+3=2\sqrt{6+x-x^2}$

$a^2=8-8\cos\alpha$

$a=2\sqrt{2(1-\cos\alpha)}$

$\frac{1}{2}=-\sqrt{6}$

$\frac{PD}{TC}=\frac{1}{4}$ $\quad -\frac{a}{2};-\frac{2a}{3}$ $\quad \sqrt{2{,}5-\sqrt{6}}-\sqrt{2{,}5+\sqrt{6}}+3=8-2$

$PD=\frac{1}{4}a$ $\quad y\,x^2-8xy=0$ $\quad -2\sqrt{6}+2\sqrt{0{,}25}=4\pm\frac{1}{2}$

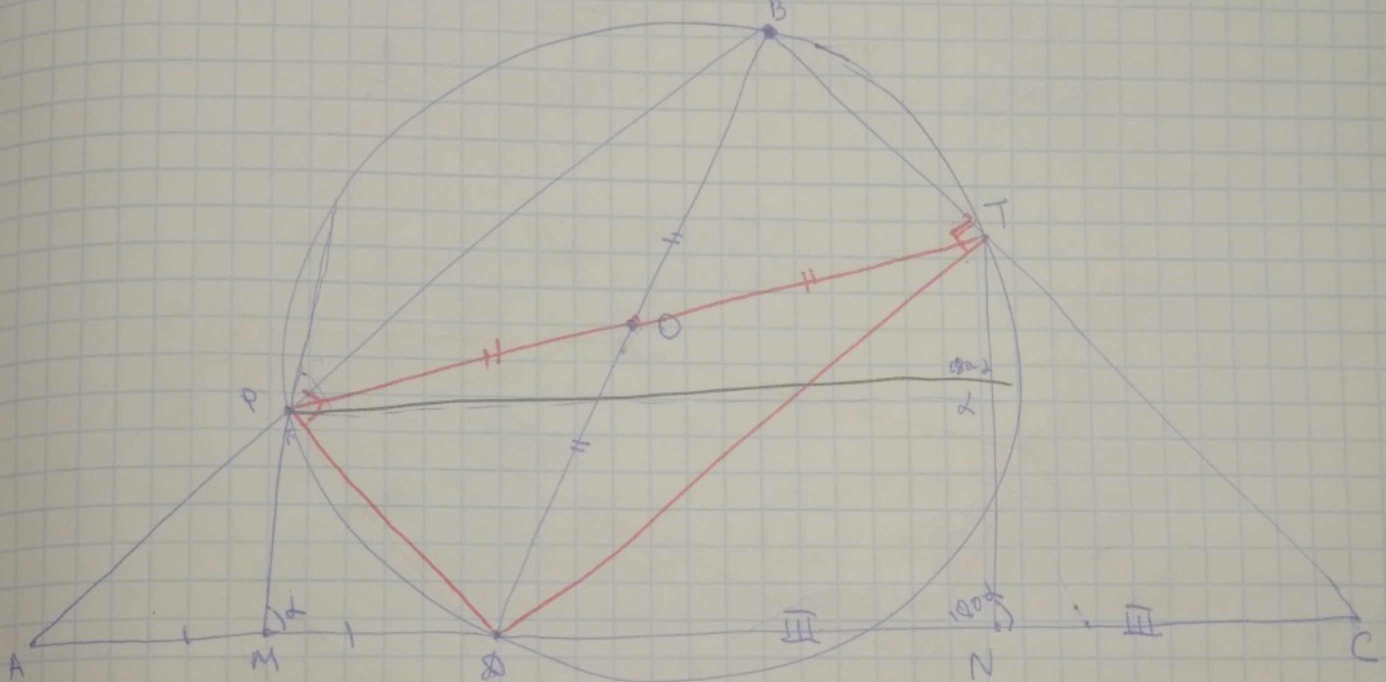
$\frac{a^2}{4}-\frac{16a^2}{6}=0$

$a=0$

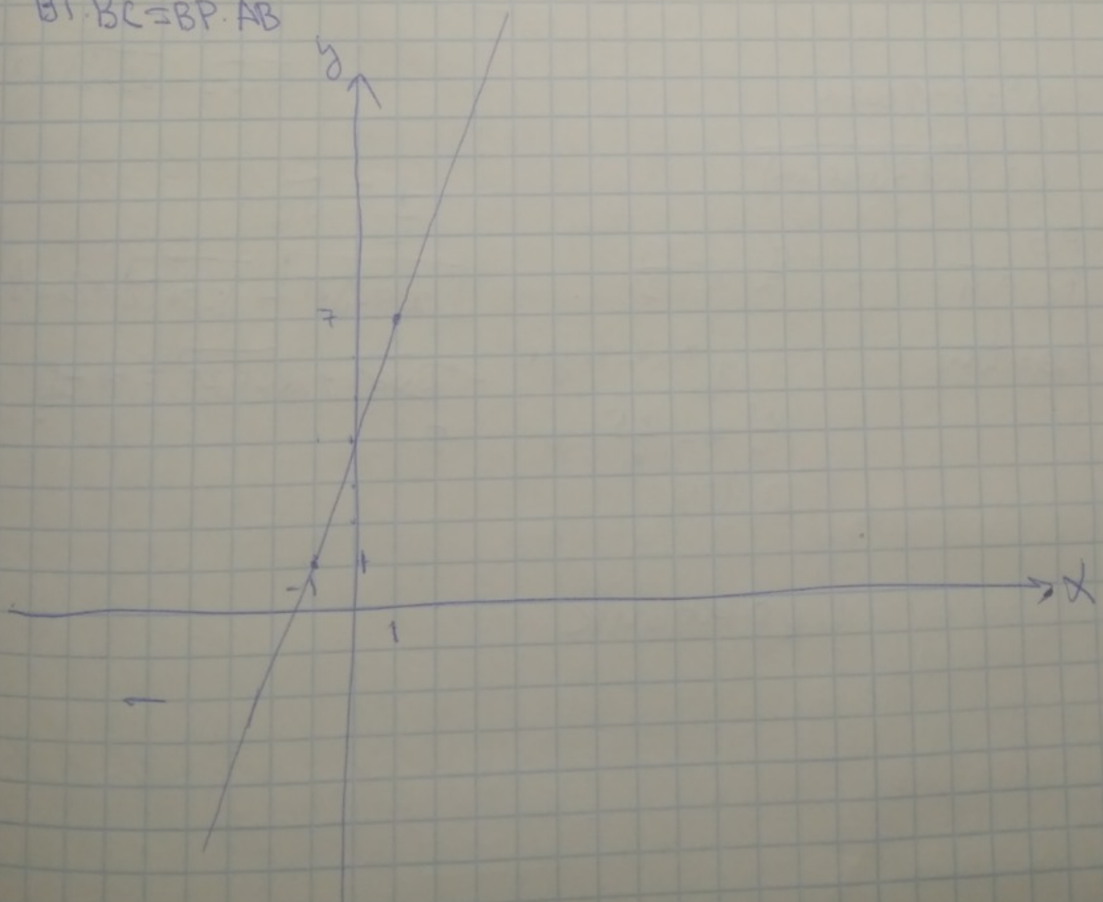
черновик

211007374 (U201624 M1276582)

ЧЕРНОВИК



$BT \cdot BC = BP \cdot AB$



Часть 2

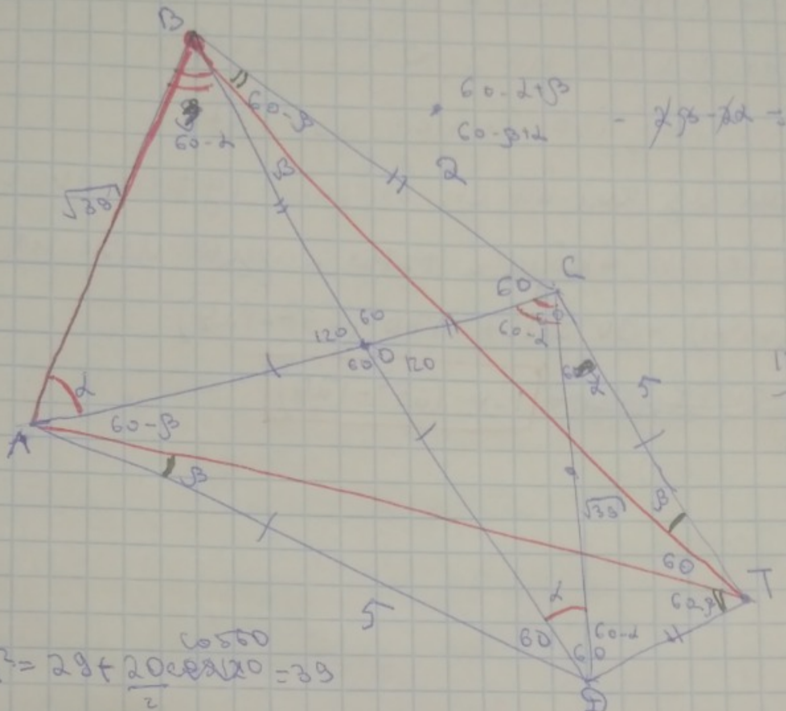
Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211007374**

ID профиля: **201624**

Вариант 11

ЧЕРНОВИК



$60-\alpha+\beta$

$60-\beta+\alpha$ $\quad -\alpha+\beta-\beta-\alpha=0$

$120-\alpha-\beta=60$

$\cancel{\alpha+\beta+60=120}$

$\alpha+\beta=60$

$\alpha=60-\beta$

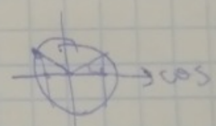
$\alpha=\beta$

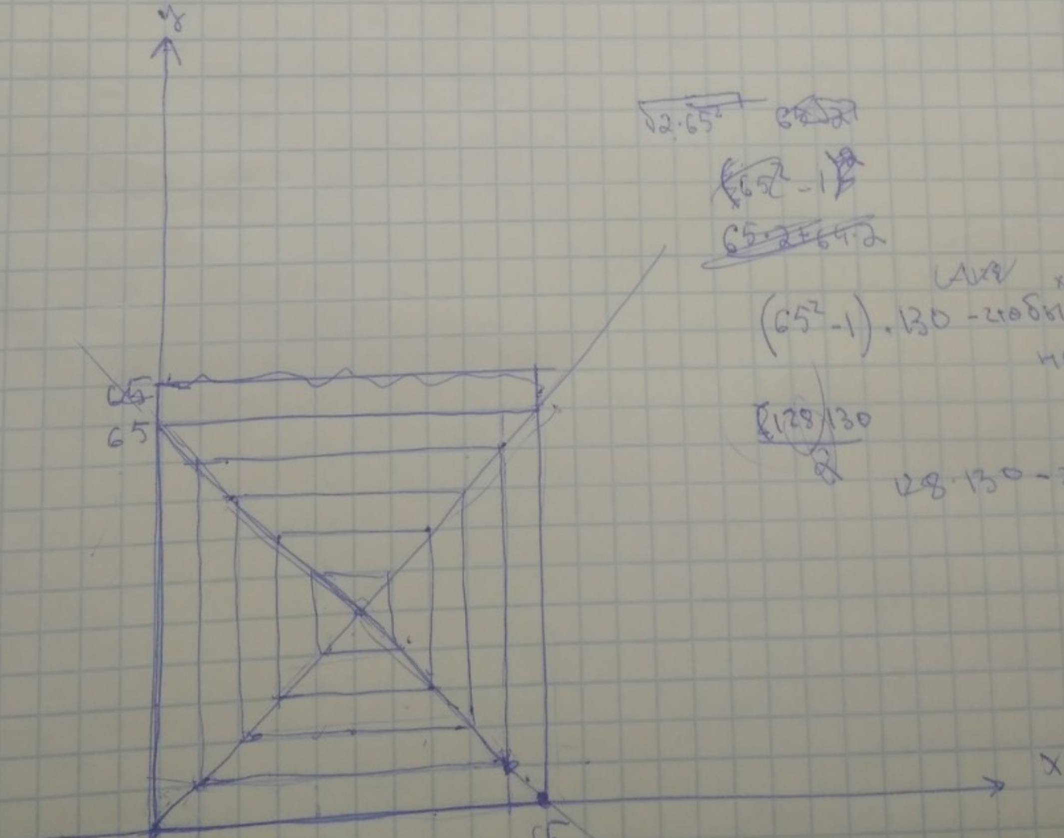
$a^2=29+\frac{20\cos 120}{2}=39$ ($\cos 60$)

$a=\sqrt{39}$

$\sin 60=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$S_{\triangle ABT}=\sqrt{3}\cdot 39\cdot\frac{\sqrt{3}}{24}=\frac{39\sqrt{3}}{4}$





$\sqrt{2\cdot 65^2}$ $\cancel{65\sqrt{2}}$

$\cancel{(65^2-1)\cdot 2}$

$\cancel{65\cdot 2+64\cdot 2}$

хотя бы

$(65^2-1)\cdot 130$ – чтобы искал на ночи из пр.

$\frac{(128)\cdot 130}{2}$

$128\cdot 130-32\cdot 4$

нужно вычесть ещё кол-во сп., чтобы 2 узла лежали на диаг. Усл.

Оно равно $\frac{130 \cdot 2}{2} = 130$, т.к. кол-во сп. выбрать т. на диаг $= 130$, а кол-во сп.

выбрать ~~1.~~ 2-ую т. на диаг $= 2$, но чтобы не учесть 1 случай 2 раза

мы должны раздел всё на 2 $\Rightarrow \frac{130 \cdot 2}{2} = 130$

вычтем из $130 \cdot 128$, 130 и пол. $130 \cdot 127$.

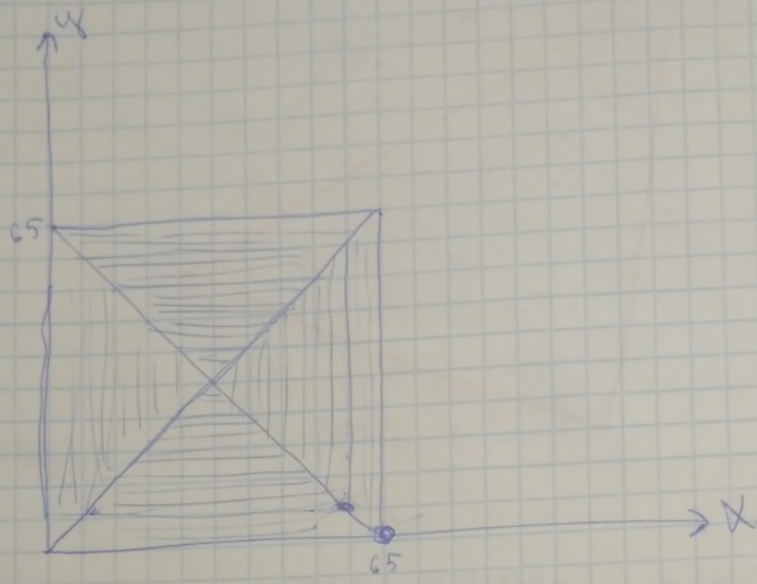
Осталось ~~вычти~~ из кол-ва сп. выбрать 1-у т. на диаг, а 2-ую не

на диаг вычти кол-во сп. выбрать ~~т на~~ 2-узла леж. на пр $\parallel Ox$ или Oy,

то есть $130 \cdot (65^2 - 1) - 130 \cdot 127 = 130 \cdot (65^2 - 128)$

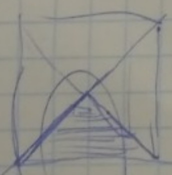
Ответ: ~~кол-во сп. выбрать~~ $\boxed{130 \cdot (65^2 - 128)}$

211007374 (U201624 M1276583)



1) Найдем сначала кол-во сп. выбрать 2 узла сетки так, чтобы хотя бы 1 из них лежал на 1-ой из пр. $y=x$ и $y=65-x$. Возьмём какую-то ~~-то 128~~ узел лежащий на 1-ой из пр. тогда кол-во сп. выбрать 2-ой узел равен 65^2-1 (-1, т.к. чтобы не учитывать совпад. этих точек) (65^2, т.к. это в кол-во узлов всей сетки), а кол-во сп. выбрать 1-ый узел равно 130, т.к. кол-во узлов в пр. $y=x$ и $y=65-x$, по 65 $\Rightarrow$ всего кол-во сп. выбр. 2 узла так, чтобы 1 из них лежал на $y=x$ и $y=65-x$ $= 130\,(65^2-1)$

Теперь найдем кол-во сп. выбрать 2 узла так, чтобы они лежали на прямой ‖ Ox или Oy. (и 1 узел должен леж. на диаг.) Расм. вот такой фрагмент квадрата:



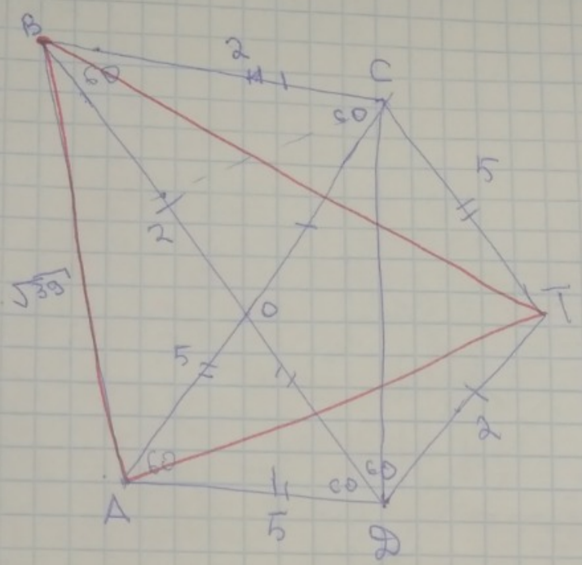
найдём кол-во сп. выбрать 2 узла так, чтобы оба узла лежали на пр. ‖ Ox или Oy

Возьмём какую-то точку

Возьмём какую-то точку. У неё 128 сп. выбрать (64 по верт. и 64 по гор.), а кол-во сп. выбрать т. лежащ. на диаг. $=130 \Rightarrow$ кол-во сп. выбр. 2 узла так, чтобы они лежали на 1-ой пр. и 1 узел на диаг. $=130\cdot 128$, но мы 2 раза учли случай, когда обе т. лежат на диагоналях ($y=x$ и $y=65-x$) $\Rightarrow$

2)

III стр



BC = BO = OC = 2; CT = AO = OD = AD = 5

Найдём AT из т. кос. ΔATD $AT^2 = 4 + 25 - 20\cos 120 =$

$= 29 + 10 = 39 \Rightarrow AT = BT = AB = \sqrt{39}$

$$\boxed{S_{\Delta ABT} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 39 = \frac{39\sqrt{3}}{4} \text{ (по форм. р/с } \Delta)}$$

$BD = AC = BO + OD = BC + AD = 7$

$S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot \sin 60 \cdot BD = \frac{7\sqrt{3}}{2}$

$S_{\Delta ABD} = \cancel{\frac{1}{2} \cdot 7 \sin 60} \; \frac{1}{2} BD \sin 60 \cdot AD = \frac{35\sqrt{3}}{4}$

$$\boxed{S_{\Delta ABCD} = S_{\Delta BCD} + S_{\Delta ABD} = \frac{7\sqrt{3}}{2}\left(1 + \frac{5}{2}\right) = \frac{49\sqrt{3}}{4}}$$

$$\frac{S_{\Delta ABT}}{S_{\Delta ABCD}} = \frac{\frac{39\sqrt{3}}{4}}{\frac{49\sqrt{3}}{4}} = \frac{39}{49}$$

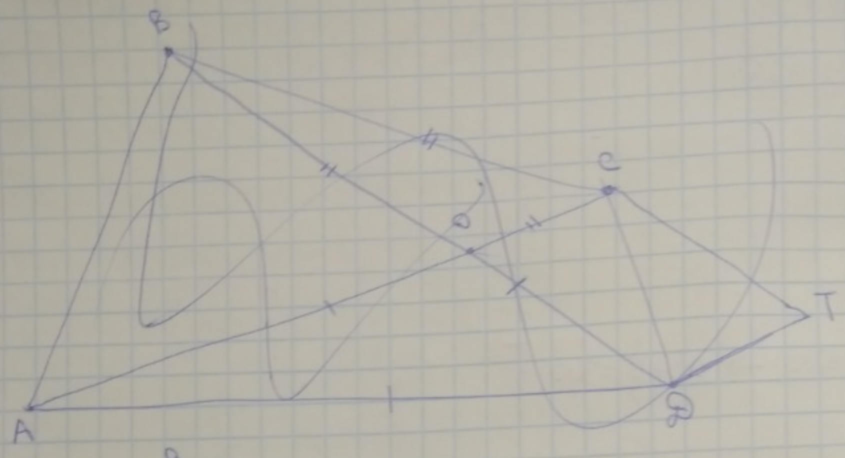
Ответ: $\frac{39}{49}$

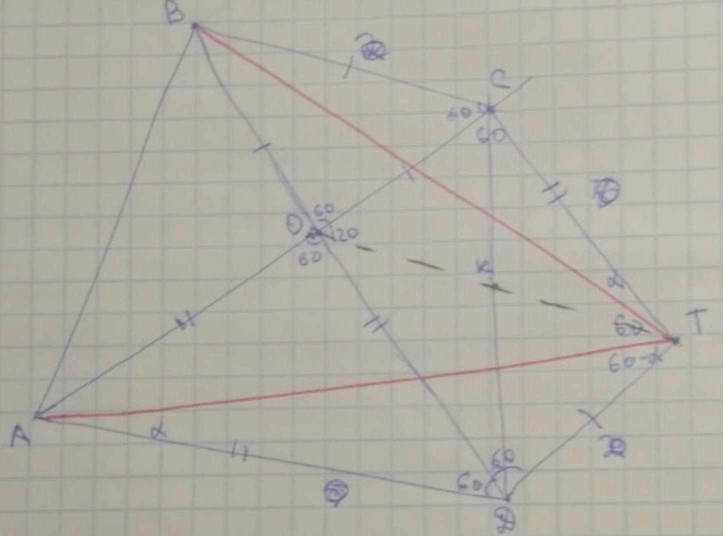
211007374 (U201624 M1276583)

№5 б

II стр

2)





1) Скажем, что TCOD - пар-грам, т.к. CK=KD и OK=K => по ~~св-ва~~ пр пар-ма TCOD п-м => TD = CD = BO = BC и AO = AD = OD = CT.

Также из ▱ следует, что ∠OCT = ∠ ~~BAD~~ ODT = 60, и ∠COD = ∠CTD = 120

Рассм. △ADT и △BCT:

CT = AD (~~д-зал~~), BC = DT (д-зал выше) и ∠D = ∠C (60+60) => △ADT = △BCT

=> BT = AT. и ∠TAD = ∠BTC = α.

Тогда из △ADT ∠ATD = 60 − α. ~~из △~~ ∠CTD = 120 => ∠BTA = 120 − α − 60 + α

= 60 => △ABT - правильный т.к. AT = BT и 1 из углов 60.

чистовик

№4

I стр

$$\begin{cases} \frac{4}{x^2+y^2}+x^2y^2=5 \\ x^4+y^4+3x^2y^2=20 \end{cases}$$

$x^2+y^2=a$

$x^2y^2=b$

$$\begin{cases} \frac{4}{a}+b=5 \\ (x^2+y^2)^2+x^2y^2=20 \to a^2+b=20 \end{cases}$$

$a^2-\frac{4}{a}=15$

$a^3-15a-4=0$

$a=4$

$$\begin{array}{l|l} a^3-15a-4 & a-4 \\ \underline{a^3-4a^2} & a^2+4a+1 \\ \quad 4a^2-15a & \\ \quad \underline{4a^2-16a} & \\ \qquad a-4 & \\ \qquad \underline{a-4} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$(a-4)(a^2+4a+1)=0$

$a^2+4a+1=0$

$a=\frac{-4\pm\sqrt{16-12}}{2}=-2\pm\sqrt{3}$ – не подх, т.к $-2\pm\sqrt{3}<0$, а $a\geq 0$ т.к. $x^2+y^2\geq 0$

$a=4$

$\cancel{x^2+y^2=4}$ $\frac{4}{a}+b=5$

$b=4$

$x^2+y^2=4 \Rightarrow x^2=4-y^2$

$x^2y^2=4$

$(4-y^2)y^2=4$

$y^4-4y^2+4=0$

$(y^2-2)^2=0 \to y^2=2$

$y=\pm\sqrt{2}$ $x=\pm\sqrt{2}$

Ответ: $(\sqrt{2};-\sqrt{2})$; $(-\sqrt{2};-\sqrt{2})$, $(\sqrt{2};\sqrt{2})$; $(-\sqrt{2};\sqrt{2})$

ЧЕРНОВИК