Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211007263**

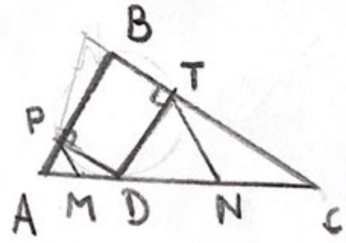
ID профиля: **116201**

Вариант 11

Чистовик

№1

а)



BD – диаметр окр. BTDP $\Rightarrow \angle BTD = \angle BPD = 90^\circ$

$\Rightarrow$ В прям. $\triangle$ APD и DTC проведены медианы PM и TN $\Rightarrow \angle DNT = 2\cdot\angle DCT$ (по св-ву прям. $\triangle$)

Также $\angle AMP = 180^\circ - 2\angle MAP$ (по св-ву прям. $\triangle$)

$PM \parallel NT \Rightarrow \angle AMP = \angle DNT \Rightarrow 2\cdot\angle DCT = 180^\circ - 2\angle MAP \Leftrightarrow$

$2\angle ACB = 180^\circ - 2\angle BAC \Leftrightarrow 2\cdot(180^\circ - \angle BAC - \angle ACB) = 180^\circ \Leftrightarrow \angle ABC = 90^\circ$

(по сумме $\angle$ в $\triangle$)

б) Из прям. $\triangle$ $AM = MD = MP = \frac{1}{2}$, $DN = NT = NC = 2$

Обозначим $PD = x$.

Из (а) BTDP – прям-к $\Rightarrow BD = PT = \sqrt{3} \Rightarrow DT = \sqrt{3 - x^2}$

(из т. Пифагора прям. $\triangle PDT$)

По т. косинусов $\triangle$ PMD:

$$\cos\angle PMD = \frac{PM^2 + MD^2 - PD^2}{2\,PM\cdot MD} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - x^2}{2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = 1 - 2x^2$$

По т. косинусов в $\triangle$DNT:

$$\cos\angle DNT = \frac{DN^2 + NT^2 - DT^2}{2DN\cdot NT} = \frac{4 + 4 - 3 + x^2}{2\cdot 2\cdot 2} = \frac{5 + x^2}{8}$$

$\angle PMD + \angle DNT = 180^\circ \Rightarrow -\cos\angle PMD = \cos\angle DNT$

(из $PM \parallel NT$)

$$\Updownarrow$$

$$2x^2 - 1 = \frac{5 + x^2}{8}$$

$$15x^2 = 13$$

$$x = \sqrt{\frac{13}{15}} \quad (\text{т.к. } PD > 0) \Rightarrow DT = \sqrt{3 - \frac{13}{15}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{15}}$$

PBTD – прям-к $\Rightarrow BT = PD = \sqrt{\frac{13}{15}}$, $PB = DT = \frac{4\sqrt{2}}{15}$

$AP = \sqrt{AD^2 - PD^2} = \sqrt{1 - \frac{13}{15}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{15}}$, $TC = \sqrt{DC^2 - DT^2} = \sqrt{16 - \frac{32}{15}} = \frac{4\sqrt{13}}{\sqrt{15}}$ $\Rightarrow$

$AB = AP + PB = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}}$, $BC = BT + TC = \frac{5\sqrt{13}}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{65}}{\sqrt{3}}$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB\cdot BC = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{10}\cdot\sqrt{65}}{3} = \frac{5\sqrt{26}}{6}$$

Ответ: а) 90° б) $\frac{5}{6}\sqrt{26}$

№2

Чистовик

Обозначим $\sqrt{x+2}=a$, $\sqrt{3-x}=b$. $a,b\geq 0$

$\sqrt{6+x-x^2}=\sqrt{(x+2)(3-x)}=a\cdot b$

$a^2+b^2=x+2+3-x=5$

$$\begin{cases} a^2+b^2=5 \\ a-b+3=2ab \end{cases} \quad a=\frac{b-3}{1-2b} \quad \frac{(b-3)^2}{(1-2b)^2}+b^2=5$$

$$\frac{b^2+9-6b}{4b^2-4b+1}+b^2-5=0 \qquad 1-2b\neq 0,\ b\neq\frac{1}{2}$$

$\Updownarrow$

$b^2+9-6b+(b^2-5)(4b^2-4b+1)=0$

$b^2+9-6b+4b^4-20b^2-4b^3+20b+b^2-5=0$

$4b^4-4b^3-18b^2+14b+4=0$

$2b^4-2b^3-9b^2+7b+2=0$

$b=1: \quad 2-2-9+7+2=0$

$b=-2: \quad 32+16-36-14+2=0$

$(b-1)(b+2)=b^2+b-2$

$$\begin{array}{l|l} 2b^4-2b^3-9b^2+7b+2 & b^2+b-2 \\ \hline -\ 2b^4+2b^3-4b^2 & 2b^2-4b-1 \\ \quad -4b^3-5b^2+7b & \\ -\ -4b^3-4b^2+8b & \\ \quad\quad -b^2-b+2 & \\ -\ -b^2-b+2 & \\ \quad\quad\quad 0 & \end{array}$$

$2b^2-4b-1=0$

$D=16+8=24$

$b_{1,2}=\frac{4\pm2\sqrt{6}}{4}=1\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$

$b\geq 0 \Rightarrow b=1$ или $b=1+\frac{\sqrt{6}}{2}$ $\quad \left(1-\frac{\sqrt{6}}{2}<\frac{2-\sqrt{4}}{2}=0\right)$

$\sqrt{3-x}=1 \Rightarrow x=2$

$\sqrt{3-x}=1+\frac{\sqrt{6}}{2}$

$3-x=1+\frac{3}{2}+\sqrt{6}$ $\quad (x+2=\frac{5}{2}-\sqrt{6}>0$, т.к. $25>24)$

$x=\frac{1}{2}-\sqrt{6}$

Ответ: $x=\frac{1}{2}-\sqrt{6}$; 2.

№3 Чистовик

1) $ax^2-2a^2x-ay+a^3+4=0$

$x^2-2ax-y+a^2+\frac{4}{a}=0$

$y=(x-a)^2+\frac{4}{a} \Rightarrow B\left(a;-\frac{4}{a}\right)$, т.к. B – вершина параболы.

B ~~[illegible]~~ не лежит на $y=3x+4$, $\Rightarrow -\frac{4}{a}=3a+4$

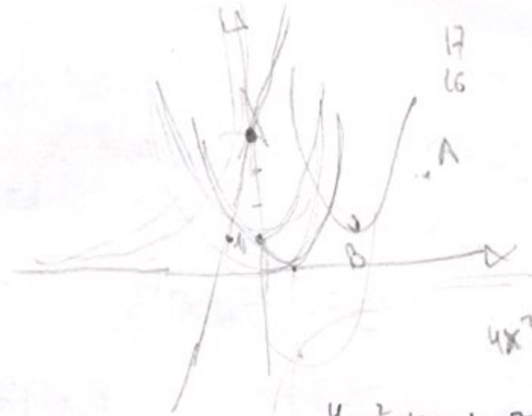
$-4-3a^2-4a=0$

$3a^2+4a+4=0$

$D=16-4\cdot 4\cdot 3<0$

~~2)~~

Черновик



$\frac{9}{4}$

$4a^2 \quad 12ax$

$8ax$

$21 \quad (2x+2y)^2$

$4\cdot(x+y)^2$

$5a^2+12ax+4ay+8x^2+8xy+4y^2=0$

$ax^2-2ax-ay+a^3+4=0$

$4x^2+5a^2+8ax$

$ax^2-2ax+a$

$y-3x=4$

$4y^2+4ay+a^2$

$4(a+x)^2+a^2 \quad +4(x+y)\cdot a \quad 4\cdot(x+y)^2 \quad y=3x+4$

$\frac{5}{4}a^2+3ax+ay+2x^2+2xy+y^2=0$

$(x+1{,}5a)^2+ay-a^2(x+y)^2=0$

$D=(2x+a)^2-8x^2-5a^2-12ax=$

$=4x^2-4a^2-8ax=0$

$y=\frac{-2x-a\pm2\sqrt{x^2-a^2-2ax}}{2}=$

$y=-x-\frac{a}{2}\pm\sqrt{x^2-a^2-2ax}$

$(x-a)^2\geq 2a^2$

$x-2a \quad (x-a-\sqrt{2}a)(x-a+\sqrt{2}a)$

$a(x-1)^2-2a^2x+2ax-ay+a^3+4-a$

$y=x^2-2ax+a^2+\frac{4}{a}$

$y=(x-a)^2+\frac{4}{a} \qquad (a;-\frac{4}{a})$

$y=(x-1)^2+4 \quad -\frac{4}{a}-3a=4=0$

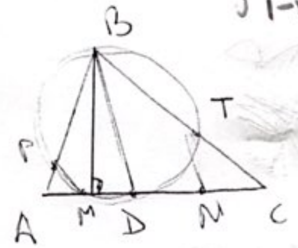
$y=-\frac{4}{a} \quad 3a^2-4a+4=0$

$D=16-4$

черновик

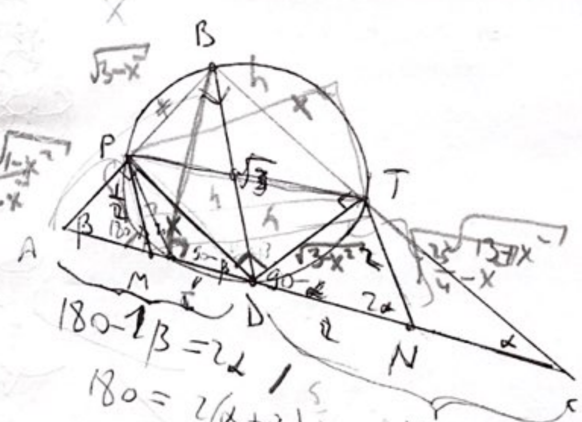
$\begin{cases} x+2\geq 0 \\ 3-x\geq 0 \end{cases}$ $x\geq -2$ $3\geq x$

$-\frac{1}{2}$



$\sqrt{1-x^2}\cdot\left(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{3-x^2}\right)$

$16-3+x^2$

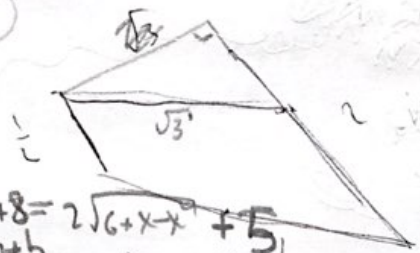


$180-2\beta=2\alpha$

$180=2(\alpha+\beta)$

$\alpha+\beta=90$

$x+2+3-x=5$



$(2a-1)(\frac{1}{2}+b)$

$\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}+8=2\sqrt{6+x-x^2}+5$

$a+b$ $2ab+a-b$ $\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{3-x}$

$\begin{cases} a-b+3=2ab \\ a^2+b^2=5 \end{cases}$ $2ab-a+b$

$a=\sqrt{5-b^2}$

$a(1-2b)=b-3$

$a=\frac{b-3}{1-2b}$ $b\neq\frac{1}{2}$

$\frac{b^2+9-6b}{4b^2+1-4b}+b^2-5=0$

$\sqrt{5-b^2}-b+3=2b\sqrt{5-b^2}$

$\sqrt{5-b^2}\cdot(1-2b)=b-3$

$5-b^2(1+4b^2-4b)=b^2-6b+9$

$-18b^2+4-6b+4b^4-4b^3=0$

$2b^4-2b^3-9b^2+7b+2=0$

$b=1$

$b=-2$

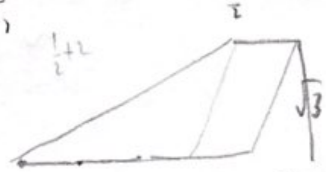
$32+16-36-14+2$

$\frac{\sqrt{6}}{2}$ $\sqrt{\frac{3}{2}}$

$(a+b)^2=5+a-b+3$

$a-b+8$

$(2a+1)(b-\frac{1}{2})=\frac{5}{2}$



cos

$\frac{\frac{1}{2}-x^2}{2\cdot\frac{1}{2}}=(\frac{1}{2}-x^2)\cdot 2=1-2x^2$

$2x^2-1$

$\frac{8-3+x^2}{8}=\frac{5+x^2}{8}=2x^2-1$

$5+8=16x^2-8$

$13=16x^2$

$x=\frac{\sqrt{13}}{4}$

$x+2=3-x$

$x=\frac{5}{2}$

$2,5+\sqrt{6}$

$\frac{5}{2}$ $\sqrt{6}$

$\frac{25}{4}$ 6

25 24

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211007263**

ID профиля: **116201**

Вариант 11

Чистовик

N1

$$\begin{cases} \dfrac{4}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 5 \\ x^4+y^4+3x^2y^2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4}{x^2+y^2} - 5 = -x^2y^2 & (1) \\ (x^2+y^2)^2 = 20 - x^2y^2 & (2) \end{cases}$$

Подставим (1) в (2) и заменим $x^2+y^2=t, t \geq 0$

Получим:

$$\frac{4}{t} - 5 + 20 = t^2$$

$$\frac{4+15t-t^3}{t} = 0 \Leftrightarrow 4+15t-t^3=0, \ t \neq 0$$

$t=4$: $4+15\cdot 4 - 4^3 = 0$

$$\begin{array}{r|l} 4+15t-t^3 & t-4 \\ \hline -t^3+4t^2 & -t^2-4t-1 \\ -4t^2+15t & \\ -4t^2+16t & \\ -t+4 & \\ -t+4 & \\ 0 & \end{array}$$

$t^2+4t+1=0$

$D = 16-4 = 12$

$t_{1,2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -2 \pm \sqrt{3}$, ~~$t \geq 0 \Rightarrow t \neq$~~

$\left.\begin{array}{l} -2+\sqrt{3} < -2+\sqrt{4} = 0 \\ -2-\sqrt{3} < 0 \end{array}\right| \Rightarrow t=4$ - ед. реш.

$$\frac{4}{x^2+y^2} - 5 = -x^2y^2 \Rightarrow -x^2y^2 = -4 \Rightarrow x^2y^2 = 4$$

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 4 \\ x^2y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow x^2(4-x^2) = 4$$

$$x^4 - 4x^2 + 4 = 0$$

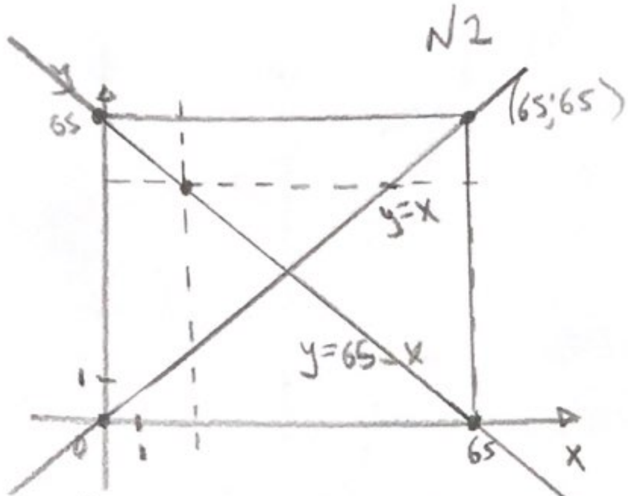
$$x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

$$y^2 = 2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2}$$

Ответ: $(\sqrt{2}, \sqrt{2}), (-\sqrt{2}; \sqrt{2}), (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

Чистовик

№2



y=x и y=65−x − диагонали квадрата со стороной 65.

y=x и y=65−x не пересекаются в узле, т.к. 65 − нечетное ($x=65-x \Leftrightarrow 2x=65$)

1) Один узел на диагонали, второй нет:

а) Выбрать узел на диагонали $64+64=128$ способов (т.к. внутри квадрата $64\cdot64$ клеток и диагонали не пересекаются)

б) Выбрать узел не на диагоналях и не на прямых, параллельных ~~узлам~~ осям координат ~~64·64−~~

$$64\cdot64-64\cdot2-\underline{63\cdot2+2}=4096-256\cancel{+2}+4=3844$$

Всего ~~клеток~~ узлов

~~клеток~~ узлов на двух диагоналях

~~клеток~~ узлов на прямых, параллельным осям координат $63\cdot2$ (т.к. эти прямые пересекаются в узле из п.а), но еще 1 ~~клетка~~ узел лежит на y=x, а второй на $y=65-x \Rightarrow 63\cdot2-2$

2) Оба узла на диагоналях, но не на прямых, параллельным осям координат:

$$\frac{128\cdot(128-3)}{2}=64\cdot125$$

~~клеток~~ узлов на двух диагоналях

узлов, кроме уже выбранного и двух лежащих на прямых, параллельным осям координат

первый и второй узлы равносильны ⇒ посчитали дважды

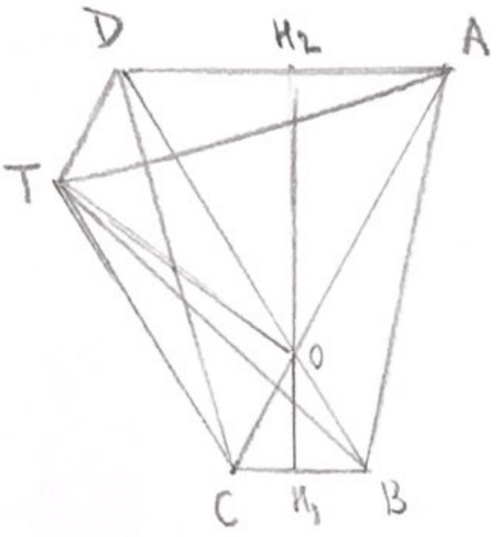
3) Всего: $128\cdot3844+64\cdot125=64\cdot7813=500032$

Ответ: 500032

2

Чистовик

№3



а) OT и CD точкой пересечения делятся пополам $\Rightarrow OCTD$ - пар-м $\Rightarrow TD = OC$ и $\angle ODT = 180° - \angle COD = 180° - 120° = 60°$ (т.к. $\angle AOD = \angle BOC = 60°$)

$\angle ADT = \angle ADO + \angle ODT = 120°$

$\angle BOA = 120°$

$\left.\begin{array}{l} \angle ADT = \angle BOA \\ AD = AO \\ DT = OC = OB \end{array}\right| \Rightarrow \triangle ADT = \triangle AOB$ (по 2-ум ст. и $\angle$ между ними)

$\Downarrow$

$AT = AB$ и $\angle DAT = \angle BAO$

$\angle BAT = \angle OAD + \angle BAO - \angle DAT = \angle OAD = 60°$ и $\triangle ATB$ - р/б $\Rightarrow$ $\triangle ATB$ - равност.

б) 1) По т. косинусов $\triangle AOB$:

$AB^2 = AO^2 + OB^2 - 2AO \cdot OB \cos\angle AOB = 25 + 4 + 2 \cdot 5 \cdot \cancel{4}\,2 \cdot \frac{1}{2} = \cancel{49}\,39$

~~$\Rightarrow AB = 7$, Высота в прав. $\triangle = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AB = \frac{7\sqrt{3}}{2}$~~

~~$S_{\triangle ATB} = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot \frac{7\sqrt{3}}{2} = \frac{49\sqrt{3}}{4}$~~

$AB = \sqrt{39}$, высота в прав. $\triangle = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{39}$

$S_{\triangle ABT} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{39} \cdot \sqrt{39} = \frac{39\sqrt{3}}{4}$

2) $\left.\begin{array}{l} \angle BCO = \angle OAD = 60° \Rightarrow BC \parallel AD \\ AC = AO + OC = DO + OB = BD \end{array}\right| \Rightarrow ABCD$ - р/б трапеция (т.к. диагонали равны)

Проведем через O перпендикуляр H_1H_2 ($H_1 \in BC$, $H_2 \in AD$)

$H_1O = \frac{\sqrt{3}}{2} BC = \sqrt{3}$, $H_2O = \frac{\sqrt{3}}{2} AD = \frac{5\sqrt{3}}{2} \Rightarrow H_1H_2 = OH_1 + OH_2 = \frac{7\sqrt{3}}{2}$

$S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2} \cdot H_1H_2 = \frac{5+2}{2} \cdot \frac{7\sqrt{3}}{2} = \frac{49\sqrt{3}}{4}$

3) $\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{39\sqrt{3}}{4}}{\frac{49\sqrt{3}}{4}} = \frac{39}{49}$

Ответ: $\frac{39}{49}$.

~~Чистовик~~

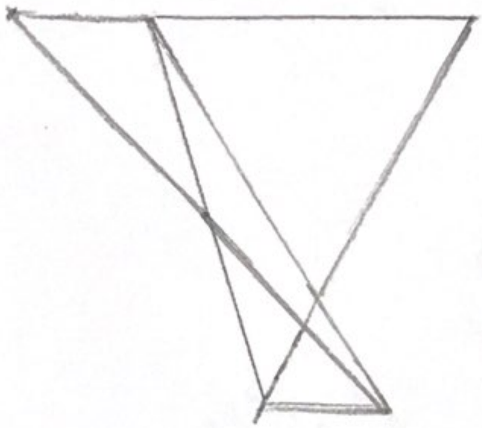
Черновик

№1

$$\begin{cases} \dfrac{4}{x^2+y^2}+x^2y^2=5 \\ x^4+y^4+3x^2y^2=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4}{x^2+y^2}=5-x^2y^2 \\ (x^2+y^2)^2=20-\cancel{x^2y^2} \end{cases}$$

~~Чистовик~~
Черновик

N3



Черновик

1). Если в на ...

$$\begin{cases} \dfrac{4}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 5 \\ x^4+y^4+3x^2y^2 = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{4}{a+b} + ab = 5 \\ a^2+b^2+3ab = 20 \end{cases}$$

$5 - ab = \frac{4}{a+b}$

$(a+b)^2 = 20 - ab = 15 + \frac{4}{a+b}$

$t^4 = 15 + \frac{4}{t}$

$\frac{4+15t-t^3}{t} = 0$

$4+30-4t-4$

$4+15-t^3 \mid t-4$

$-t^3+15t+4 \mid t-4$

$-\,t^3+4t^2 \quad -t^2-4t-1$

$-4t^2+15t \quad D=16-4=12$

$-\,-4t^2+16t$

$-t+4$

$\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$

2^9

1048

$-\,4096$

256

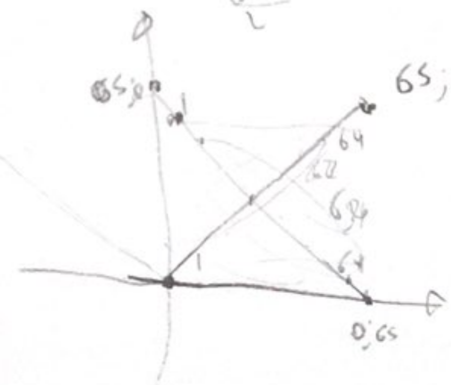
3760

$4096 - 256 = 840$

$2^{12} = 64^2$

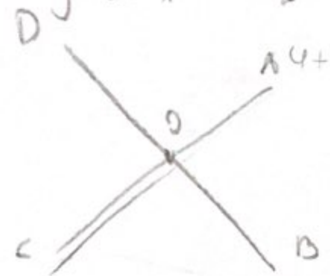
63^2

$\frac{(26)}{2}$



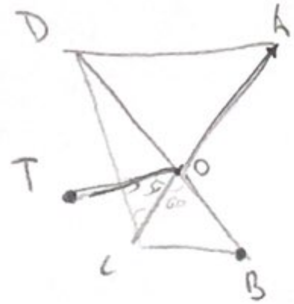
$y = 1-x$

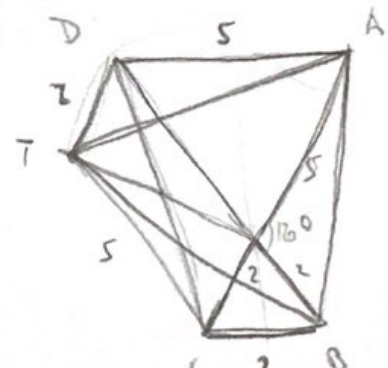
$y = 65-x$



24

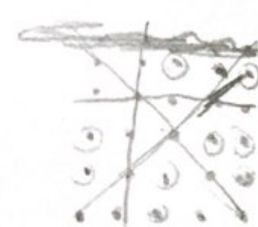
$36 - 6\cdot 4 + 4 = 16$





$\begin{array}{r} 7813 \\ \times\ 64 \\ \hline 31252 \\ 46878 \\ \hline 500032 \end{array}$

$y = x \quad 5-x$



$\begin{array}{r} 3844 \\ 2 \\ \hline 7688 \\ +\ 125 \\ \hline 813 \end{array}$

$25 - 5\cdot 4 + 2 = 7$