Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

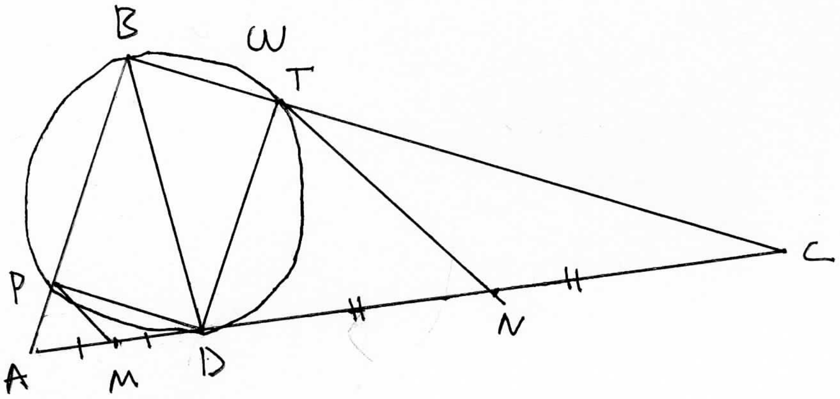
Шифр: **211007193**

ID профиля: **306373**

Вариант 11

Чистовик

(1.) (начало)



Дано:

а и б) ΔABC

$D \in AC$

Окружность ω имеет диаметр BD

$\omega \cap AB = P \neq B$

$\omega \cap BC = T \neq B$

$PM \parallel TN$

б) $MP = \frac{1}{2}$, $TN = 2$, $BD = \sqrt{3}$

Найти:

а) $\angle ABC$ - ?

б) $S_{\Delta ABC}$ - ?

Решение:

а) Т.к. BD - диаметр ω, то углы $\angle BTD$ и $\angle BPD$, на него опирающиеся, прямые. Тогда и углы $\angle APD$ и $\angle DTC$ прямые, т.е. ΔAPD и ΔDTC - прямоугольные с гипотенузами AD и CD соответственно.

PM - медиана к гипотенузе прямоугольного ΔAPD, а поэтому $PM = AM = DM$. Значит, ΔPMA - равнобедренный $\Rightarrow$ $\Rightarrow \angle APM = \angle PAM$. По теореме о внешнем угле для $\angle PMD$ и ΔPAM: $\angle PMD = \angle APM + \angle PAM = 2\angle PAM$. Аналогично, TN - медиана к гипотенузе прямоугольного ΔDTC, а поэтому $TN = NC \Rightarrow \Delta TNC$ - равнобедренный $\Rightarrow \angle NTC = \angle NCT$. По теореме о внешнем угле для $\angle TND$ и ΔTNC: $\angle TND = \angle NTC + \angle NCT = 2\angle NCT$.

$\angle PMD$ и $\angle DNT$ - односторонние для параллельных PM и TN и секущей MN, а потому:

$\angle PMD + \angle DNT = 180^\circ$

$2\angle PAD + 2\angle NCT = 180^\circ$

$\angle PAD + \angle TCN = 90^\circ$.

Чистовик

1. (Продолжение)

По теореме о сумме углов Δ для ΔABC:

$\angle ABC = 180^\circ - (\angle BAC + \angle BCA) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

б) Обозначим $\angle BDA$ за α. Тогда $\angle BDC = 180^\circ - \alpha$.

$AD = 2PM = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$

$DC = 2TN = 2 \cdot 2 = 4$, $AC = AD + CD = 1+4 = 5$

По теореме косинусов в ΔBDA:

$AB^2 = BD^2 + AD^2 - 2BD \cdot AD \cos\angle BDA = (\sqrt{3})^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos\alpha =$

$= 3 + 1 - 2\sqrt{3}\cos\alpha = 4 - 2\sqrt{3}\cos\alpha$

По теореме косинусов в ΔBDC:

$BC^2 = BD^2 + DC^2 - 2BD \cdot DC \cdot \cos\angle BDC = (\sqrt{3})^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos(180^\circ - \alpha) =$

$= 3 + 16 + 8\sqrt{3}\cos\alpha = 19 + 8\sqrt{3}\cos\alpha$

Т.к. $\angle ABC = 90^\circ$, то ΔABC – прямоугольный, а потому по теореме Пифагора:

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$5^2 = 4 - 2\sqrt{3}\cos\alpha + 19 + 8\sqrt{3}\cos\alpha$

$25 = 23 + 6\sqrt{3}\cos\alpha$

$2 = 6\sqrt{3}\cos\alpha$

$\cos\alpha = \frac{1}{3\sqrt{3}}$

Используя основное тригонометрическое тождество и то, что $\alpha < 180^\circ$, т.е. $\sin\alpha > 0$:

$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{27}} = \frac{\sqrt{26}}{3\sqrt{3}}$.

$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta CDB} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot BD \cdot \sin\angle ADB + \frac{1}{2} \cdot BD \cdot DC \cdot \sin\angle BDC =$

$= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{3} \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{3} \cdot \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{26}}{3\sqrt{3}} + 2\sqrt{3} \cdot \sin\alpha =$

2 стр.

Чистовик

(1.) (окончание)

$$= \frac{\sqrt{26}}{6} + 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{26}}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{26}}{6} + \frac{2}{3}\sqrt{26} = \frac{\sqrt{26} + 4\sqrt{26}}{6} = \frac{5\sqrt{26}}{6}$$

Ответ: а) $\angle ABC = 90^\circ$

б) $S_{\Delta ABC} = \frac{5\sqrt{26}}{6}$

Чистовик.

(2.) $\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}+3=2\sqrt{6+x-x^2}$

$\sqrt{x+2}+3=2\cdot\sqrt{(3-x)(2+x)}+\sqrt{3-x}$

$\sqrt{x+2}+3=(2\sqrt{x+2}+1)(\sqrt{3-x})$

Возведём обе части в квадрат. Переход равносильный, т.к. обе части неотрицательны.

$(\sqrt{x+2}+3)^2=(2\sqrt{x+2}+1)^2(\sqrt{3-x})^2$

ОДЗ:

$\begin{cases} x+2\geq 0 \\ 3-x\geq 0 \\ 6+x-x^2\geq 0 \end{cases}$

$6+x-x^2=$
$=6+3x-2x-x^2=$
$=3(2+x)-x(2+x)=$
$=(3-x)(2+x)$

$\begin{cases} x\geq -2 \\ x\leq 3 \\ (3-x)(2+x)\geq 0 \end{cases}$

3 нер-во верно при $x\geq -2$ и $x\leq 3$, а потому итоговое ОДЗ:

$x\in[-2;3]$

$x+2+9+6\sqrt{x+2}=(1+4(x+2)+4\sqrt{x+2})(3-x)$

$x+6\sqrt{x+2}+11=(4x+9+4\sqrt{x+2})(3-x)$

$x+6\sqrt{x+2}+11=12x+27+12\sqrt{x+2}-4x^2-9x-4x\sqrt{x+2}$

$4x^2-2x-16-6\sqrt{x+2}+4x\sqrt{x+2}=0$

$(2x+\sqrt{x+2})^2-3(x+6+2\sqrt{x+2})=0$

$(2x+\sqrt{x+2})^2-3(\sqrt{x+2}+2)^2=0$

$(2x+\sqrt{x+2}-\sqrt{3}\sqrt{x+2}-2\sqrt{3})(2x+\sqrt{x+2}+\sqrt{3}(\sqrt{x+2}+2\sqrt{3})=$
$=0$

либо

$2x+\sqrt{x+2}-\sqrt{3}\sqrt{x+2}-2\sqrt{3}=0$ Пусть $\sqrt{x+2}=t$

либо

$2x+\sqrt{x+2}+\sqrt{3}\sqrt{x+2}+2\sqrt{3}=0$

Ишимовик

(3) Для начала рассмотрим параболу:

$ax^2-2a^2x-ay+a^3+4=0$

$ay=ax^2-2a^2x+a^3+4$

$a\neq 0$, т.к. иначе не будет параболы.

$y=x^2-2ax+\frac{a^3+4}{a}$

$x_в=\frac{2a}{2}=a$

$y_в=a^2-2a\cdot a+\frac{a^3+4}{a}=a^2-2a^2+a^2+\frac{4}{a}=\frac{4}{a}$.

Координаты В $(a;\frac{4}{a})$

Черновик.

$$y = \frac{ax^2 - 2a^2x + a^3 + 4}{a}$$

$5a^2$

$(pa+qx)^2 + (sa+ty)^2 + (bx+cy)^2$

$$y = x^2 - 2ax + \frac{a^3+4}{a}$$

$pq = 6 \quad q^2 + b^2 = 8$

$p^2 + s^2 = 5 \quad c^2 + t^2 = 4$

$\frac{2a}{2} = a. \quad \left(a; \frac{4}{a}\right).$

$\frac{3}{2}$

$\frac{9}{4}$

$a + b = 5$

$\sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{5}{2}} + 3$

$a^2 - 2a^2 + a^2 + \frac{4}{a}$

$8x^2 + (12a + 8y)x + 4y^2 + 4ay + 5a^2 = 0$

$\sqrt{a} - \sqrt{b} + 3 = 2\sqrt{ab}$

$6 + \frac{5}{2} - \frac{25}{4}$

$\sqrt{a}$

$\frac{24 + 10 - 25}{4}$

$144a^2 +$

$x = -\frac{a}{4}$

$a + 9 + 6\sqrt{a} = b(4a + 4\sqrt{a} + 1)$

$9a^2 + 24ax + 16x^2 \quad 5a^2 + 12ax + 4ay + 8x^2 + 8xy + 4y^2 = 0$

$8y^2 + 16xy + 8ay + a^2 \quad \cancel{5a^2}$

Черновик

$y = 3x+4.$

$5a^2+12ax+4ay+8x^2+8xy+4y^2=0$

$4x^2+12ax+$

$4\cdot\frac{1}{16}-\frac{27}{4}+\frac{31}{2}+46=0$

$2^2+4\cdot16\cdot4$

$(2x+2y)^2$

$\frac{1}{4}-\frac{27}{4}\quad-\frac{26}{2}+\frac{31}{2}$

$4+256$

$4ay+4y^2+4a^2$

$10a^2+24ax+8ay+16x^2+18xy+8y^2=0$

$a^2+12ax+36x^2$

$(y+2a)^2$

$4x^4-27x^2+31x+46=0$

$4y^2+16xy+$

$-27\quad-62+46$

$4x^2-2x+16=(6-4x)\sqrt{x+2}$

$1-1-16-6\sqrt{\frac{5}{2}}+2\sqrt{\frac{5}{2}}$

$x=\frac{3}{2}$

$(x+2)$

$2x^2-x-8=(3-2x)\sqrt{x+2}$

$4x^4+x^2+64-\quad=(9-12x+4x^2)(x+2)$

$\cancel{4x^3}-32x^2+16x=\cancel{4x^3}-12x^2+9x+18-24x+8x^2$

Черновик

$t+6\sqrt{t}+9=$

$=20t+20\sqrt{t}+5-$

$-4t^2-4t\sqrt{t}-t$

$t+6\sqrt{t}+9=$

$=(5-t)(4t+4\sqrt{t}+1)$

$4t^2-18t-14\sqrt{t}+$

$+4t\sqrt{t}+4=0$

$(2\sqrt{t}+1)^2=$

$=4t+4\sqrt{t}+1$

$\sqrt{t}-\sqrt{5-t}+3=$

$=2\sqrt{t(5-t)}$

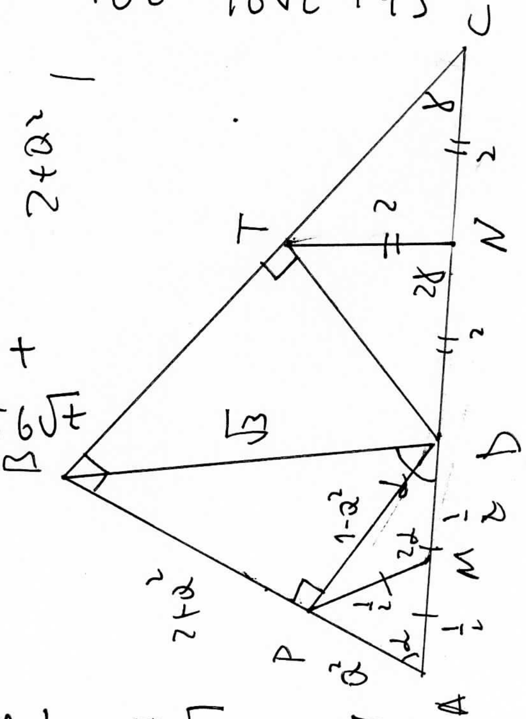
$16t-16\sqrt{t}+49$

$16t-72\sqrt{t}+$

$+81-32+56\sqrt{t}$

$2\cdot(1-a^2)$

$2+a^2$



$\sqrt{4\cdot 1}$

$2t^2-9t-7\sqrt{t}+4t\sqrt{t}+4=0$

$2t^2+(4\sqrt{t}-9)t+(4-7\sqrt{t})=0$

$1^2+3-2\sqrt{3}\cos\alpha+3+16+\cancel{2}\cdot 4\cdot\sqrt{3}\cos\alpha=$

$=25$

$5-t$

$\sqrt{a}-\sqrt{b}=2\sqrt{ab}+2$

$x+2=t$

$-x-2$

$-t+5$

$4a^2-2a-16-10b+4ab=0$

$4x^2+4x\sqrt{x+2}+x+2$

$(2x+\sqrt{x+2})^2$

$-3x-18-10\sqrt{x+2}$

$2x^2-x-8-3\sqrt{x+2}+2x\sqrt{x+2}$

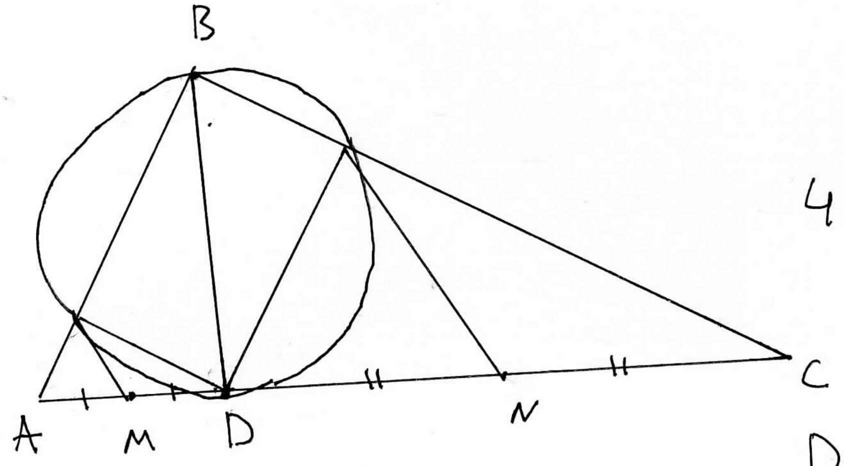
$6+4$

$4x^2-2x-16=(6-4x)\sqrt{x+2}$

$(x+2)$

Черновик

1.



$$4x^2+(4\sqrt{x+2}-2)x-$$
$$-(16+10\sqrt{x+2})=0$$
$$D=(4(x+2)+1-4\sqrt{x+2})+$$
$$+8(8+\cancel{8}\sqrt{x+2})$$

$$\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}+3=2\sqrt{6+x-x^2}$$

$$2x^2+(2\sqrt{x+2}-1)x-$$

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}+3=2\sqrt{ab}$$

$$(x+2)(3-x)=$$

$$-(8+5\sqrt{x+2})=0$$

$$\sqrt{a}+3=\sqrt{ab}+\sqrt{b}$$

$$=-x^2$$

$$4x+9+64+36\sqrt{x+2}$$

$$(\sqrt{a}+3)=(\sqrt{a}+1)\sqrt{b}$$

$$11-36=-25$$

$$a+\cancel{6}\sqrt{a}+9=4b(a+2\sqrt{a}+1)$$

$$4x+\cancel{36}\sqrt{x+2}+$$
$$+73$$

$$x+11+6\sqrt{x+2}=(3-x)(x+2+1+2\sqrt{x+2})$$

$$x+11+\cancel{6\sqrt{x+2}}=4(9-x^2+\cancel{6\sqrt{x+2}}-2x\sqrt{x+2})$$

$$(2\sqrt{x+2}+9)^2=$$
$$=4x+8+81$$

$$x+4x^2\cancel{+225}-2x\sqrt{x+2}$$

$$(2\sqrt{x+2}+6)^2$$ 90

$$(x+\sqrt{x+2})^2=x^2+x+2+2x\sqrt{x+2}$$

$$2\sqrt{x+2}$$

$$\sqrt{x+2}=-x \quad x<0.$$

$$x^2$$

Черновик

$4x^2+4x\sqrt{x+2}+x+2-3x-18-6\sqrt{x+2}$

$(2x+\sqrt{x+2})^2-3(x+6+2\sqrt{x+2})$

$(\sqrt{x+2}+2)^2$

$10a^2+12ax.$

$16x^2$

7

$12ax$ $12ax$ $4\cdot 3.$

$4ay$ $4ay$ $4\cdot 2.$

$8xy.$ $8xy$ $2\cdot 4.$

$4a^2$

$(4a^2+12ax+9x^2)+(a^2+4ay+4y^2)-x^2-8xy$

$(2a+3x)^2+(a+2y)^2=x(x+8y)$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

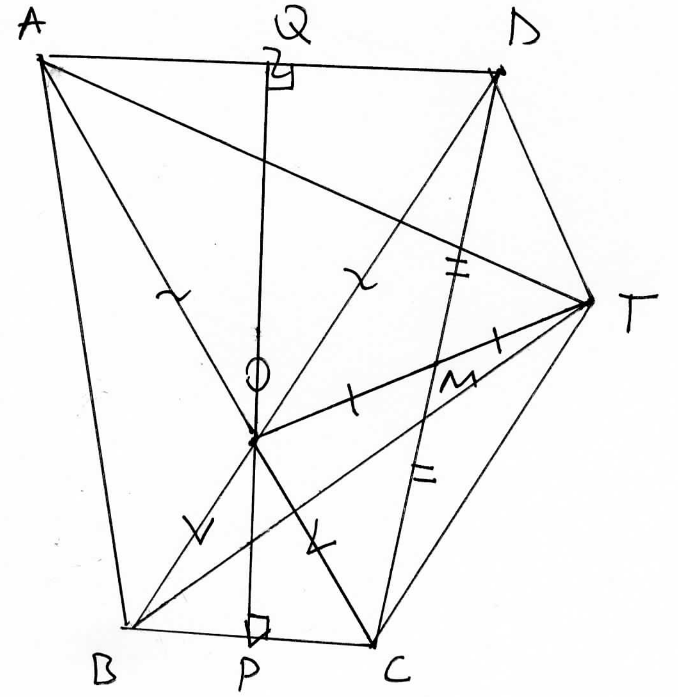
Шифр: **211007193**

ID профиля: **306373**

Вариант 11

Чистовик

(6.) (начало)



Дано:

а) и б) Выпуклый четырёхугольник $ABCD$, $AC \cap BD = O$

$\triangle BOC$, $\triangle AOD$ - правильные

T симметрична O относительно середины CD

б) $BC = 2$, $AD = 5$

а) Доказать:

$\triangle ATB$ - правильный

б) Найти:

$\dfrac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}}$ - ?

Решение:

а) Пусть M - середина CD. Тогда O, M, T лежат на одной прямой и M - середина OT. Т.к. $\triangle AOD$, $\triangle BOC$ - правильные, то всех углы равны 60°. В четырёхугольнике $ODTC$ диагонали CD и OT делятся точкой пересечения M пополам $\Rightarrow$ $ODTC$ - параллелограмм. Значит, $DT = OC = BC$, $CT = OD = AD$. $DT \parallel OC \Rightarrow$ соответственные для секущей BD углы $\angle BOC$ и $\angle ODT$ равны, т.е. $\angle ODT = 60^\circ$. $OD \parallel CT \Rightarrow$ соответственные для секущей CA $\angle OCT$ и $\angle AOD$ равны, т.е. $\angle OCT = 60^\circ$.

$\angle BCT = \angle BCO + \angle OCT = 60^\circ + 60^\circ = \angle ODT + \angle ADO = \angle ADT$.

$\triangle ADT = \triangle TCB$ по 2 сторонам ($AD = CT$, $BC = DT$) и углу между ними ($\angle BCT = \angle TDB$) $\Rightarrow AT = BT$, $\angle ATD = \angle TBC$.

$\angle DOC = 180^\circ - \angle BOC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$. ($\angle DOC$ и $\angle BOC$ смежные)

Чистовик

(6.) (продолжение)

$\angle DOC$ и $\angle DTC$ – противоположные углы параллелограмма $ODTC$, а потому $\angle DTC = \angle DOC = 120^\circ$.

По теореме о сумме углов Δ в ΔBCT:

$\angle TBC + \angle BTC = 180^\circ - \angle BCT = 180^\circ - \angle BCO - \angle OCT =$

$= 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$.

$\angle ATB = \angle DTC - \angle ATD - \angle BTC = \angle DTC - (\angle TBC + \angle BTC) =$

$= 120^\circ - 60^\circ = 60^\circ$.

Т.к. $\angle ATB = 60^\circ$ и $AT = BT$, то ΔATB – правильный, ч.т.д.

б) $DT = BC = 2$. $\angle ADT = \angle ADO + \angle TDO = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$

По теореме косинусов в ΔADT:

$AT^2 = AD^2 + TD^2 - 2AD \cdot TD \cdot \cos\angle ADT = 5^2 + 2^2 - 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot \cos 120^\circ =$

$= 25 + 4 - 20 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 29 + 10 = 39$

Т.к. ΔATB – правильный, то:

$S_{\Delta ATB} = \frac{\sqrt{3} \cdot AT^2}{4} = \frac{39\sqrt{3}}{4}$

Т.к. накрест лежащие $\angle ADB$ и $\angle DBC$ для прямых AD и BC и секущей DB равны, то $AD \parallel BC$. А т.к. $AD \neq BC$, то $ABCD$ – трапеция. Проведём в ней высоту PQ, проходящую через точку O ($P \in BC$, $Q \in AD$)

OQ – высота правильного ΔAOD, а потому:

$OQ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AD = \frac{5}{2}\sqrt{3}$

OP – высота правильного ΔBOC, а потому:

$OP = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot BC = \sqrt{3}$.

Чистовик

(6.) (окончание)

$PQ = OP + OQ = \sqrt{3} + \frac{5}{2}\sqrt{3} = \frac{7}{2}\sqrt{3}$

$S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2} \cdot PQ = \frac{5+2}{2} \cdot \frac{7}{2}\sqrt{3} = \frac{49}{4}\sqrt{3}$

$\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\left(\frac{39\sqrt{3}}{4}\right)}{\left(\frac{49}{4}\sqrt{3}\right)} = \frac{39}{49}$

Ответ: б) $\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{39}{49}$.

Чистовик

(начало)

4.
$$\begin{cases} \frac{4}{x^2+y^2}+x^2y^2=5 \\ x^4+y^4+3x^2y^2=20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{4}{x^2+y^2}+x^2y^2=5 \\ x^4+y^4+2x^2y^2+x^2y^2=20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{4}{x^2+y^2}+x^2y^2=5 \\ (x^2+y^2)^2+x^2y^2=20 \end{cases}$$

Вычтем из второго ур-я системы первое и получим:

$$(x^2+y^2)^2-\frac{4}{x^2+y^2}=15$$

Пусть $x^2+y^2=t$. Тогда

$$t^2-\frac{4}{t}=15$$

$$t^3-4-15t=0$$

$$t^3-4t^2+4t^2-16t+t-4=0$$

$$t^2(t-4)+4t(t-4)+(t-4)=0$$

$$(t-4)(t^2+4t+1)=0 \qquad (\mathrm{I})$$

Т.к. $x^2+y^2\geq 0$, то и $t\geq 0$. А значит $t^2+4t+1>0$. Поделим обе части I на t^2+4t+1 и получим:

$t-4=0.$

$t=4.$

$x^2+y^2=4 \Rightarrow x^2=4-y^2$

$x^2y^2=5-\frac{4}{x^2+y^2}=5-\frac{4}{4}=4.$

Чистовик

④ (окончание)

$x^2 y^2 = 4$

$(4-y^2)y^2 = 4$

$-y^4+4y^2-4=0$

$y^4-4y^2+4=0$

$(y^2-2)^2=0$

$y^2=2$

$x^2=4-y^2=4-2=2.$

При $x^2=y^2=2$ система верна $\left(\frac{4}{x^2+y^2}+x^2y^2=\frac{4}{2+2}+2\cdot2=5,\right.$ $\left.x^4+y^4+3x^2y^2=2^2+2^2+3\cdot2\cdot2=20\right)$. А решений всего 4. Это $(\sqrt2;\sqrt2)$, $(\sqrt2;-\sqrt2)$, $(-\sqrt2;\sqrt2)$, $(-\sqrt2;-\sqrt2)$

<u>Ответ:</u> $(\sqrt2;\sqrt2)$, $(\sqrt2;-\sqrt2)$, $(-\sqrt2;\sqrt2)$, $(-\sqrt2;-\sqrt2)$.

Чистовик

5. (начало)

Для начала заметим, что прямые $y = x$ и $y = 65 - x$ содержат диагонали нашего квадрата, т.к. $y = x$ проходит через $(0;0)$ и $(65;65)$, а $y = 65 - x$ проходит через $(65;0)$ и $(0;65)$. Значит, нам нужно выбрать 2 узла, находящихся строго внутри квадрата, таких, что хотя бы 1 из них лежит на диагонали квадрата и оба узла не лежат на прямой, ~~прямой~~ параллельной оси координат (какой-то оси, или абсцисс, или ординат).

Рассмотрим сначала случай, когда оба узла лежат на одной диагонали. ~~диагоналях~~. На каждой диагонали 64 ~~узлов~~ подходящие точки (подходящими будем называть точки с целыми координатами, лежащие строго внутри квадрата), причём нет подходящей точки, которая лежала бы на обеих диагоналях сразу. Если оба узла лежат на диагонали, ~~находящейся~~ содержащейся в $y = x$, то всего вариантов выбрать 2 из них $\frac{64 \cdot 63}{2}$, причём прямая, проходящая через них точно не параллельна осям. Для второй диагонали столько же вариантов. Всего в этом случае $\frac{64 \cdot 63}{2} \cdot 2 = 64 \cdot 63$ вариантов.

Теперь рассмотрим случай, когда узлы лежат на разных диагоналях. Для узла на диагонали $y = x$ 64 варианта. А для другого узла их уже 62, т.к. мы убираем 2 узла, лежащих на прямых, проходящих через 1 узел и параллельных осям. Всего $64 \cdot 62$ вариантов.

Наконец, рассмотрим случай, когда ровно один узел лежит на диагонали. У этого узла 128 вариантов, т.к. подходящих точек на диагоналях именно столько.

(5) (окончание)

Второй узел не должен лежать на диагоналях и на прямых, проходящих через 1 узел и параллельных какой-то оси. На диагоналях и на указанных прямых по 64 подходящие точки, однако 1 диагональ, на которой 1 узел, имеет общую подходящую точку с теми прямыми, параллельными осям и проходящими через 1 узел, (это тот самый 1 узел), а прямые, параллельные осям, имеют общую точку с диагональю, не проходящей через 1 узел (~~это~~ это 2 разные точки). Поэтому всего неподходящих, запрещённых подходящих точек для второго узла $4 \cdot 64 - 2 - 2 = 4 \cdot 63$

3 раза посчитали 1 узел; 2 раза пересечения параллельных и диагонали

А всего точек внутри квадрата 64^2. Получается, что у второго узла $64^2 - 4 \cdot 63$ вариантов. Всего в этом случае $128(64^2 - 4 \cdot 63)$ вариантов.

Итого вариантов:

$$64 \cdot 63 + 64 \cdot 62 + 128(64^2 - 4 \cdot 63) = 64(63 + 62 + 2(64^2 - 4 \cdot 63)) =$$
$$= 64(63 + 63 - 1 + 2 \cdot 64^2 - 8 \cdot 63) = 64(2 \cdot 64^2 - 6 \cdot 63 - 1) =$$
$$= 2 \cdot 64^3 - 6 \cdot 64 \cdot 63 - 64.$$

__Ответ:__ $2 \cdot 64^3 - 6 \cdot 64 \cdot 63 - 64$.

Черновик

4

это действительно решения. В четвёрке решений
$(\pm\sqrt{2-\sqrt{3}}\,;\pm\sqrt{2+\sqrt{3}})$ $x^2=2-\sqrt{3}$, $y^2=2+\sqrt{3}$, а потому:

$x^2+y^2=2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}=4$, $x^2y^2=(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=4-3=1$.

$\frac{4}{x^2+y^2}+x^2y^2=\underline{4}$

Черновик

4. (Продолжение)

$(4-y^2)y^2=1$

$-y^4+4y^2-1=0$

$y^4-4y^2+1=0$

Пусть $y^2=s$

$s^2-4s+1=0$

$D=(-4)^2-4\cdot1\cdot1=16-4=12=(2\sqrt3)^2$

$$\left[\begin{array}{l} s=\frac{4+2\sqrt3}{2} \\ s=\frac{4-2\sqrt3}{2} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} s=2+\sqrt3 \\ s=2-\sqrt3 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} y^2=2+\sqrt3 \\ y^2=2-\sqrt3 \end{array}\right.$$

Т.к. $2=\sqrt4>\sqrt3$, то оба варианта возможны.

$$\left[\begin{array}{l} y=\pm\sqrt{2+\sqrt3} \\ y=\pm\sqrt{2-\sqrt3}. \end{array}\right.$$

Числа $2+\sqrt3$ и $2-\sqrt3$ взаимно обратные $(2+\sqrt3)(2-\sqrt3)=$ $=2^2-(\sqrt3)^2=4-3=1)$. Значит, если $y^2=2+\sqrt3$, то $x^2=2-\sqrt3$, а если $y^2=2-\sqrt3$, то $x^2=2+\sqrt3$. $x^2=2-\sqrt3 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2-\sqrt3}$, $x^2=2+\sqrt3 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2+\sqrt3}$.

Получаем 8 решений: $(\pm\sqrt{2-\sqrt3};\pm\sqrt{2+\sqrt3})$ (в любом „±" можно выбрать независимо любой знак, всего $2\cdot2=4$ варианта) и $(\pm\sqrt{2+\sqrt3};\pm\sqrt{2-\sqrt3})$ (с „±" тоже самое). Проверим, что

6.

Черновик

$(4-x^2)x^2=1$

$\frac{4}{x^2+y^2}+x^2y^2=5$

$x^4-4x^2+1=0$

$x^4+y^4+3x^2y^2=20$

$x^2+y^2=4$

$x^2y^2=1$

$D=4^2-4=12$

$x^2+y^2=s$

$x^2y^2=t$

$s^2\geq 4t$

$\frac{4}{s}+t=5$

$t=$

$s=4$

$t=1$

$s^2+t=20$

$s^2-\frac{4}{s}=15$

4^2-4

$s^3-15s-4=0$

$\frac{-4\pm 2\sqrt{3}}{2}$

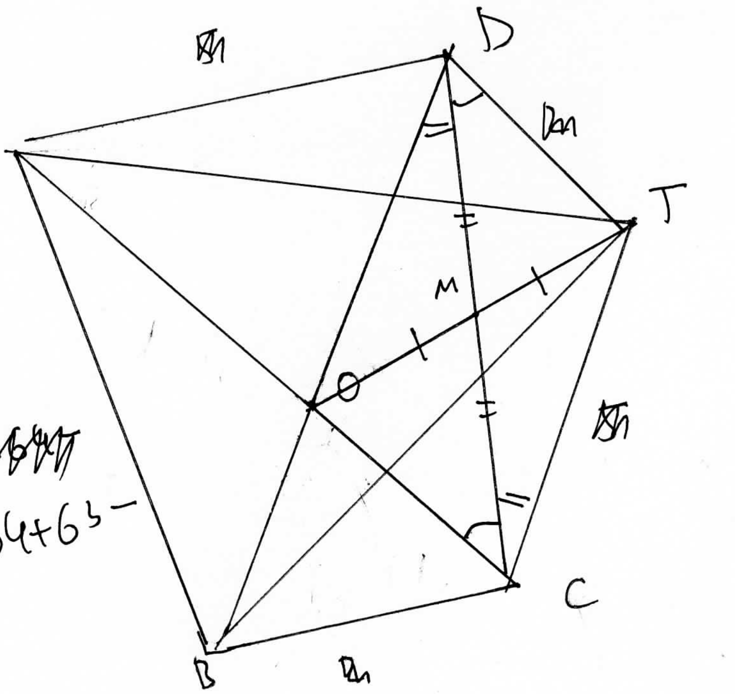
$-2\pm\sqrt{3}$

$64-$

$s^3-4s^2+4s^2-16s+s-4=0$

$(s^2+4s+1)(s-4)=0$

Черновик



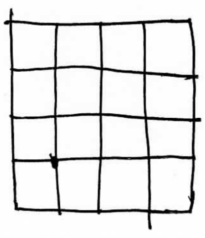
$64^2 - \cancel{\ldots}$

$64^2 - 64 + 63 -$

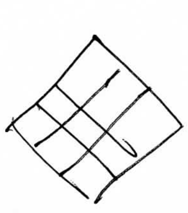
$2 \cdot \frac{64 \cdot 63}{2}$

$(a; b)$ $a \neq c$

$(c; d)$ $b \neq d$



$\left[\begin{array}{l} a+b=65 \\ a=b \\ c=d \\ c+d=65. \end{array}\right.$



Черновик

(5.) Для начала заметим, что прямые $y=x$ и $y=65-x$ содержат диагонали нашего квадрата, т.к. $y=x$ проходит через $(0;0)$ и $(65;65)$, а $y=65-x$ через $(0;65)$ и $(65;0)$. Получается, что нам нужно выбрать 2 узла сетки так, чтобы хотя бы 1 лежал на диагонали квадрата, оба узла не лежали ни на какой прямой, параллельной любой из осей координат и оба узла лежали строго внутри квадрата.

Рассмотрим 2 случая: когда оба узла лежат на диагоналях, и когда один лежит на диагонали, а другой - нет.

1 случай

Если оба узла лежат на диагонали, содержащейся в прямой $y=x$, то всего вариантов $\frac{64\cdot63}{2}$ (64 варианта для одного узла (столько узлов на диагонали всего), 63 для другого, делим на 2, чтобы убрать варианты, отличающиеся порядком узлов). Для второй диагонали столько же вариантов. Всего $\frac{64\cdot63}{2}\cdot2=64\cdot63$ вариантов.

2 случай. (Под узлами понимаем только те, которые лежат строго внутри квадрата)

Суммарно на обеих диагоналях $2\cdot64=128$ узлов. Это количество вариантов для узла на диагоналях. Второй узел должен лежать не на диагоналях и не на прямых, проходящих через первый узел, и параллельных осям координат. На каждой диагонали по 64 узла и на каждой ~~прямой~~ прямой, проходящей через первый узел и параллельной какой-то оси координат, 64 узла. Из 3 из этих прямых проходят через первый узел. Поэтому всего „запрещённых" вариантов

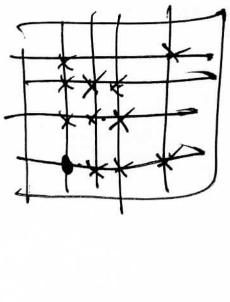
5. ~~[illegible]~~ Черновик

для второго узла 4·64 -

$8 \cdot 4.$

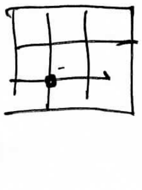
68

$\cancel{3128} + 8 + 12$



$4 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 8(4^2 - 4 \cdot 3)$

1



2

$2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot (2^2 - 4 \cdot 1)$