Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211007167**

ID профиля: **281556**

Вариант 11

Чистовик

№ 2

$$\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}\overset{+3}{\vee}=2\sqrt{6+x-x^2}$$

Огр. на x: $\begin{cases} x+2\geq0 \\ 3-x\geq0 \\ 6+x-x^2\geq0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq-2 \\ x\leq3 \\ 6+x-x^2\geq0 \end{cases}$

Разложим на множители $6+x-x^2$:

$6+x-x^2=0 \Leftrightarrow x^2-x-6=0 \rightarrow x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+6\cdot4}}{2}=\frac{1\pm5}{2}=3;-2$

$\Rightarrow x^2-x-6=(x-3)(x+2) \Rightarrow 6+x-x^2=(3-x)(x+2)$

Тогда получаем:

$$\underbrace{\sqrt{x+2}}_{a}-\underbrace{\sqrt{3-x}}_{b}-2\underbrace{\sqrt{(3-x)(x+2)}}_{a\cdot b}\overset{+3}{}=0$$

$a,b\geq0$, т.к. $\sqrt{x+2}$ и $\sqrt{3-x}\geq0$

$a-b-2ab+3=0$

Заметим, что $a^2=x+2$, $b^2=3-x$ $(x+2\geq0, -x+3\geq0) \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2+b^2=5$. Получаем $\begin{cases} a^2+b^2=5 \\ a-b-2ab+3=0 \; (1) \end{cases} \overset{+}{\Rightarrow} a^2-2ab+b^2+a-b+3=5$

$\Rightarrow (a-b)^2+(a-b)-2=0$ – кв. ур-е отн. $(a-b)$

$(a-b)=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm3}{2}=-2;1$ – подставим в ур-е 1:

$\left[\begin{array}{l} -2-2ab+3=0 \\ 1-2ab+3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2ab=1 \\ 2ab=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} ab=\frac{1}{2} \\ ab=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{6+x-x^2}=\frac{1}{2} \\ \sqrt{6+x-x^2}=2 \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 6+x-x^2=\frac{1}{4} \\ 6+x-x^2=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x-5{,}75=0 \\ x^2+x-2=0 \end{array}\right. \rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1+5{,}75\cdot4}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{24}}{2}=\frac{1\pm2\sqrt{6}}{2}$

Чистовик

$\sqrt{4} < \sqrt{6} < \sqrt{9} \Rightarrow 2 < \sqrt{6} < 3$

~~тогда~~ $\cancel{\frac{1-2\sqrt{6}}{2} < \frac{1-2\cdot 2}{2} < -\frac{3}{2}}$

$x^2+x-2=0 \Rightarrow x = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1\pm 3}{2} = -2;1 \Rightarrow$ эти корни подходят

$6+x-x^2 = -(x-3)(x+2) \geq 0$ при $x \in [-2;3]$

и $\begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq 3 \\ 6+x-x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq 3 \end{cases} \Rightarrow$ если $x+2 \geq 0$ и $3-x \geq 0$, то и $6+x-x^2 \geq 0$

Проверим корни $\frac{1+\sqrt{24}}{2}$ и $\frac{1-\sqrt{24}}{2}$:

$\frac{1+\sqrt{24}}{2}+2>0$; $\frac{1-\sqrt{24}}{2}+2 = \frac{5}{2}-\sqrt{6} = 2{,}5-\sqrt{6}$

$2{,}5 \times 2{,}5 = 6{,}25 > 6 \Rightarrow 2{,}5-\sqrt{6}>0$

$3-\frac{1+\sqrt{24}}{2} = \frac{5}{2}-\sqrt{6}>0$ Значит эти корни подходят

$3-\frac{1-\sqrt{24}}{2} = \frac{5}{2}+\sqrt{6}>0$

Ответ: $-2; 1; \frac{1-2\sqrt{6}}{2}; \frac{1+2\sqrt{6}}{2}$

$A(x_A, y_A)$ $\quad 5a^2+12ax+4ay+8x^2+8xy+4y^2=0$

$ax^2-2a^2x-ay+a^3+4=0$

$y-3x=4 \Leftrightarrow y=3x+4$

При $a=0$ получаем: $0\cdot x^2-2\cdot 0\cdot x-0\cdot y+0+4=0 \Leftrightarrow 4=0$ – противоречие

$\Rightarrow a\neq 0$

Тогда $ax^2-2a^2x+a^3+4=ay \Rightarrow y=x^2-2ax+a^2+\frac{4}{a}$

Вершина параболы находится в т.B с координатой $x_B=\frac{2a}{2}=a$

$y_B=a^2-2a^2+a^2+\frac{4}{a}=\frac{4}{a}$, т.е. $B\left(a;\frac{4}{a}\right)$

~~1-й случай~~ 1-й случай: т. A выше прямой $y=3x+4$, а т. B ниже

т. B ниже: $y=3a+4<\frac{4}{a} \Leftrightarrow 3a+4-\frac{4}{a}<0 \Leftrightarrow \frac{3a^2+4a-4}{a}<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (3a^2+4a-4)a<0$ – решаем методом интервалов

$3a^2+4a-4=0 \Rightarrow a=\frac{-4\pm\sqrt{16+4\cdot4\cdot3}}{6}=\frac{-4\pm\sqrt{16+48}}{6}=\frac{-4\pm\sqrt{64}}{6}=$

$=\frac{-4\pm 8}{6}=-\frac{12}{6};\ \frac{4}{6}=-2;\ \frac{2}{3} \Rightarrow 3a^2+4a-4=3(a+2)\left(a-\frac{2}{3}\right)$

$-\quad (-2) \quad +\quad (0)\quad -\quad \left(\frac{2}{3}\right)\quad +\quad a$ $\Rightarrow a\in(-\infty;-2)\cup\left(0;\frac{2}{3}\right)$

при таких a т. B ниже прямой $y=3x+4$

Соответственно, при $a\in(-2;0)\cup\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$ т. B лежит выше прямой $y=3x+4$

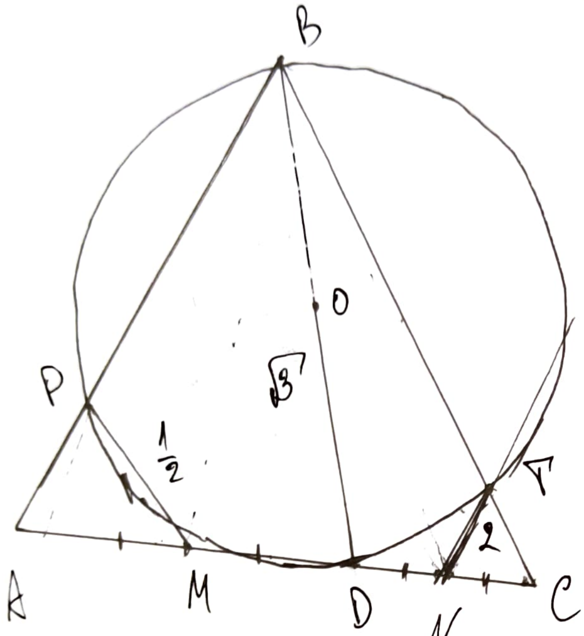
Чистовик

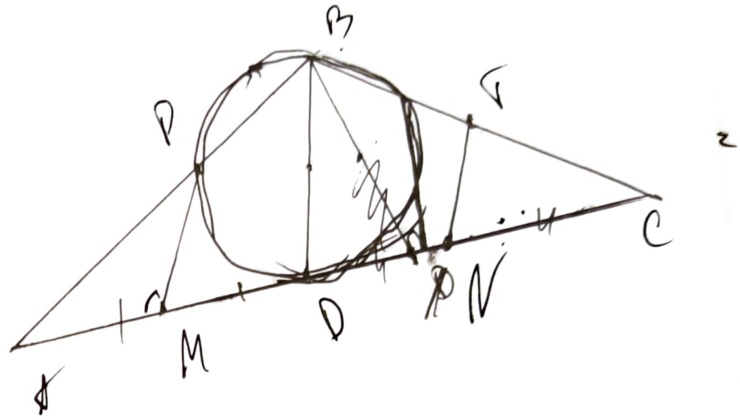
$\triangle ABC$, $D \in AC$

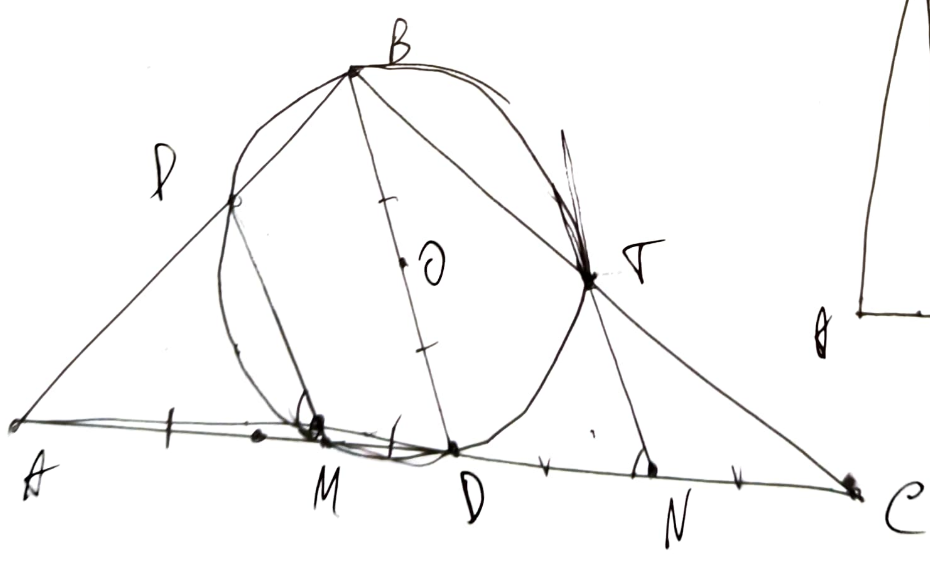
$PM \parallel NT$

$AM = MD$

$DN = NC$







$\triangle ABC$, $D \in AC$, BD - диам $\cap AB = P$, $BC = T$

Черновик

M и N - сер. AD и CD, $PM \parallel TN$

а) $\angle ABC = ?$

б) $MP = \frac{1}{2}$, $NT = 2$, $BD = \sqrt{3}$, $S_{ABC} = ?$

$\cancel{8x^2 + 12ax}$

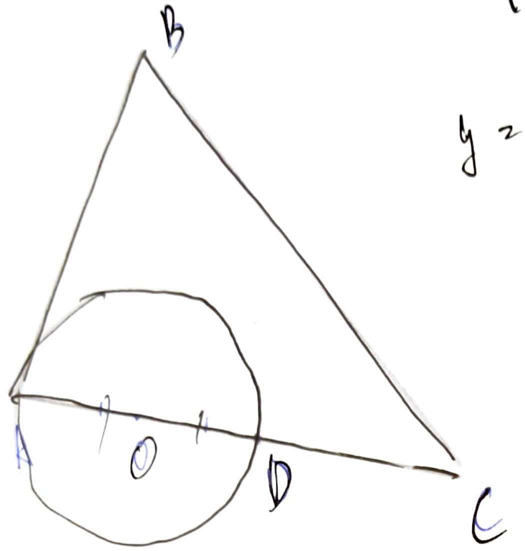
$4y^2 + y(8x + 4a) + 8x^2 + 12ax + 5a^2 = 0$

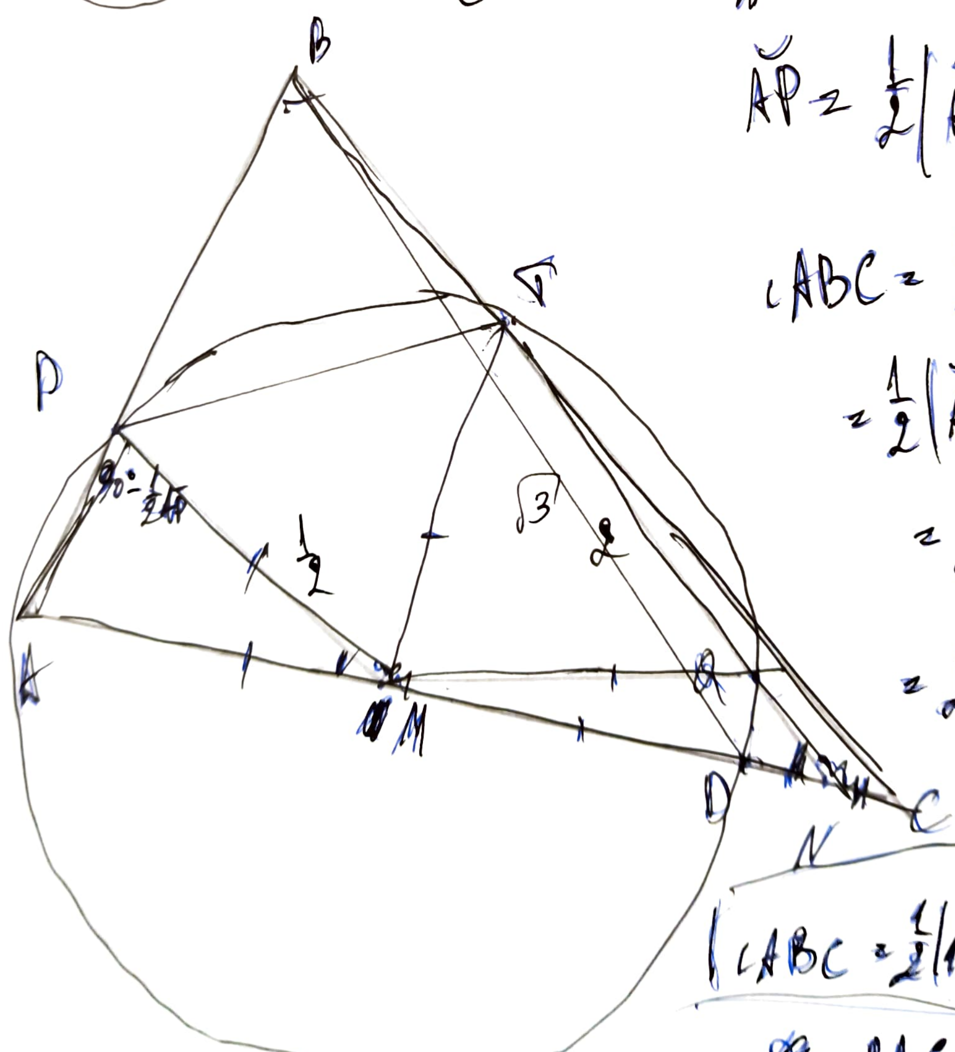
$y = \frac{-(8x+4a) \pm}{}$

$64x^2 + 64xa + 16a^2 - 32x^2 - 48ax - 20a^2 =$

$= 32x^2 + 16ax - 4a^2$

$\breve{AQ} = 180° - \breve{QD}$





$\breve{AP} = \frac{1}{2}(\breve{AT} - \breve{QD})$

$\angle ABC = \frac{1}{2}(\breve{AQ} - \breve{PT})$

$= \frac{1}{2}(\breve{AP} + \breve{PT} + \breve{TQ} - \breve{PT})$

$= \frac{1}{2}(\breve{AP} + \breve{TQ}) =$

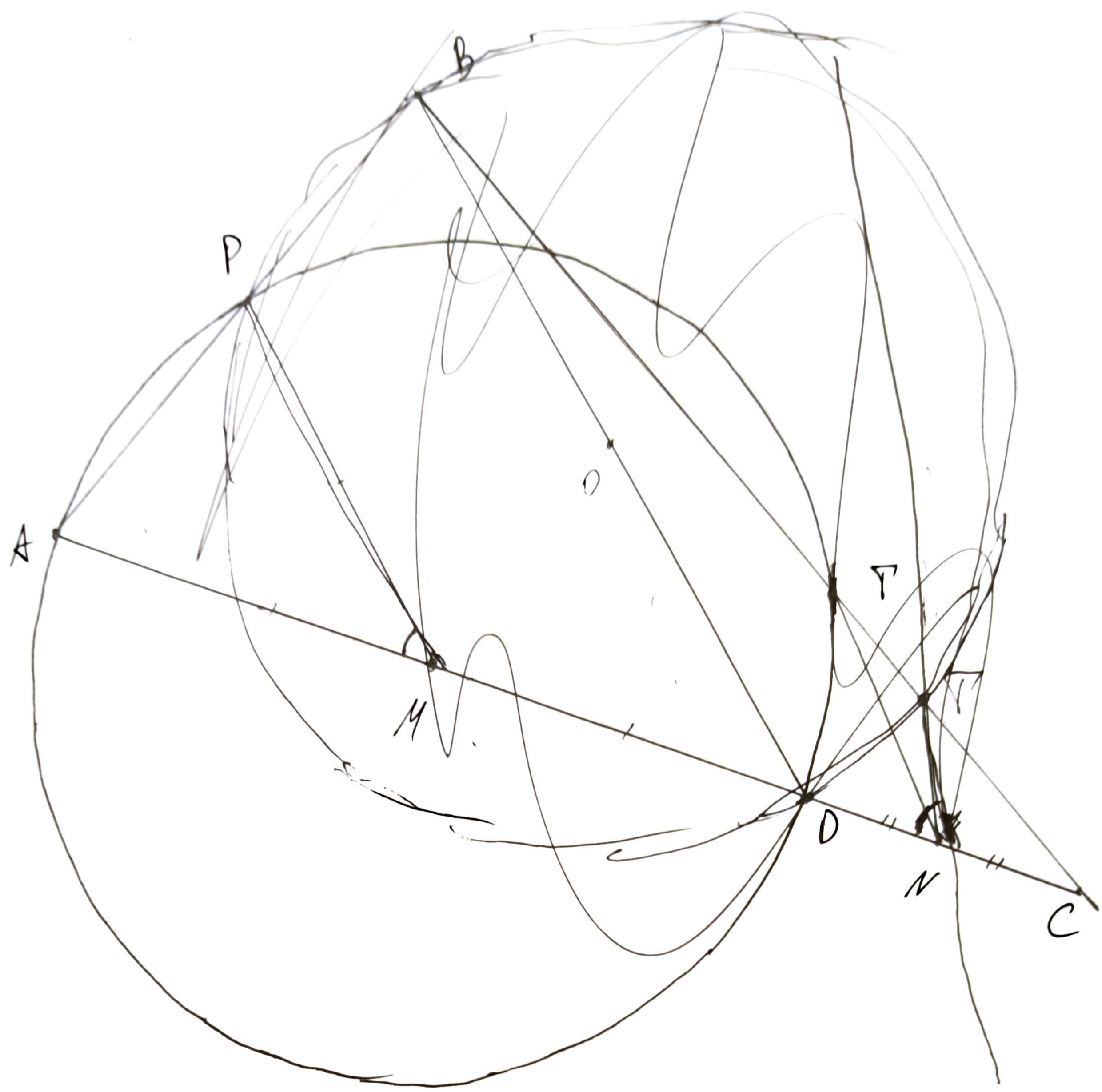
$= \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\breve{AT} - \frac{1}{2}\breve{QD} + \breve{TQ})$

$=$

$\boxed{\angle ABC = \frac{1}{2}(180° - \breve{QD} - \breve{PT})}$

$\angle BAC = \frac{1}{2}\breve{PD} = \frac{1}{2}(180° - \breve{AP})$

$= 90° - \frac{1}{2}\breve{AP}$



B
P
O
A
Γ
M
D
N
C

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211007167**

ID профиля: **281556**

Вариант 11

стр. 1 Чистовик

$$\begin{cases} \dfrac{4}{x^2+y^2} + x^2 \cdot y^2 = 5 \\ x^4+y^4+3x^2y^2 = 20 \end{cases}$$

Замена $a = x^2,\ b = y^2 \Rightarrow a;b \geq 0$

$$\begin{cases} \dfrac{4}{a+b} + ab = 5 \\ a^2+b^2+3ab = 20 \end{cases} \Rightarrow$$

$a \neq -b$, т.к. $a,b \geq 0$, то $a = -b$ только если $a = 0$ и $b = 0$, но эта пара не является решением системы. $\Rightarrow a+b \neq 0$
$(0^2+0^2+3\cdot 0\cdot 0 = 0 \neq 20)$

$$a^2+b^2+3ab = a^2+2ab+b^2+ab = (a+b)^2+ab = 20$$

Замена $a+b = p$, $ab = q$:

$$\begin{cases} \dfrac{4}{p} + q = 5 \\ p^2+q = 20 \end{cases} \Rightarrow p^2 - \frac{4}{p} = 15 \Leftrightarrow p^3-15p-4 = 0 \text{ (т.к. } p = a+b \neq 0)$$

$p = 4$ является решением $(4^3-15\cdot 4-4 = 64-60-4 = 0) \Rightarrow$

$\Rightarrow p^3-15p-4 \ \vdots\ p-4$

$$\begin{array}{l|l} p^3-15p-4 & p-4 \\ \hline -\ p^3-4p^2 & p^2+4p+1 \\ \quad 4p^2-15p-4 & \\ \quad -\ 4p^2-16p & \\ \qquad p-4 & \\ \qquad -\ p-4 & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

т.е. $p^3-15p-4 = (p-4)(p^2+4p+1)$

$$p^3-15p-4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} p-4 = 0 \\ p^2+4p+1 = 0 \end{array}\right.$$

$$p^2+4p+1 = 0 \Rightarrow p = \frac{-4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{2} =$$

$= -2 \pm \sqrt{3}$; $-2-\sqrt{3} < 0$, но $p = a+b \geq 0 \Rightarrow$ этот корень не подходит

$-2+\sqrt{3} < 0$ $(\sqrt{3} < \sqrt{4}) \Rightarrow$ этот корень тоже не подходит

$\Rightarrow p = 4 \rightarrow q = 20-p^2 = 20-16 = 4$ или $\begin{cases} a+b = 4 \rightarrow a = 4-b \\ ab = 4 \end{cases}$

$\Rightarrow (4-b)b = 4 \Leftrightarrow 4b-b^2 = 4 \Rightarrow b^2-4b+4 = 0 = (b-2)^2 \rightarrow b = 2$

$a = 4-2 = 2$

стр. 2

Возвращаясь к старым переменным, получаем:

$2 = x^2,\ 2 = y^2 \longrightarrow x = \pm 2,\ y = \pm 2$

Ответ: $(x;y) = (2;2), (2;-2), (-2;2), (-2;-2)$

решения системы

Чистовик

стр. 4 Чистовик

$S_{ABCD} = \frac{BC+AD}{2} \cdot HH_1 = \frac{5+2}{2} \cdot \frac{7}{2}\sqrt{3} = \frac{49\sqrt{3}}{4}$

$BГ = AГ = AB = \sqrt{39}$ и $\angle ABГ = \angle BГA = \angle BAГ = 60°$

~~$S_{ABГ}$~~ $\triangle ABГ$ - правильный $\Rightarrow$

$S_{ABГ} = \frac{1}{2} AB \cdot AГ \cdot \sin\angle BAГ = \frac{1}{2} \cdot 39 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{39\sqrt{3}}{4}$

Тогда $S_{ABГ} : S_{ABCD} = 39 : 49$

Ответ: б) 39 : 49

Докажем, что $\triangle ABГ$ - правильный

K - сер. CD

Проведём CГ и ГD. Рассмотрим $\triangle COK$ ($OГ \cap CD = K$) и $\triangle KГD$:

$KD = CK$, $OK = KГ$ (т.к. симметрия) $\angle CKO = \angle DKГ$ (вертик) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle COK = \triangle KГD \Rightarrow CO = DГ$

Рассмотрим $\triangle OKD$ и $\triangle CKГ$: $OK = KГ$, $KD = CK$, $\angle OKD = \angle CKГ$ (вертик)

$\Rightarrow \triangle OKD = \triangle CKГ \rightarrow CГ = OD$

Рассмотрим $\triangle COD$ и $\triangle CГD$: CD - общ, $CГ = OD$, $ГD = CO \rightarrow$

$\Rightarrow \triangle COD = \triangle CГD \rightarrow \angle CГD = \angle COD = 120°$

В OCГD $OC = DГ$, $CГ = OD \rightarrow$ OCГD - параллелограмм $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle OCГ = 180° - \angle COD = 60° \Rightarrow \angle BCГ = \angle BCO + \angle OCГ = 120°$

($BC = a$, $CГ = b$) По т. косинусов: $BГ = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cdot\cos 120°} = AB$

Так же в OCГD $\angle ODГ = 60° \Rightarrow \angle ADГ = \angle ADO + \angle ODГ = 120°$

($AD = b$, $DГ = a$) $\rightarrow AГ = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cdot\cos 120°} = BГ = AB \rightarrow$

$\rightarrow \triangle ABГ$ - правильный

Ответ: а) ч.т.д.

стр. 5 Чистовик

Всего узлов не на границе:

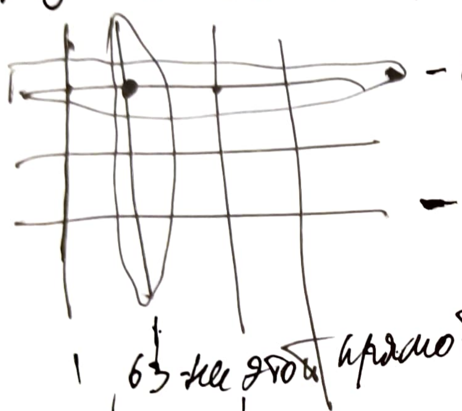
$(65-1)(65-1)=64^2$

Прямые $y=x$ и $y=65-x$ проходят через точки

$(0;0),(65;65)$ $(0;65),(65;0)$ → являются диагоналями

квадрата. На диагонале лежат 64 узла (не на границе)

Для любого узла существует $63\cdot 2=126$ других узлов таких, что через эту пару проходит прямая ∥ какой-то оси координат.



→ Узлов с которыми можно составить пару остается

$\underset{\text{выбр. узел}}{64^2-1}-63\cdot 2=(64-1)(64+1)-63\cdot 2=63\cdot 65-63\cdot 2=63(65-2)=63^2$

т.е. с каждым из 64 узлов на одной диагонали можно составить 63^2 пар → всего пар $64\cdot 63^2\cdot 2$

($\cdot 2$, т.к. две диагонали). Но в этом числе узлы лежащие на диагоналях считаются 2 раза.

Между узлами на диаг можно составить по $64\cdot(64-2)=64\cdot 62$

т.к. 2 узла на диаг. будут лежать с др. узлом на одной гор-й или вертик-й прямой.

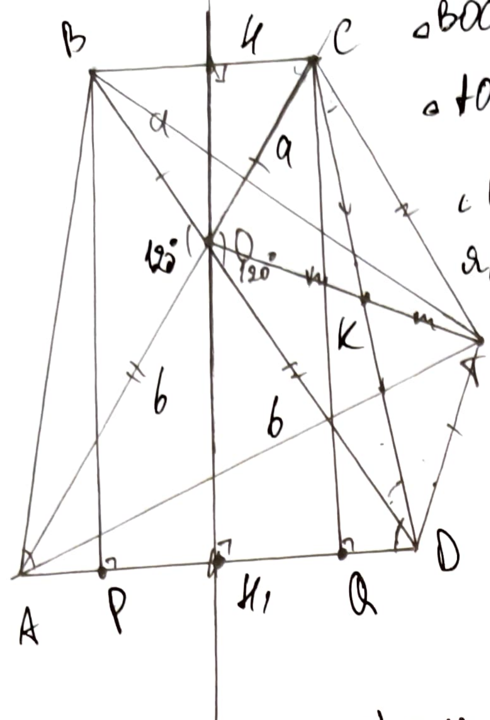
Тогда всего пар (без повторений):

$64\cdot 63^2\cdot 2-64\cdot 62=64(63^2\cdot 2-62)=$

$=64(7938-2)=64\cdot 7936=\underline{507904}$

(Узла ∈ обоим диагоналям нет, т.к. они пересекаются в т. X_0: $X_0=65-X_0$ → $X_0=\frac{65}{2}$, а узлы находятся в целых точках)

стр. 3 Чистовик



Т.к. $\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ - прав, то

$\triangle BOC$: $BO = OC = BC$, $\angle BOC = \angle BCO = \angle CBO = 60°$

$\triangle AOD$: $AO = OD = AD$, $\angle AOD = \angle ODA = \angle DAO = 60°$

$\angle BCO = \angle OAD = 60°$ - но эти углы являются накр. леж. при BC, AD и секущей $AC \Rightarrow BC \parallel AD \Rightarrow$
$\Rightarrow ABCD$ - трапеция

Т.к. $\angle BOC = 60°$, то $\angle BOA = \angle COD = 180° - 60° = 120°$ (смеж.)

Обозначим BC, BO, OC за a; AO, OD, AD за b.

$\triangle BOA = \triangle COD$ ($\angle BOA = \angle COD$, $BO = OC$, $AO = OD$) $\Rightarrow AB = CD$

По т. косинусов: $AB^2 = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos 120°} = CD^2 \Rightarrow AB = CD$

Проведём $OH \perp BC$ в $\triangle BOC$ и $OH_1 \perp AD$ в $\triangle AOD$. Т.к. $BC \parallel AD$, а $OH \perp BC$ и $OH_1 \perp AD$, то $OH \parallel OH_1$, но $OH \cap OH_1 = O \Rightarrow H, O, H_1$ лежат на одной прямой $\Rightarrow HH_1$ - высота трап-ии $ABCD$.

$OH = \cancel{DO} = BO \cdot \sin 60° = BC \cdot \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}a = \sqrt{3} \Rightarrow HH_1 = OH + OH_1 = \frac{7}{2}\sqrt{3} = h$

$OH_1 = AO \cdot \sin 60° = AD \cdot \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}b = \frac{5}{2}\sqrt{3}$

Проведём высоты BP и CQ ($BP = CQ = HH_1$ как выс. трапеции)

Рассмотрим $\triangle ABP$ и $\triangle CQD$: $\angle APB = 90° = \angle CQD$, $AB = CD$, $\angle BAP = \angle CDQ$ (т.к. $AB = CD$, то трапеция $ABCD$ равнобедренная) $\Rightarrow \triangle ABP = \triangle CQD \Rightarrow$
$\Rightarrow AP = QD = x$. В $\cancel{A}$ $BPCQ$ $BP = CQ$ и $BP \perp \cancel{AB}$ PQ, BC и $CQ \perp BC, PQ \Rightarrow$
$\Rightarrow BPCQ$ - прямоуг $\Rightarrow PQ = BC = AD - AP - QD = 2 = 5 - 2x \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \frac{3}{2}$.

По т. Пифагора: $AB = CD = \sqrt{h^2 + x^2} = \sqrt{\frac{49}{4} \cdot 3 + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}(49 + 3)} =$
$= \sqrt{\frac{3}{4} \cdot 52} = \sqrt{3 \cdot 13} = \sqrt{39}$

$\frac{4}{x} + y = 5$

$x^2 + y = 20$

$\Rightarrow x^2 - \frac{4}{x} = 15$

$x^3 - 15x - 4 = 0$

$\pm 1; \pm 2; \pm 4$

$64 - 60 - 4 = 0$

$(5-y)(20-y) = 4x$

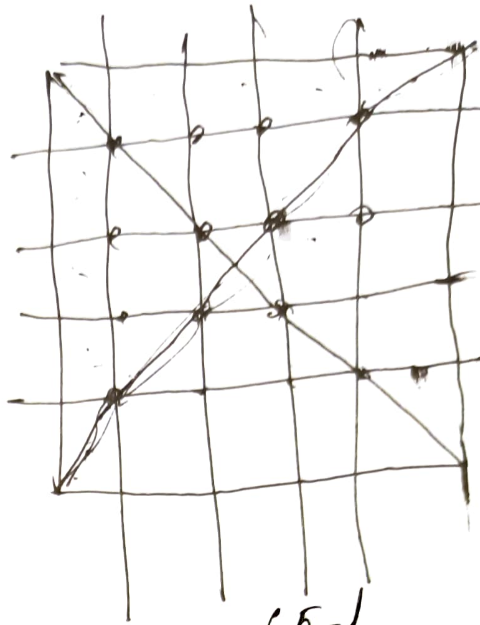
$8 - \cancel{30 - 4}$

$-8 + \cancel{30} - 4$

$-27 + 45 - 4$

$\cancel{-64 + 60 - 4}$

$\cancel{-125 + 75 - 4}$



65-1

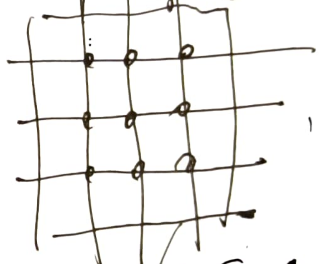
$\frac{4}{a+b} + ab = 5$

$(a+b)^2 + ab = 20$

$$\begin{array}{l|l} p^3 - 15p - 4 & p - 4 \\ \hline p^3 - 4p^2 & p^2 - 11 \\ \hline 4p^2 - 11p - 4 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6{,}3 \\ \times\, 6{,}3 \\ \hline 189 \\ 378 \\ \hline 39{,}69 \end{array}$$

ABCD - трапеция

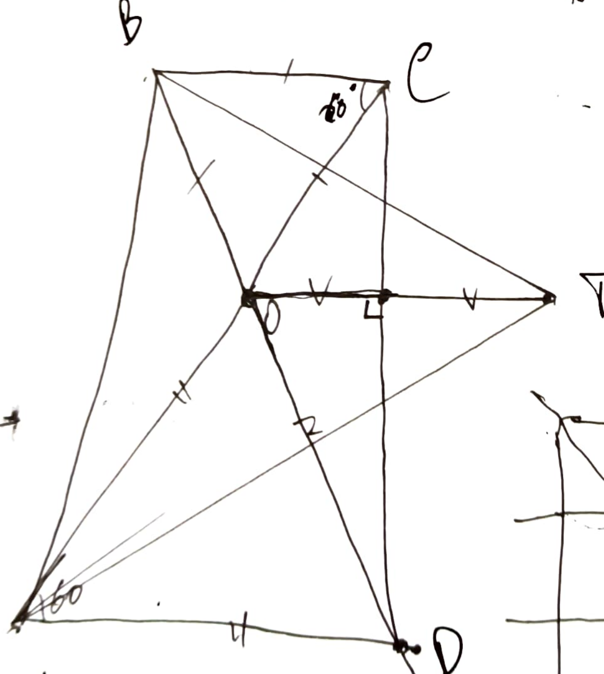


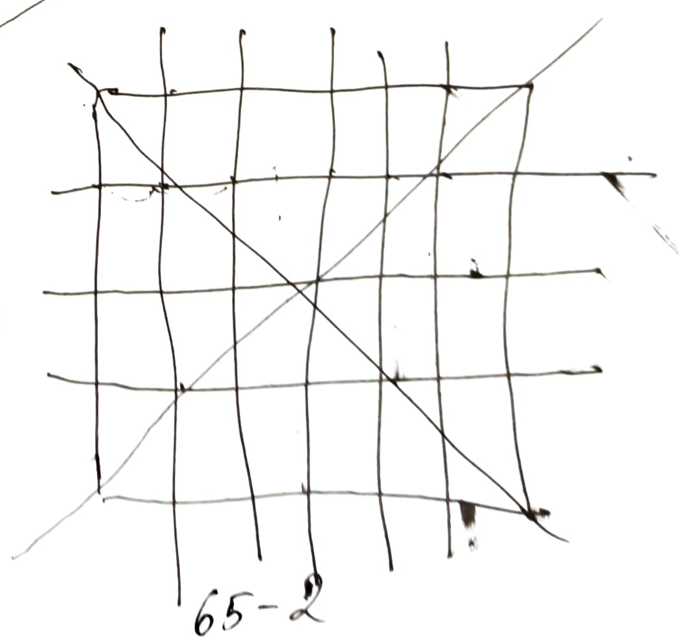
$(65 - 2 + 1) \cdot (65 - 2 + 1)$

$$\begin{array}{r} 39{,}69 \\ \times\, 2 \\ \hline 79{,}38 \end{array}$$

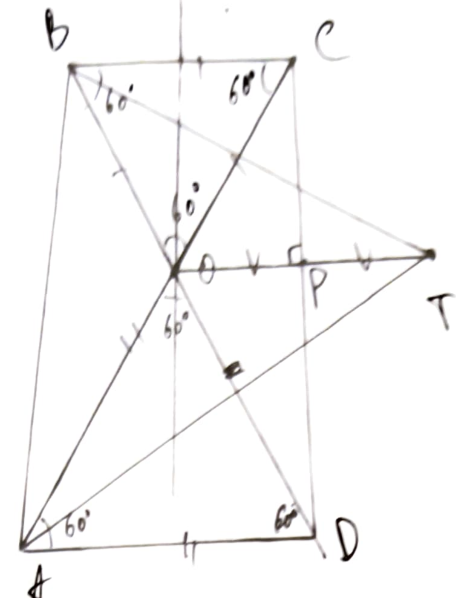
$$\begin{array}{r} 79{,}36 \\ \times\, 64 \\ \hline 317{,}44 \\ 4761{,}60 \\ \hline 5079{,}04 \end{array}$$

64





65-2



$BC = 2,\ AD = 5$

$S_{ABT} : S_{ABCD}$

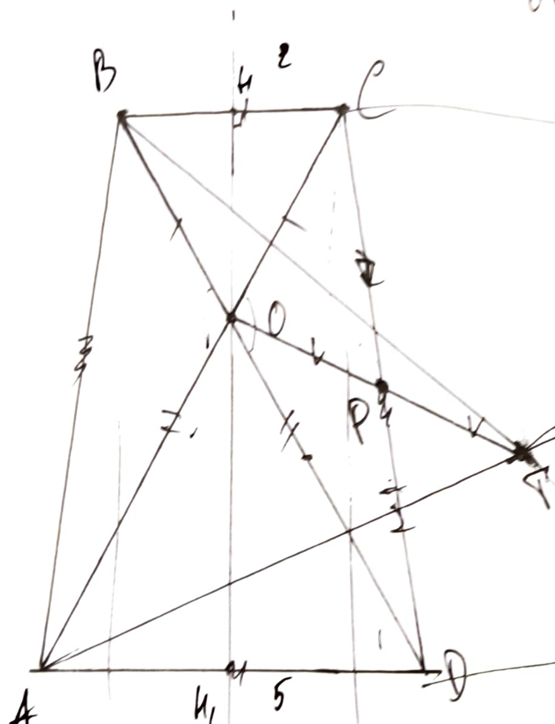
$\cancel{OH = \frac{1}{2} BC}$

$OH = BC \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3}$

$OH_1 = AD \cdot \sin 60^\circ = \frac{5}{2}\sqrt{3}$

$HH_1 = \sqrt{3}\left(1 + \frac{5}{2}\right) = \frac{7}{2}\sqrt{3}$

$S_{ABCD} = \frac{2+5}{2} \cdot \frac{7}{2}\sqrt{3} = \frac{49\sqrt{3}}{4}$



$2x = 5 - 2 = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

$AB = \sqrt{x^2 + h^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{49 \cdot 3}{4}} = \sqrt{\frac{3(3+49)}{4}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 52}{4}} =$

$= \sqrt{\frac{3 \cdot 13 \cdot 4}{4}} = \sqrt{39}$, $\quad S_{ABT} = \frac{1}{2} \cdot BT \cdot AT \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 39 =$

$= \frac{39}{4}\sqrt{3} \Rightarrow S_{ABT} : S_{ABCD} = \frac{39}{4}\sqrt{3} \cdot \frac{4}{49\sqrt{3}} = \frac{39}{49}$