Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211007320**

ID профиля: **264261**

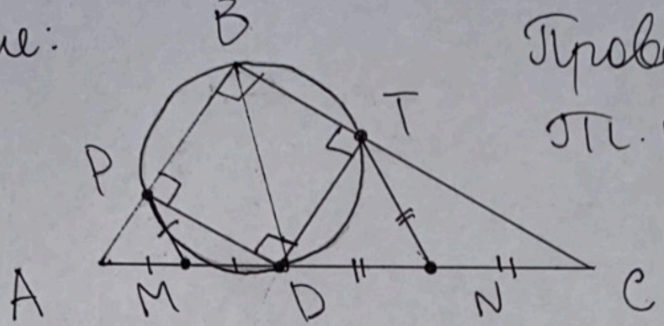
Вариант 11

Чистовик

Задача 1

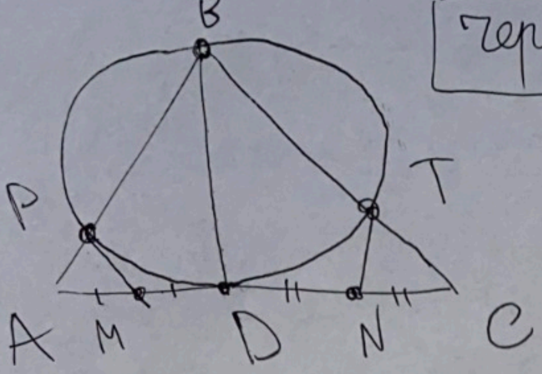
Ответ: а) 90°, б) $\frac{5\sqrt{26}}{6}$

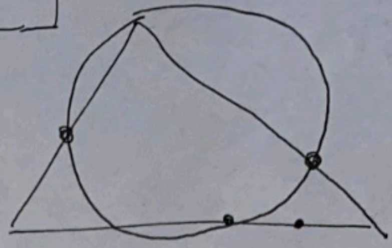
Решение:

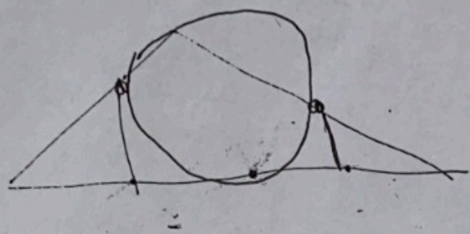


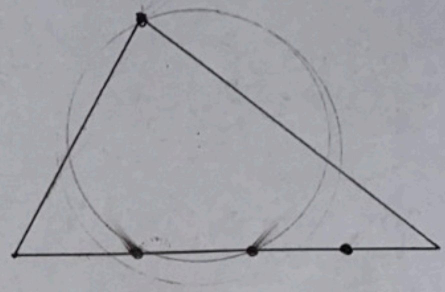
Проведем DP и DT. Т.к. BD - диаметр, то $\angle APD = \angle DTC = 90^\circ$. Тогда т.к. M и N - середины гипотенуз в $\triangle APD$ и $\triangle DTC$ соотв., то $AM = MP = MD$ и $TN = NC = DN$, то есть $\triangle AMP$ и $\triangle TNC$ - равноб. Обозначим $\angle PMD = 2\alpha$, тогда т.к. $TN \parallel PM$, то $\angle DNT = 180^\circ - 2\alpha$. Тогда $\angle MAP = \frac{1}{2}\angle PMD = \alpha$ и $\angle NCT = \frac{1}{2}\angle DNT = 90^\circ - \alpha$. Тогда $\angle ABC = 180^\circ - \alpha - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ$. Обозначим $AP = x$. Тогда $PD = \sqrt{AD^2 - AP^2} = \sqrt{1 - x^2} = BT$ (т.к. $PBTD$ - прямоугольник, т.к. $\angle DPB = \angle PBT = \angle BTD = 90^\circ$ и т.к. $PBTD$ - вписанный, то $\angle PDT = 90^\circ$). $\angle TCD = 90^\circ - \angle TDC = \angle PDA \Rightarrow \triangle APD \sim \triangle DTC$ с коэф. $\frac{PM}{TN} = \frac{1}{4}$. Тогда $4x = TD = PB$ и $TC = 4\sqrt{1 - x^2}$. Тогда $BT^2 + TD^2 = BD^2$, $1 - x^2 + 16x^2 = 3$, $x^2 = \frac{2}{15}$. И $S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{5x \cdot 5\sqrt{1-x^2}}{2} = \frac{25}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{15}} \cdot \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{15}} = \frac{25}{30} \cdot \sqrt{26} = \frac{5\sqrt{26}}{6}$

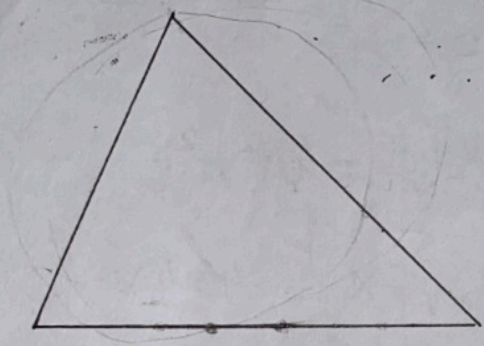
черновик







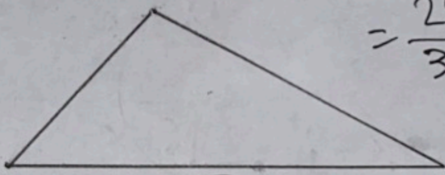




$$\frac{5x\cdot 5\sqrt{1-x^2}}{2}=\frac{25}{2}x\cdot\sqrt{1-x^2}=\frac{25}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{15}}\cdot\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{15}}=$$

$$=\frac{25}{30}\cdot\sqrt{26}=$$

$$=\boxed{\frac{5}{6}\sqrt{26}}$$



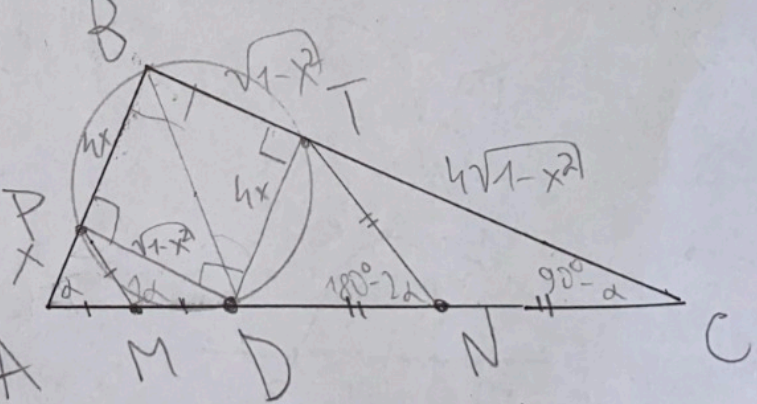
$$\frac{12x\cdot\sqrt{1-x^2}}{2}=6x\cdot\sqrt{1-x^2}$$

$$\frac{CT}{CB}=\frac{NT}{BD}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$CB=\frac{\sqrt{3}}{2}CT=2\sqrt{3}\cdot\sqrt{1-x^2}$$

$$12x^2+12(1-x^2)=25$$

$$4\sqrt{1-x^2}=CT$$



$$16x^2+1-x^2=3$$

$$15x^2=2$$

$$x^2=\frac{2}{15}$$

$$\frac{AP}{AB}=\frac{PM}{BD}=\frac{1}{2\sqrt{3}},\quad AB=2\sqrt{3}x$$

$$\frac{25\cdot x\cdot\sqrt{1-x^2}}{2}=$$

211007320 (U264261 M1277572)

$\overset{a}{\sqrt{x+2}}-\overset{b}{\sqrt{3-x}}+3=2\sqrt{6+x-x^2}$ ↗ $[-2;3]$

$\frac{1}{b}-\frac{1}{a}+\frac{3}{ab}=2$

$a-b+3=2ab$

$3x+6-x^2-2x=6+x-x^2$

$a(2b-1)+b-3=0$

$b(2a+1)-a-3=0$

$2ab-a+b-3=0$ $\quad 2ab-a+b-2=1$

$(2a+\frac{3}{2})(b-\frac{1}{2})=0$ $\quad (2a+1)(b-\frac{1}{2})=\frac{5}{2}$

$\boxed{\begin{matrix} x\ge -2 \\ x\le 3 \end{matrix}}$

$\sqrt{a}-\sqrt{5-a}+3=2\sqrt{5a-a^2}$

$(a+1)(b-1)=ab-a+b-1=2-ab$

$a^2+b^2=5$ $\quad a^2+b^2+9-2ab+6a-6b=4a^2b^2$

$\cancel{x}+2+3-\cancel{x}+9-2\sqrt{6+x-x^2}+6\sqrt{x+2}-6\sqrt{3-x}=24+4x-4x^2$

$7-\sqrt{6+x-x^2}+3\sqrt{x+2}-3\sqrt{3-x}=12+2x-2x^2$

$7-ab+3a-3b=2a^2b^2$

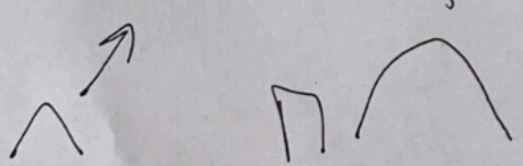
$0\le a\le\sqrt{5}$

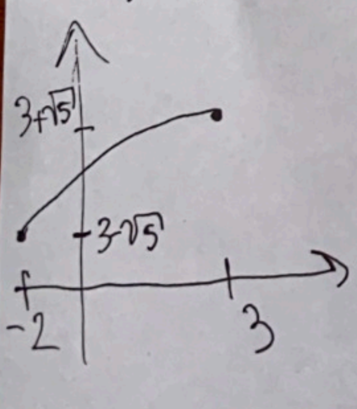
$0\le b\le\sqrt{5}$

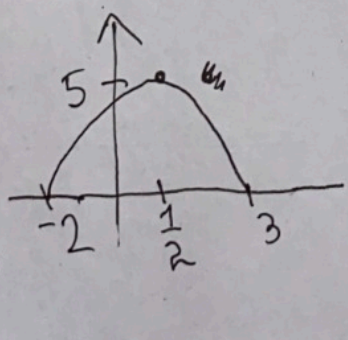
$(a+\frac{1}{2})(2b-1$

$5{,}23=3+\sqrt{5}\ge a-b+3\ge 3-\sqrt{5}=0{,}77$

$2ab\le 5$







$\boxed{\text{черновик}}$

211007320 (U264261 M1277572)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211007320**

ID профиля: **264261**

Вариант 11

$\boxed{\text{чистовик}}$ Задача 4

Ответ: $(\sqrt{2};\sqrt{2}),(\sqrt{2};-\sqrt{2}),(-\sqrt{2};\sqrt{2}),(-\sqrt{2};-\sqrt{2})$

Решение: $\begin{cases} \frac{4}{x^2+y^2}+x^2y^2=5 & (1) \\ x^4+y^4+3x^2y^2=20 & (2) \end{cases}$

Из (2): $(x^2+y^2)^2+x^2y^2=20$, $x^2+y^2=\sqrt{20-x^2y^2}$,

обозначим $x^2y^2=a$, подставим в (1):

$\frac{4}{\sqrt{20-a}}+a=5$, $\frac{4}{\sqrt{20-a}}=5-a$, $\frac{16}{20-a}=25-10a+a^2$,

(3) $a^3-30a^2+225a-484=0$. Заметим, что $a=4$ является корнем этого уравнения. Поделим на $a-4$:

$$\begin{array}{r|l} a^3-30a^2+225a-484 & a-4 \\ \underline{-\;a^3-4a^2} & a^2-26a+121 \quad (4) \\ -26a^2+225a & \\ \underline{-\;-26a^2+104a} & \\ 121a-484 & \\ \underline{-\;121a-484} & \\ 0 & \end{array}$$

Оставшиеся 2 корня (3) - корни (4), это

$\frac{26-\sqrt{26^2-484}}{2}=\frac{26-\sqrt{192}}{2}=\frac{26-8\sqrt{3}}{2}=13-4\sqrt{3}$ и

$\frac{26+\sqrt{26^2-484}}{2}=13+4\sqrt{3}$. Т.к. $x^2+y^2\geq 0$

и из (1) видно, что $x^2+y^2\neq 0$, то $x^2+y^2>0$,

тогда опять же из (1) $a=5-\frac{4}{x^2+y^2}<5$.

$13+4\sqrt{3}\geq 5$ - очевидно. Т.к. $2\geq\sqrt{3}$, $8\geq 4\sqrt{3}$,

$13-4\sqrt{3}\geq 5$. Значит $a=4$, тогда чистовик Задача 4 (продолжение)

подставляя это в ①, получаем $\frac{4}{x^2+y^2}+4=5$, $x^2+y^2=4$. Мы получили систему

$$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x^2y^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y^4-4y^2+4}{y^2}=0 \\ x^2=\frac{4}{y^2} \\ y^2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=\sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=-\sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\sqrt{2} \\ y=\sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\sqrt{2} \\ y=-\sqrt{2} \end{cases} \end{array} \right.$$

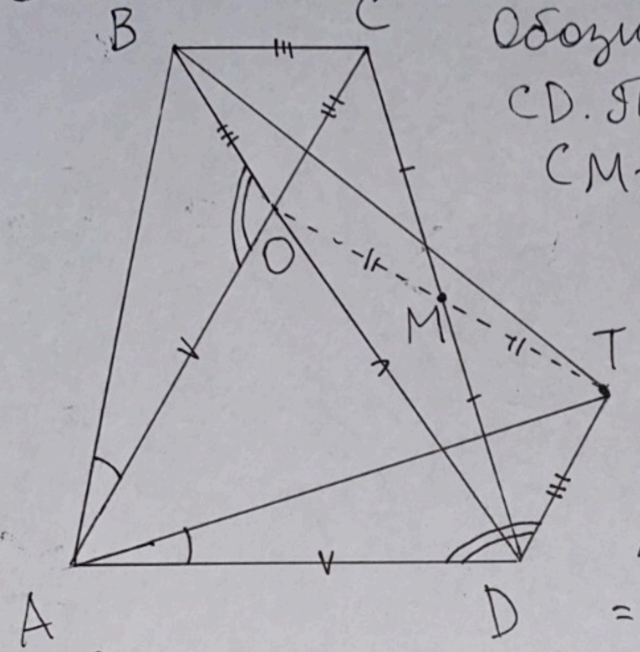
лист 2 из 5

чистовик

Задача 6

Ответ: б) $\frac{39}{49}$

Решение:



Обозначим M – середина CD. Тогда по условию $CM=MD$ и $OM=MT$, тогда OCTD – параллелограм и $DT=CO=BO$. Заметим также, что $AO=AD$ и $\angle ADT=\angle ADO+\angle ODT=$ $=60^\circ+180^\circ-\angle COD=60^\circ+$ $+180^\circ-120^\circ=120^\circ=\angle AOB \Rightarrow \triangle AOB=\triangle ADT \Rightarrow \angle BAO=$ $=\angle TAD$. Тогда $\angle BAT=\angle BAO+\angle OAT=\angle TAD+\angle OAT=$ $=60^\circ \Rightarrow \angle ABT=\angle ATB=60^\circ=\angle BAT$ (т.к. $\triangle ABT$ – равнобедренный) $\Rightarrow \triangle ABT$ – правильный.

По т. косинусов для $\triangle AOB$: $AB^2=2^2+5^2-2\cdot2\cdot5\cdot\cos120^\circ=$ $=4+25+2\cdot5=39$. Тогда $S_{\triangle ABT}=\frac{AB^2\cdot\sqrt{3}}{4}=\frac{39\sqrt{3}}{4}$.

~~По т. синусов~~ $S_{ABCD}=S_{\triangle ABO}+S_{\triangle BCO}+S_{\triangle COD}+S_{\triangle ODA}=$

$=\frac{2\cdot5\cdot\sin120^\circ}{2}+\frac{2^2\cdot\sqrt{3}}{4}+\frac{2\cdot5\cdot\sin120^\circ}{2}+\frac{5^2\cdot\sqrt{3}}{4}=\frac{49\sqrt{3}}{4}$

Тогда $\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}}=\frac{\frac{39\sqrt{3}}{4}}{\frac{49\sqrt{3}}{4}}=\frac{39}{49}$

чистовик

Задача 5

Ответ: 508096 (узел = точка)

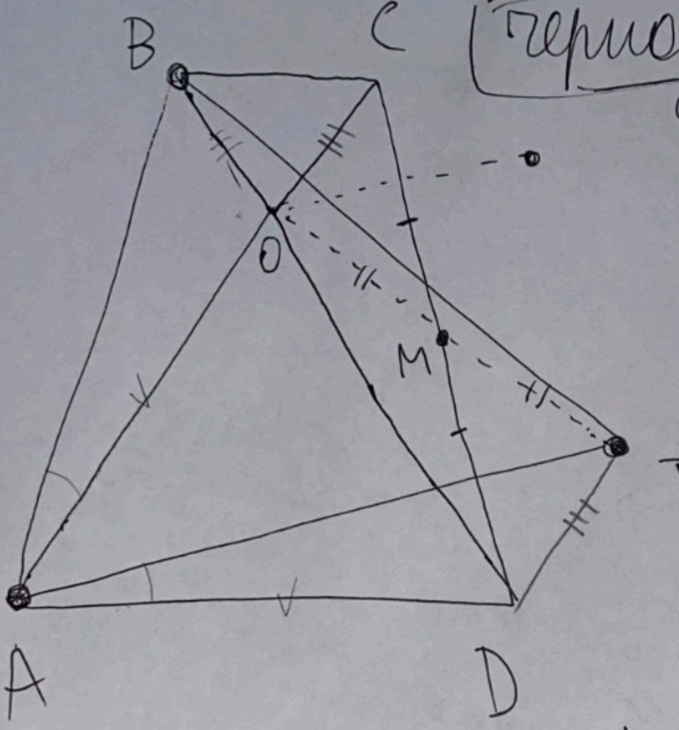
Решение: ~~..~~ обозначим $A: y=x$, $B: y=65-x$.
Если обе точки лежат на A, то подходящих нам вариантов C_{64}^2.
Аналогично, если обе на B. ① Если одна на A, а другая на B, то вариантов $64\cdot(64-2)$. ② Если одна на A, другая не на B, то вариантов $64\cdot$
$\cdot((64^2-1)-(63+63+64-2))$. Аналогично, если одна на B, а другая не на A.
Тогда всего вариантов $C_{64}^2\cdot 2+64\cdot 62+$
$+2\cdot 64\cdot((64^2-1)-(63+63+64-2))=\frac{63\cdot 64}{2}\cdot 2+3968+$
$+2\cdot 64\cdot(4095-188)=4032+3968+2\cdot 64\cdot 3907=$
$=8000+500096=508096$. Очевидно, в решении рассмотрены все варианты возможного взаиморасположения точек.
Поясним подсчет для некоторых из них. ①: На A можно выбрать 64 точки и при каждой из них на B можно выбрать $64-2=62$ (2 выбрать нельзя из 64, т.к. будет C = прямая ∥ коорд. оси). ②: На A 64 возможных

Чистовик

Задача 5 (продолжение)

точки N; для каждой из них 64^2-1 оставшихся возможных точек.
На 2 прямых C, проходящих через NEA по 63 „запретных точки". На B 64 „запретных" точки. Но всего „запретных" $63+63+64-2$, т.к. 2 мы посчитали дважды (те, что пересечения прямых C и B). Тогда всего в случае ② возможных вариантов $64 \cdot$
$$\cdot\left((64^2-1)-(63+63+64-2)\right)$$

лист 5 из 5

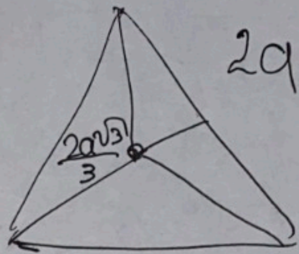


$\boxed{\text{Черновик}}$

$\cos 120° = \cos(90° + 30°) =$

$= \cos 90° \cdot \cos 30° - \sin 90° \cdot \sin 30° =$

$= 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$



$2a$

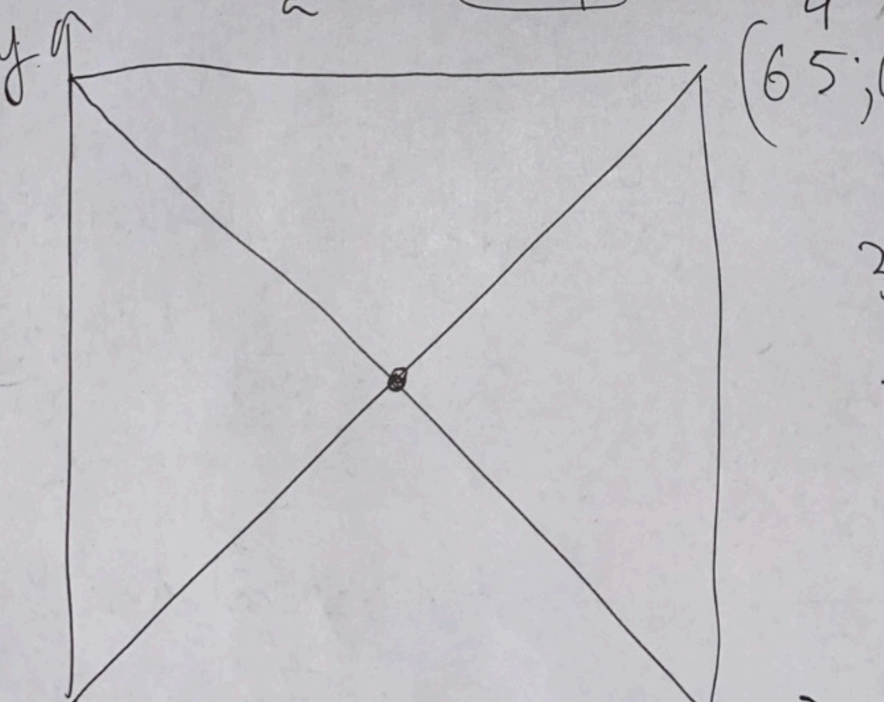
$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$4a^2 = a^2 \cdot \frac{4}{3} + a^2 \cdot \frac{4}{3} + a^2 \cdot \frac{4}{3}$

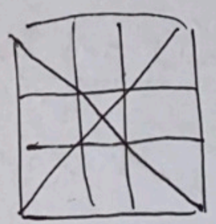
$\sin 120° = \sin 90 \cos 30 + \sin 30 \cos 90 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{10\sqrt{3}}{4}$ $\frac{10\sqrt{3}}{2}$ $\boxed{\frac{20\sqrt{3}}{4}}$ $\frac{4\sqrt{3}}{4}$ $\frac{25\sqrt{3}}{4}$

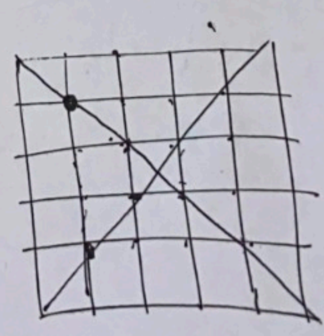
$(65;65)$



$32,5$



2



$C_{64}^2 + C_{64}^2 + 64 \cdot (64-2) + 2 \cdot 64 \cdot (64^2 - 1 - (63+63+64-2))$

$C_4^2 + C_4^2 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 7 \cdot 2$

$3 + 3 + 4 - 2 = 8$

$$\begin{cases} \dfrac{4}{x^2+y^2}+x^2y^2=5 \\ x^4+y^4+3x^2y^2=20 \end{cases}$$

$$\frac{x^4y^2+x^2y^4-5x^2-5y^2+4}{x^2+y^2}=0$$

$$(x^2+y^2)^2+x^2y^2=20$$

$\boxed{\text{черновик}}$

$$x^2+y^2=\sqrt{20-x^2y^2}$$

$$\frac{4}{\sqrt{20-x^2y^2}}+x^2y^2=5, \quad \frac{4}{\sqrt{20-a}}=5-a$$

$$\frac{16}{20-a}=25-10a+a^2,$$

$$500-200a+20a^2-25a+10a^2-a^3=16,$$

$$a^3-30a^2+225a-484=0$$

$\cancel{64-480+900-484=0}$

$$\begin{array}{l|l} a^3-30a^2+225a-484 & a-4 \\ \hline a^3-4a^2 & a^2-26a+121 \\ \quad -26a^2+225a & \\ \quad -26a^2+104a & \\ \qquad\quad 121a-484 & \\ \qquad\quad 121a-484 & \\ \qquad\qquad\quad 0 & \end{array}$$

$$26^2-484=676-484=192$$

$$\frac{26\pm\sqrt{192}}{2}=\frac{26\pm2\sqrt{48}}{2}=$$

$$=13\pm\sqrt{48}=13\pm4\sqrt{3}$$

$$13-4\sqrt{3}\geq5$$

$$8\geq4\sqrt{3}$$

$$\boxed{\begin{matrix} a+b=4 & a=2 \\ ab=4 & b=2 \end{matrix}}$$

211007320 (U264261 M1277573)

$$\frac{64\cdot 63}{2}\cdot 2 = 64\cdot 63$$

$$\begin{array}{r} \times\ 64 \\ 63 \\ \hline 192 \\ +\ 384 \\ \hline 4032 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\ 64 \\ 62 \\ \hline 128 \\ +\ 384 \\ \hline 3968 \end{array}$$

~~64~~

4095

188

$$\begin{array}{r} -\ 4095 \\ 188 \\ \hline 3907 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\ 125 \\ 64 \\ \hline 500 \\ +\ 750 \\ \hline 8000 \end{array}$$

$\boxed{\text{черновик}}$

$$\begin{array}{r} \times\ 3907 \\ 128 \\ \hline 31256 \\ +\ 7814 \\ 3907 \\ \hline 500096 \end{array}$$