Часть 1

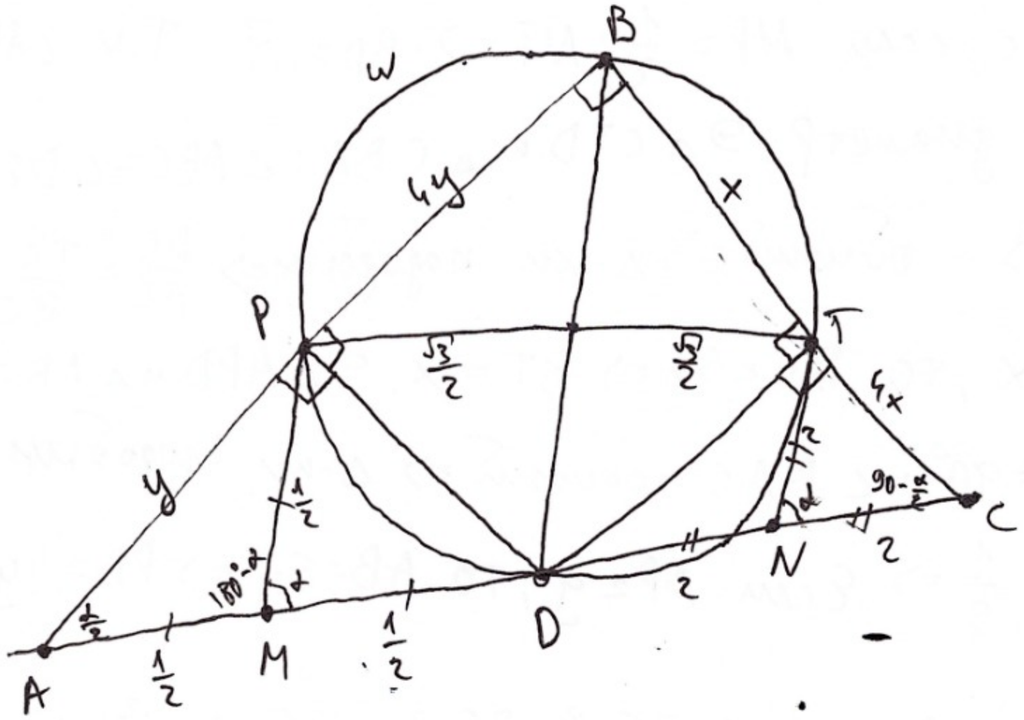
Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211007107**

ID профиля: **208273**

Вариант 11

Лист 1 Задача 1 Чистовик



Дано: $\triangle ABC$; $D \in AC$; окр. с диаметром BD пересекает AB в P и BC в T; M – середина AD; N – середина CD; $PM \parallel TN$.

а) Найти: $\angle ABC$.

Решение: Заметим, что $\angle BPD = \angle BTD = 90^\circ$ (т.к. вписанные углы опираются на диаметр BD, но тогда и смежные им $\angle APD = \angle DTC = 90^\circ$. Э $\triangle APD$: $\angle APD = 90^\circ$; PM – медиана => => $PM = AM = MD$ (по св-ву медианы в прямоугольном $\triangle$-ке, опущенной на гипотенузу). Аналогично, $TN = DN = NC$. Т.к. $PM \parallel TN$, то $\angle PMD = \angle TNC$ (пусть будет равен α). Тогда $\angle AMP = 180^\circ - \alpha$, но $\triangle APM$ равнобедренный => $\angle A = \angle P = \frac{180^\circ - \angle M}{2} = \frac{180^\circ - (180^\circ - \alpha)}{2} = \frac{\alpha}{2}$. Э $\triangle TNC$: $TN = NC$ => $\angle C = \angle T = \frac{180^\circ - \angle N}{2} = \frac{180^\circ - \alpha}{2}$

$=90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Рассм. $\triangle ABC$:

Лист 2 Продолж. задачи 1. Чистовик

$\angle ABC = 180^\circ - (\angle BAC + \angle ACB) = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - 90^\circ + \frac{\alpha}{2} = 90^\circ$.

б) Найти $S_{\triangle ABC}$, если $MP = \frac{1}{2}$; $NT = 2$; $BD = \sqrt{3}$. Т.к. $\angle ABC = 90^\circ \Rightarrow PT$ - диаметр. Рассм. $\triangle CTD$ и $\triangle CBA$: $\angle ABC = \angle DTC = 90^\circ$; $\angle ACB$ - общий $\Rightarrow$ $\triangle$-ки подобны $\Rightarrow \frac{DC}{AC} = \frac{TC}{BC} = \frac{4}{5}$ $\Rightarrow$ Если $TC = 4x$, то $BC = 5x \Rightarrow BT = x$. Рассм. $\triangle APD$ и $\triangle ABC$: $\angle APD = \angle ABC = 90^\circ$; $\angle BAC$ - общий $\Rightarrow$ $\triangle$-ки подобны $\Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AP}{AB} = \frac{1}{5} \Rightarrow$ Если $AP = y$, то $AB = 5y \Rightarrow PB = 4y$.

Рассм. $\triangle ABC$ ($\angle ABC = 90^\circ$): $AB^2 + BC^2 = AC^2 \Rightarrow 25y^2 + 25x^2 = 25 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$.

Рассм. $\triangle$ ~~ABC~~ PBT: $\angle ABC = 90^\circ \Rightarrow PB^2 + BT^2 = PT^2$ (PT - диаметр) $\Rightarrow$ $\Rightarrow 16y^2 + x^2 = 3$, но $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow 15y^2 + (x^2 + y^2) = 3 \Rightarrow$ $\Rightarrow 15y^2 = 2 \Rightarrow y^2 = \frac{2}{15}$; $x^2 = 1 - y^2 = \frac{15-2}{15} = \frac{13}{15}$. $y = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{15}}$ $x = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{15}}$. $S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{15}} \cdot \frac{5\sqrt{13}}{\sqrt{15}}}{2} = \frac{\cancel{25}^{5}\sqrt{26}}{\cancel{30}_{6}} =$

$= \frac{5\sqrt{26}}{6}$.

Ответ: а) $\angle ABC = 90^\circ$

211007107 (U208273,M1276268)

б) $S_{\triangle ABC} = \frac{5\sqrt{26}}{6}$.

Лист 3 Задача 2 Чистовик

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} + 3 = 2\sqrt{6+x-x^2}.$$

Заметим, что $(x+2)(3-x) = 6+x-x^2$.

$$\begin{cases} x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \\ 3-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3 \\ (3-x)(x+2) \geq 0 \text{ (выполн. автом. из-за первых двух.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

Пусть $t = \sqrt{x+2} \geq 0$, тогда $t^2 = x+2$; $5-t^2 = 3-x \Leftrightarrow$ $(5-t^2 \geq 0)$

$$\Rightarrow \sqrt{5-t^2} = \sqrt{3-x}$$

$$t - \sqrt{5-t^2} + 3 = 2t\sqrt{5-t^2}$$

$$t + 3 = \sqrt{5-t^2}(2t+1)$$ (т.к. $t \geq 0$, то обе части положительные, возводим в квадрат

$$t^2 + 6t + 9 = (5-t^2)(4t^2+4t+1)$$

$$t^2 + 6t + 9 = 20t^2 + 20t + 5 - 4t^4 - 4t^3 - t^2$$

$$4t^4 + 4t^3 - 18t^2 - 14t + 4 = 0 \quad |:2$$

$$2t^4 + 2t^3 - 9t^2 - 7t + 2 = 0$$

Заметим, что $t = 2$ корень

Лист 4 Продолжение задачи 2 ~~вин~~ Чистовик

$$\begin{array}{r|l} 2t^4+2t^3-9t^2-7t+2 & t-2 \\ 2t^4-4t^3 & 2t^3+6t^2+3t-1 \\ \hline 6t^3-9t^2-7t+2 & \\ 6t^3-12t^2 & \\ \hline 3t^2-7t+2 & \\ 3t^2-6t & \\ \hline -t+2 & \\ -t+2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$(t-2)(2t^3+6t^2+3t-1)=0$ (Заметим, что $t=-1$ подходит

$$\begin{array}{r|l} 2t^3+6t^2+3t-1 & t+1 \\ 2t^3+2t^2 & 2t^2+4t-1 \\ \hline 4t^2+3t-1 & \\ 4t^2+4t & \\ \hline -t-1 & \\ -t-1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$2t^2+4t-1=0$

$$t=\frac{-2\pm\sqrt{4+2}}{2}=\left[\begin{array}{l}\frac{-2-\sqrt{6}}{2}\\ \frac{-2+\sqrt{6}}{2}\end{array}\right.$$

В итоге имеем, что t может равнятся

2; -1; $\frac{-2-\sqrt{6}}{2}$; $\frac{-2+\sqrt{6}}{2}$, но $t\geq 0$ и $t^2\leq 5$

Лист 5 Продолжение задачи 2 Чистовик

Поэтому подходит лишь $t=2$ и $t=\frac{-2+\sqrt{6}}{2}$

$\left(\left(\frac{\sqrt{6}-2}{2}\right)^2 \leq 5\right.$, т.к. $\frac{10-4\sqrt{6}}{4} \leq 5$, т.к. $10-4\sqrt{6} \leq 20$, т.к. $\left.-10 \leq 4\sqrt{6}\right)$

$\left(\frac{\sqrt{6}-2}{2} \geq 0\right.$, т.к. $\sqrt{6} > 2$, т.к. $\left.6>4\right)$

$\sqrt{x+2} = 2$

$x+2=4$

$x=2$

(Подходит под ОДЗ)

$\sqrt{x+2} = \frac{\sqrt{6}-2}{2}$

$x+2 = \frac{10-4\sqrt{6}}{4}$

$4x+8 = 10-4\sqrt{6}$

$4x = 2-4\sqrt{6}$

$x = \frac{1}{2}-\sqrt{6}$ (очевидно ≤ 3)

$\Big(-2 \vee \frac{1}{2}-\sqrt{6}$

$\sqrt{6}-2 \vee \frac{1}{2}$

$2\sqrt{6}-4 \vee 1$

$2\sqrt{6} \vee 5$

$24 \vee 25$

$<$ (значит и $-2 < \frac{1}{2}-\sqrt{6}$

значит, подходит)

Ответ: $x=\left\{\frac{1}{2}-\sqrt{6};\, 2\right\}$.

Лист 6 Задача 3 Чистовик.

~~$ax^2 - 2a^2x - ay + a^3 + 4 = 0$~~

$5a^2 + 12ax + 4ay + 8x^2 + 8xy + 4y^2 = 0$

Т.к. A - это точка, то пусть $x = ka$; $y = da$, тогда

$5a^2 + 12a^2k + 4a^2d + 8a^2k^2 + 8a^2kd + 4a^2d^2 = 0$

$a^2(5 + 12k + 4d + 8k^2 + 8kd + 4d^2) = 0$ ($: a^2$, т.к. $a \neq 0$,

$8k^2 + 2k(4d+6) + 4d^2 + 4d + 5 = 0$ т.к. является старшим члена параболы)

$$k = \frac{-4d - 6 \pm \sqrt{16d^2 + 48d + 36 - 8(4d^2 + 4d + 5)}}{8} =$$

$$= \frac{-4d - 6 \pm \sqrt{-16d^2 + 16d - 4}}{8}$$, но заметим, что $\frac{D}{4} = \sqrt{-4(4d^2 ...}$

$= \sqrt{-4(2d-1)^2}$, но заметим, что ~~он всегда отрицател~~

~~кроме~~ $(2d-1)^2 \geq 0 \Rightarrow -4(2d-1)^2 \leq 0$, но если корней

нет, т.е. $\frac{D}{4} < 0$, то и точки A не существует, поэто.

Нам подходит только $-4(2d-1)^2 = 0 \Rightarrow d = \frac{1}{2}$, тогда

211007107 (U208273 M1276268)

$$K = \frac{-4d - 6 \pm \sqrt{0}}{8} = \frac{-2-6}{8} = -1$$

Лист 7 Задача 3 Чистовик Продолжение

Тогда точка A имеет координаты $A(-a; \frac{1}{2}a)$.

$ax^2 - 2a^2x - ay + a^3 + 4 = 0$

Вершина параболы ($x_в$) $= \frac{2a^2}{2a} = a$, чтобы найти $y_в$ подставим: $a^3 - 2a^3 - ay + a^3 + 4 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4 = ay$ $(a \neq 0) \Rightarrow y = \frac{4}{a}$. Т.е. $B(a; \frac{4}{a})$.

Прямая $y = 4 + 3x$ разделяет плоскость на две полуплоскости, т.е. либо $A_y > 4 + 3A_x$ и $B_y < 4 + 3B_x$, либо наоборот, т.е. имеем:

$$\left[\begin{array}{l} 1)\begin{cases} \frac{1}{2}a > 4 + (-3a) \mid \cdot 2 \quad a > 8 - 6a \Rightarrow a > \frac{8}{7} \\ \frac{4}{a} < 4 + 3a \mid \cdot a \ (\text{т.к. } a > \frac{8}{7}) \Rightarrow 4 < 4a + 3a^2 \Rightarrow 3a^2 + 4a - 4 > 0 \end{cases} \\ 2)\begin{cases} \frac{1}{2}a < 4 - 3a \mid \cdot 2 \quad a < \frac{8}{7} \\ \frac{4}{a} > 4 + 3a \end{cases} \end{array}\right.$$

$a = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{3} = \frac{-2 \pm 4}{3}$

$= \left[\begin{array}{l} \frac{2}{3} \\ -2 \end{array}\right.$ $+$ -2 $-$ $\frac{2}{3}$ $+$

$\Downarrow$

$a > \frac{8}{7}$ из 1-ой систем

2): $a > 0$: $\frac{4}{a} > 4 + 3a \mid \cdot a$

$4 > 4a + 3a^2$

-2 $\frac{2}{3}$

$a \in (0; \frac{2}{3})$

Лист 8 задача 3 Чистовик

$a<0$: $\frac{4}{a} > 4+3a \quad | \cdot a \ (<0)$

$4 < 4a + 3a^2$

$a \in (-\infty; -2)$

Ответ: $a \in (-\infty; -2) \cup (-2; \frac{2}{3}) \cup (\frac{8}{7}; +\infty)$.

$$ax^2 - 2a^2x - ay + a^3 + 4 = 0$$

$$\frac{8a^2}{8a} = a \qquad \cancel{a^3} \cancel{-2a} - ay + \cancel{a^3} + 4 = 0$$

$$4 = ay$$

$$y = \frac{4}{a}$$

$x = ka$
$y = da$

$$5a^2 + 12a^2k + 4a^2d + 8a^2k^2 + 8a^2kd + 4a^2d^2 = 0$$

$$a^2(5 + 12k + 4d + 8k^2 + 8kd + 4d^2) = 0$$

$$8k^2 + 2k\cdot(4d + 6) + (2d+1)^2 + 1 = 0$$

$$k = \frac{-4d - 6 \pm \sqrt{16d^2 + 48d + 36 - 8(4d^2 + 4d + 5)}}{8}$$

$$\cancel{16d^2} + \cancel{48d} + 36 \cancel{-32d^2} -$$
$$\cancel{-32d} - 40$$

$$-16d^2 + 16d - 4 =$$

$$= -4(4d^2 - 4d + 1)$$

$x = -a \qquad y = -3a$

$5a^2 + 12a^2 + 4ay + 8a^2 + 8ay + 4y^2$

$25a^2 + 12ay + 4y^2$

$25a^2 - 36a^2 + 36a^2$

$\angle ABC = ?$

$BD = \sqrt{3}$

$S_{ABC} = ?$

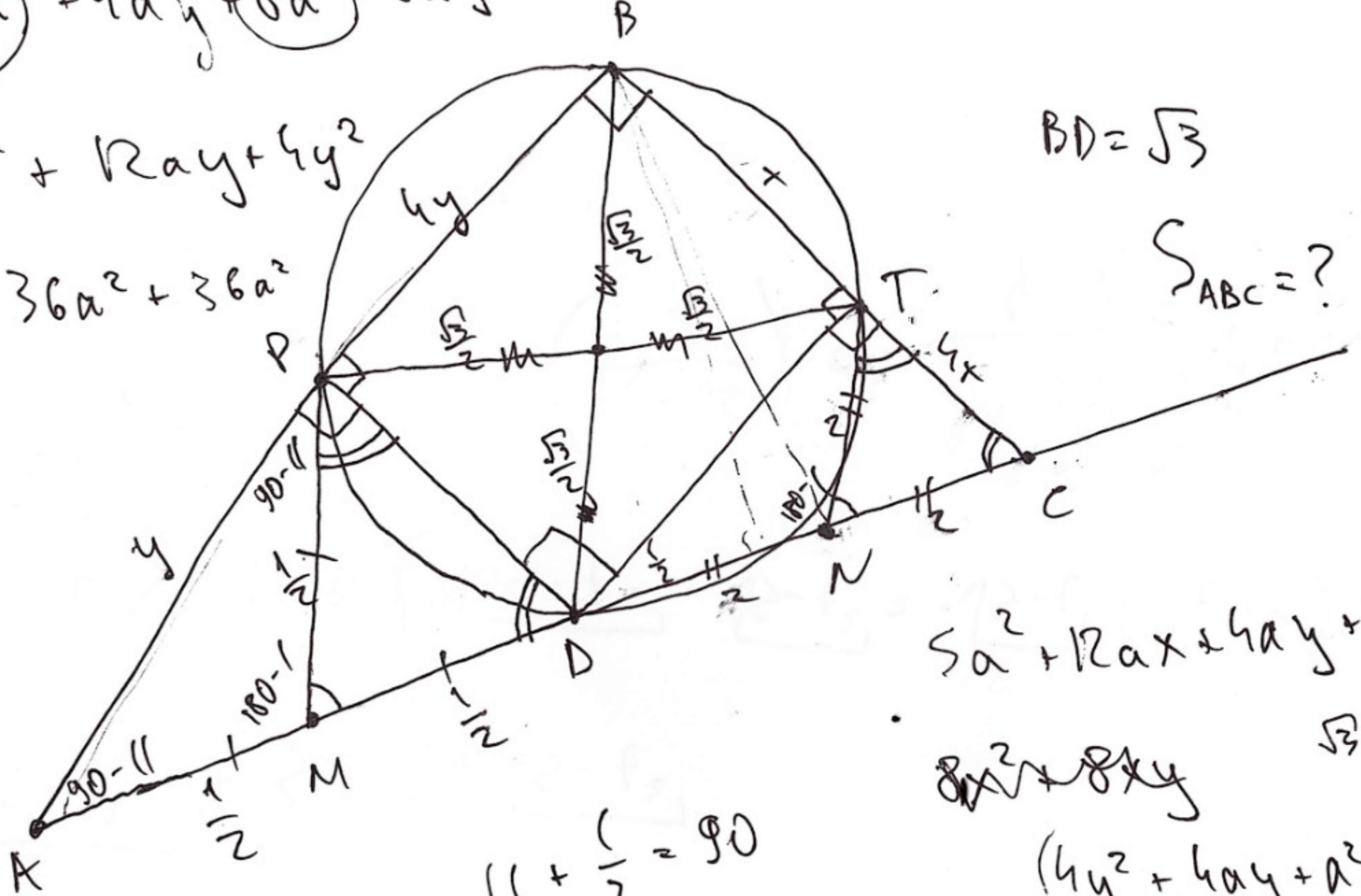
$16y^2 + x^2 = 3$

$25y^2 + 25x^2 = 25$

$x^2 + y^2 = 1$

$15y^2 + 1 = 3$

$15y^2$



$5a^2 + 12ax + 4ay + 8x^2 + 8xy + 4y^2 = 0$

$\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}. \quad 2.$

$\cancel{8x^2 + 8xy}$

$(4y^2 + 4ay + a^2) + 4x^2 +$

$(Aa + Bx)^2 + (Ca +$

$11 + \frac{1}{2} = 90$

$2 \cdot 11 + 1 = 180$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} + 3 = 2\sqrt{(x+2)(3-x)}$$

$-2 \quad 3$

$\sqrt{x+2} = t > 0 \Rightarrow t^2 - 2 = x \qquad 3 - t^2 + 2 = 3 - x$

$\sqrt{5-t^2} = \sqrt{3-x}$

$$t - \sqrt{5-t^2} + 3 = 2t\sqrt{5-t^2}$$

$\overset{3}{18}$ 4 72

$$t + 3 = 2t\sqrt{5-t^2} + \sqrt{5-t^2} = \sqrt{5-t^2}(2t+1)$$

$\underbrace{64+32}_{96} - \underbrace{72-28+4}_{100}$

$$\left(\frac{-2+\sqrt{6}}{2}\right)^2 = \frac{(\sqrt{6}-2)^2}{4} = \frac{6+4-4\sqrt{6}}{4} = \frac{10-4\sqrt{6}}{4} \cup 5$$

$10 - 4\sqrt{6} \not> 0$

$-10 \not> 4\sqrt{6}$

211007107 (U208273 M1276268)

$$-x^2 + x + 6 = 0$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{-2} = \frac{-1 \pm 5}{-2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} + 3 = 2\sqrt{(3-x)(x+2)}$$

$$a = \sqrt{x+2} \geq 0$$

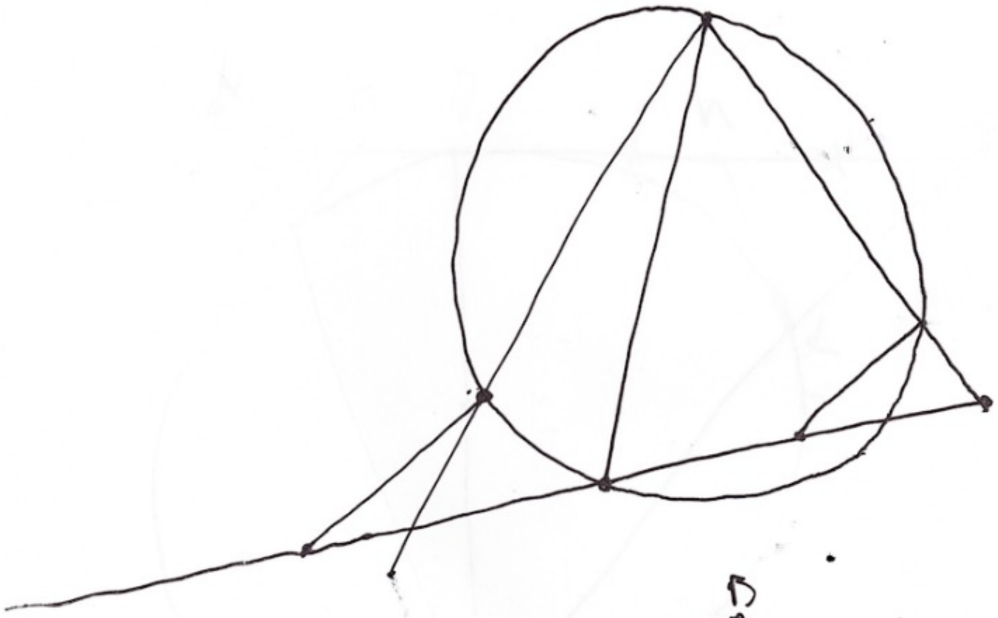
$$b = \sqrt{3-x} \geq 0$$

$$a - b + 3 = 2ab$$

$$a(2b-1) = 3 - b$$

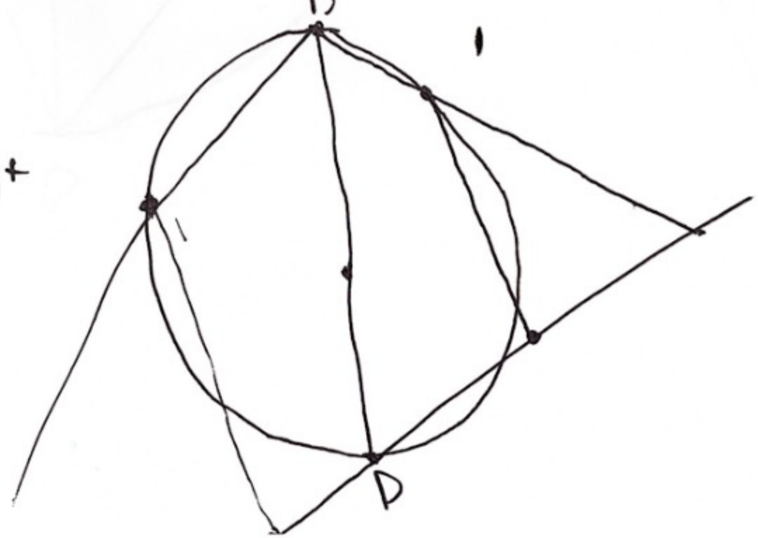
$$a = \frac{3-b}{2b-1}$$

$$\sqrt{x+2} = \frac{3-\sqrt{3-x}}{2\sqrt{3-x}-1}$$

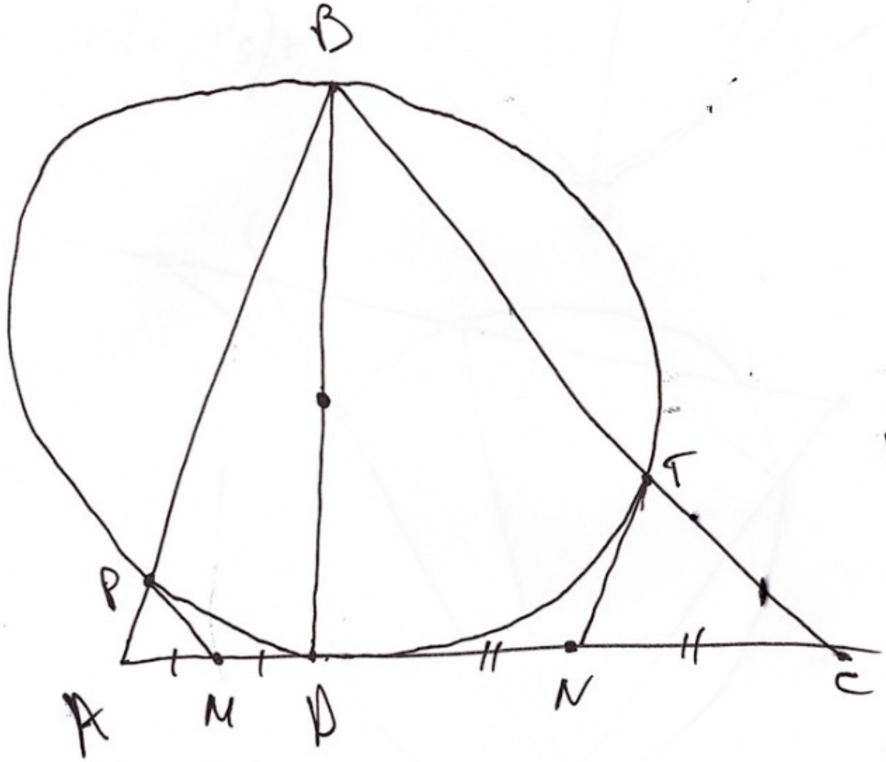


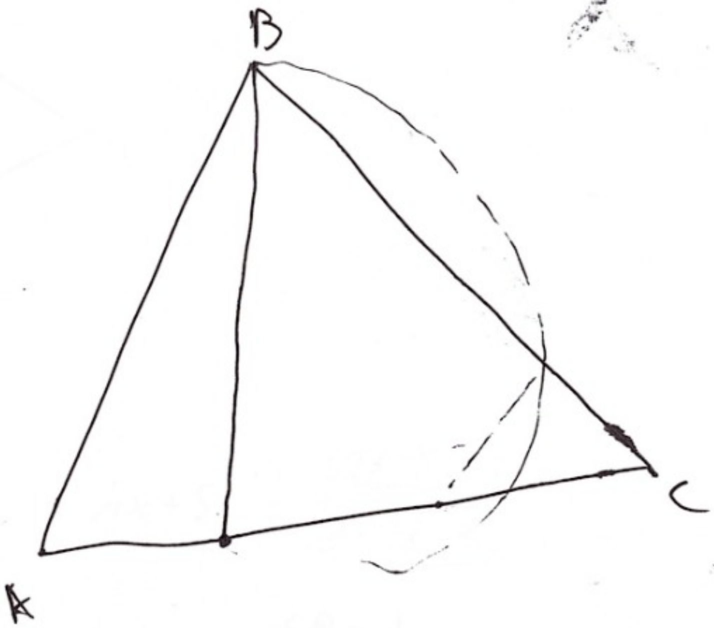
$$(4a^2 + 12ax + 9x^2) + (a^2 + 4ay + 4y^2) +$$

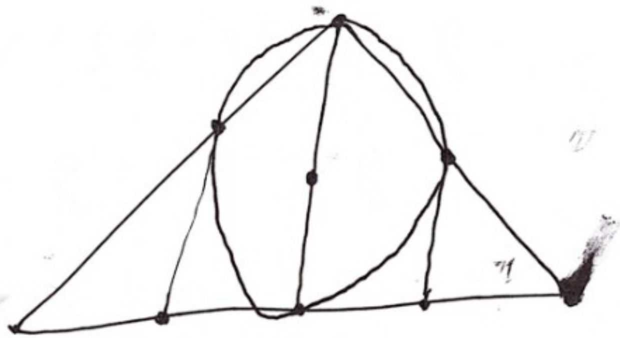
$$+ \quad 8xy$$



211007107 (U208273 M1276268)







211007107 (U208273 M1276268)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211007107**

ID профиля: **208273**

Вариант 11

Задача 4. Лист 1. Чистовик

$$\begin{cases} \frac{4}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 5 \\ x^4+y^4+3x^2y^2 = 20 \quad \left((x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = 20 \right) \end{cases}$$

$a = x^2y^2 \geq 0$

$в = x^2+y^2 > 0$

$$\begin{cases} 1) \ \frac{4}{в} + a = 5 \\ 2) \ в^2 + a = 20 \end{cases}$$

Из 2-го: $a = 20 - в^2$, подставим в 1):

$\frac{4}{в} + 20 - в^2 = 5 \quad | \cdot в \ (в \neq 0).$

$4 + 20в - в^3 = 5в$

$в^3 - 15в - 4 = 0$ (Заметим, что $в = 4$ - корень)

$$\begin{array}{r|l} в^3 - 15в - 4 & в-4 \\ \hline -(в^3 - 4в^2) & в^2+4в+1 \\ 4в^2 - 15в - 4 & \\ -(4в^2 - 16в) & \\ в - 4 & \\ -(в - 4) & \end{array}$$

211007107 (U208273 M1276269)

Задача 4 (Продолжение) Лист 2 Чистовик

$b^2 + 4b + 1 = 0$

$b = -2 \pm \sqrt{4-1} = -2 \pm \sqrt{3}$

Имеем: $b = \{-2-\sqrt{3}; -2+\sqrt{3}; 4\}$. Но $b > 0 \Rightarrow -2-\sqrt{3}$ точно не подходит. Сравним $-2+\sqrt{3}$ и 0

$\sqrt{3}$ и 2

3 и 4

$<$ (значит и $-2+\sqrt{3} < 0$ $\Rightarrow$ тоже не подходит).

$\Downarrow$

$b = 4.$

Но из 1) $\frac{4}{b} + a = 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 + a = 5 \Rightarrow a = 4.$ (≥ 0)

Имеем:

$$\begin{cases} x^2y^2 = 4 & 3) \\ x^2 + y^2 = 4 & 4) \end{cases}$$

(x=0 или y=0 не подходит, т.к. $0 \neq 4$). (Поэтому : y^2

Из 3): $x^2 = \frac{4}{y^2}$, подставим в 4): $\frac{4}{y^2} + y^2 = 4 \,|\cdot y^2 \neq 0$

$4 + y^4 = 4y^2 \Rightarrow y^4 - 4y^2 + 1 = 0 \Rightarrow y^2 = 2 \pm \sqrt{4-1} = 2 \pm \sqrt{3}$ ($2+\sqrt{3}$ видно >0, $2-\sqrt{3} > 0$, т.к. $2 > \sqrt{3}$, т.к. $4 > 3$)

$y^2 = 2 + \sqrt{3}$

$x^2 = \frac{4(2-\sqrt{3})}{2+\sqrt{3}} = \frac{8-4\sqrt{3}}{1} = 8 - 4\sqrt{3}$

$y^2 = 2 - \sqrt{3}$

$x^2 = \frac{4(2+\sqrt{3})}{2-\sqrt{3}} = \frac{8+4\sqrt{3}}{1} = 8 + 4\sqrt{3}$

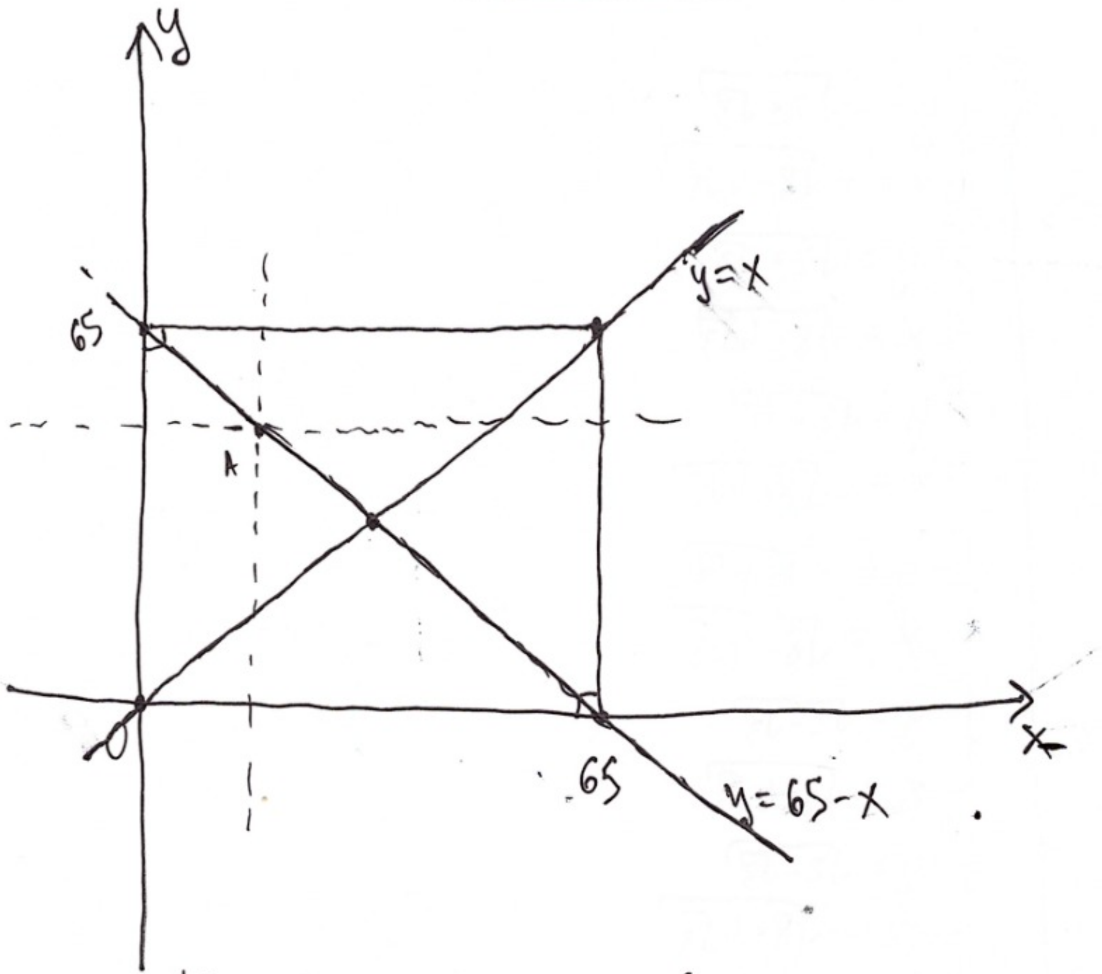
Задача 4 (Продолжение) Лист 3 Чистовик

Имеем:

$$\left[\begin{aligned}&\begin{cases} y^2 = 2+\sqrt{3} \\ x^2 = 8-4\sqrt{3} \end{cases} \\ &\begin{cases} y^2 = 2-\sqrt{3} \\ x^2 = 8+4\sqrt{3} \end{cases}\end{aligned}\right. \iff \left[\begin{aligned}&\begin{cases} y = -\sqrt{2+\sqrt{3}} \\ x = -\sqrt{8-4\sqrt{3}} \end{cases} \\ &\begin{cases} y = \sqrt{2+\sqrt{3}} \\ x = \sqrt{8-4\sqrt{3}} \end{cases} \\ &\begin{cases} y = \sqrt{2+\sqrt{3}} \\ x = -\sqrt{8-4\sqrt{3}} \end{cases} \\ &\begin{cases} y = -\sqrt{2+\sqrt{3}} \\ x = \sqrt{8-4\sqrt{3}} \end{cases} \\ &\begin{cases} y = \sqrt{2-\sqrt{3}} \\ x = \sqrt{8+4\sqrt{3}} \end{cases} \\ &\begin{cases} y = \sqrt{2-\sqrt{3}} \\ x = -\sqrt{8+4\sqrt{3}} \end{cases} \\ &\begin{cases} y = -\sqrt{2-\sqrt{3}} \\ x = \sqrt{8+4\sqrt{3}} \end{cases} \\ &\begin{cases} y = -\sqrt{2-\sqrt{3}} \\ x = -\sqrt{8+4\sqrt{3}} \end{cases}\end{aligned}\right.$$

Ответ: $(-\sqrt{8-4\sqrt{3}}; -\sqrt{2+\sqrt{3}})$, $(\sqrt{8-4\sqrt{3}}; \sqrt{2+\sqrt{3}})$, $(-\sqrt{8-4\sqrt{3}}; \sqrt{2+\sqrt{3}})$, $(\sqrt{8-4\sqrt{3}}; -\sqrt{2+\sqrt{3}})$, $(\sqrt{8+4\sqrt{3}}; \sqrt{2-\sqrt{3}})$, $(-\sqrt{8+4\sqrt{3}}; \sqrt{2-\sqrt{3}})$, $(\sqrt{8+4\sqrt{3}}; -\sqrt{2-\sqrt{3}})$, $(-\sqrt{8+4\sqrt{3}}; -\sqrt{2-\sqrt{3}})$.

Задача 5 Лист 4 Чистовик



Найдём кол-во узлов, лежащих на $y=x$ внутри квадрата: $0<x<65$, $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x$ может принимать $65-0-1=$ $=64$ значения, тогда y тоже >0 и <65 и $y \in \mathbb{N}$. Т.е. 64 узла.

Найдём кол-во узлов, лежащих на $y=65-x$ внутри квадрата: $0<x<65$, $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x$ может принимать $65-0-1=64$ значения, но тогда ~~0<65-x<65 ...~~
$0>-x>-65 \Rightarrow 65>65-x>0 \Rightarrow 65>y>0$ и $y \in \mathbb{N}$. Т.е. 64 узла.

Найдём точку пересечений $y=x$ и $y=65-x$ т.е. $x=65-x \Rightarrow$

Продолжение Задачи 5 Лист 5 Чистовик.

$\Rightarrow x = \frac{65}{2}$, т.е. это не узел сетки, значит всего 128 узлов лежащих на этих прямых.

Первый случай: только один узел лежит на одной из этих прямых, тогда, выбирая второй узел мы не можем выбрать 63 точки, лежащих на прямой, паралельной OX и проходящей через нашу точку, аналогично не можем взять 63 точки лежащих на вертикальной прямой. Заметим также, что всего ~~точек~~ узлов, удовлетворяющих $0<x<65$ и $0<y<65$, $x, y \in \mathbb{N}$. $64 \cdot 64$ (64 способа выбр. x и 64 способа выбр. y). Итого, выбирая второй узел у нас есть $64 \cdot 64 - 2 \cdot 63 - 1 - (128-3)$ (-1, это без первой точки, а $128-3$ - это точки, лежащие на $y=x$ и $y=65-x$ без первой точки и без двух точек, которые мы выкинули, когда рассматривали прямые, параллельные осям). Итого 128 способов выбрать первый узел и $64^2 - 2 \cdot 63 - 128 + 2$, т.е. $128 \cdot 3968$.

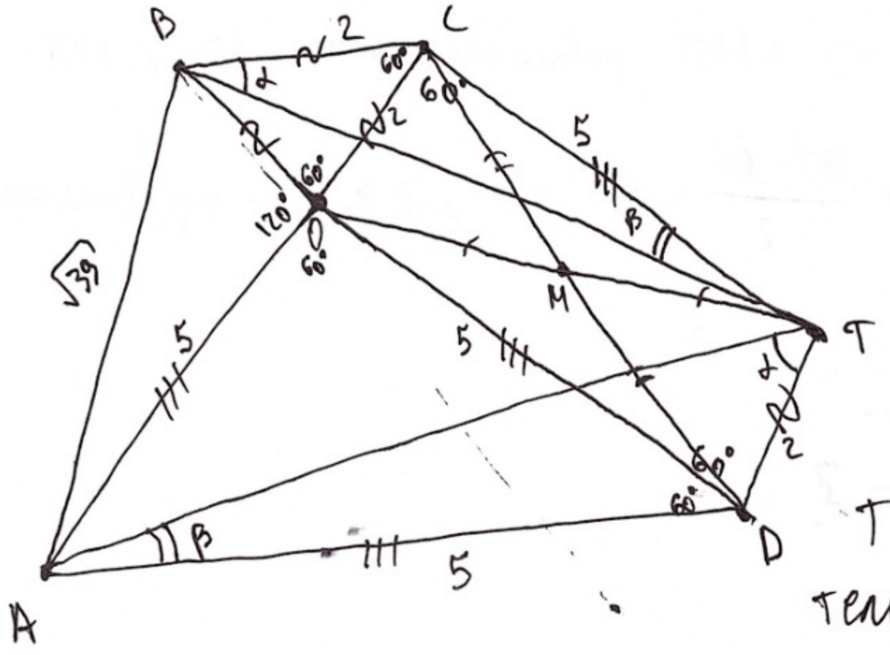
Если же обе точки лежат на ~~одной~~ $y=x$ и $y=65-x$, то 1-ую точку выбираем 128 способами, а 2-ую 125 способами (т.к. без 1-ой и без двух, которые лежат ещё на прямых параллельных осям координат). Но таким образом мы посчитали каждую пару два раза, поэтому всего способов $\frac{128 \cdot 125}{2} = 64 \cdot 125.$

Итого, всего способов $128 \cdot 3968 + 64 \cdot 125 =$

$= 64(2 \cdot 3968 + 125) = 64 \cdot 8061 = 515\,904.$

Ответ: 515 904.

Задача 6 Лист 7 Чистовик



Дано: ABCD - выпукл. четырёхугольник.

$AC \cap BD = O$;

$BO = OC = BC$;

$AO = OD = AD$;

$M \in DC$: $CM = MD$;

T симметрична O относительно M, т.е. $OM = MT$

Д-ть: $\triangle ABT$ - правильный.

Док-во: Э четырёхугольник OCTD: диагонали точкой пересечения делятся пополам => OCTD - параллелограмм => $OC = TD$ и $OD = CT$. $\angle AOB = 180° - \angle BOC = 120°$. $\angle COD = 180° - \angle BOC = 120°$. Но т.к. OCTD - параллелограмм то $\angle OCT + \angle COD = 180° \Rightarrow \angle OCT = 60°$. Также, т.к. OCTD - параллелограмм, то $\angle ODT + \angle COD = 180° \Rightarrow \angle ODT = 60°$. Э $\triangle ATD$ и $\triangle TBC$: по двум сторонам и углу между ними они равны ($BC = DT$; $AD = CT$; $\angle BCT = \angle ADT = 120°$) => $AT = BT$ и $\angle ATD = \angle TBC = \alpha$ и $\angle TAD = \angle BTC = \beta$. Заметим тогда, из

211007107 (U208273 M1276269)

$\triangle BCT$, что $\angle CBT + \angle BTC = 180° - \angle BCT = \alpha + \beta = 60°$.

Т.к. OCTD - параллелограмм, то $\angle COD = \angle CTD = 120°$.

Задача 6 Продолжение Лист 8 Чистовик.

$\angle BTA = \angle CTD - (\angle CTB + \angle DTA) = 120^\circ - (\alpha + \beta) = 60^\circ.$

Э $\triangle ABT$: $BT = AT \Rightarrow \triangle ABT$ равнобедренный $\Rightarrow \angle ABT =$

$= \angle BAT = \frac{180^\circ - \angle BTA}{2} = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABT$ – правильный ■

б) $BC = 2$, $AD = 5$.

Найти: $\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}} = ?$

Решение: Э $\triangle BCT$: $BT^2 = BC^2 + CT^2 - 2 \cdot BC \cdot CT \cdot \cos\angle BCT =$

$= 4 + 25 - 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \cos 120^\circ = 29 + 20 \cdot \cos 60^\circ = 29 + 10 = 39 \Rightarrow$

$\Rightarrow BT = \sqrt{39} = AT = AB$. $S_{\triangle ABT} = \frac{BT \cdot AT \cdot \sin\angle BTA}{2} = \frac{39 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} =$

$= \frac{39\sqrt{3}}{4}$. $S_{\triangle BOC} = \frac{BC \cdot CO \cdot \sin 60^\circ}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \sqrt{3}$.

$S_{\triangle AOD} = \frac{AO \cdot AD \cdot \sin 60^\circ}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{4}$. $S_{\triangle BOA} = S_{\triangle COD}$ (т.к. они равны) $=$

$= \frac{BO \cdot AO \cdot \sin\angle BOA}{2} = \frac{2 \cdot 5 \cdot \sin 120^\circ}{2} = 5 \cdot \sin 60^\circ = \frac{5\sqrt{3}}{2}$. $S_{ABCD} =$

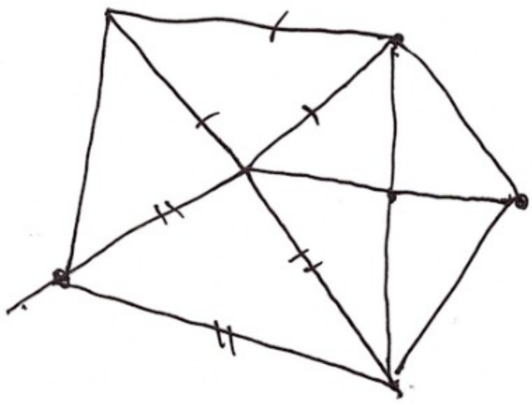
$= S_{\triangle BOC} + S_{\triangle AOD} + S_{\triangle BOA} + S_{\triangle COD} = \sqrt{3} + \frac{25\sqrt{3}}{4} + 5\sqrt{3} = 6\sqrt{3}^{\,4} + \frac{25\sqrt{3}}{4} =$

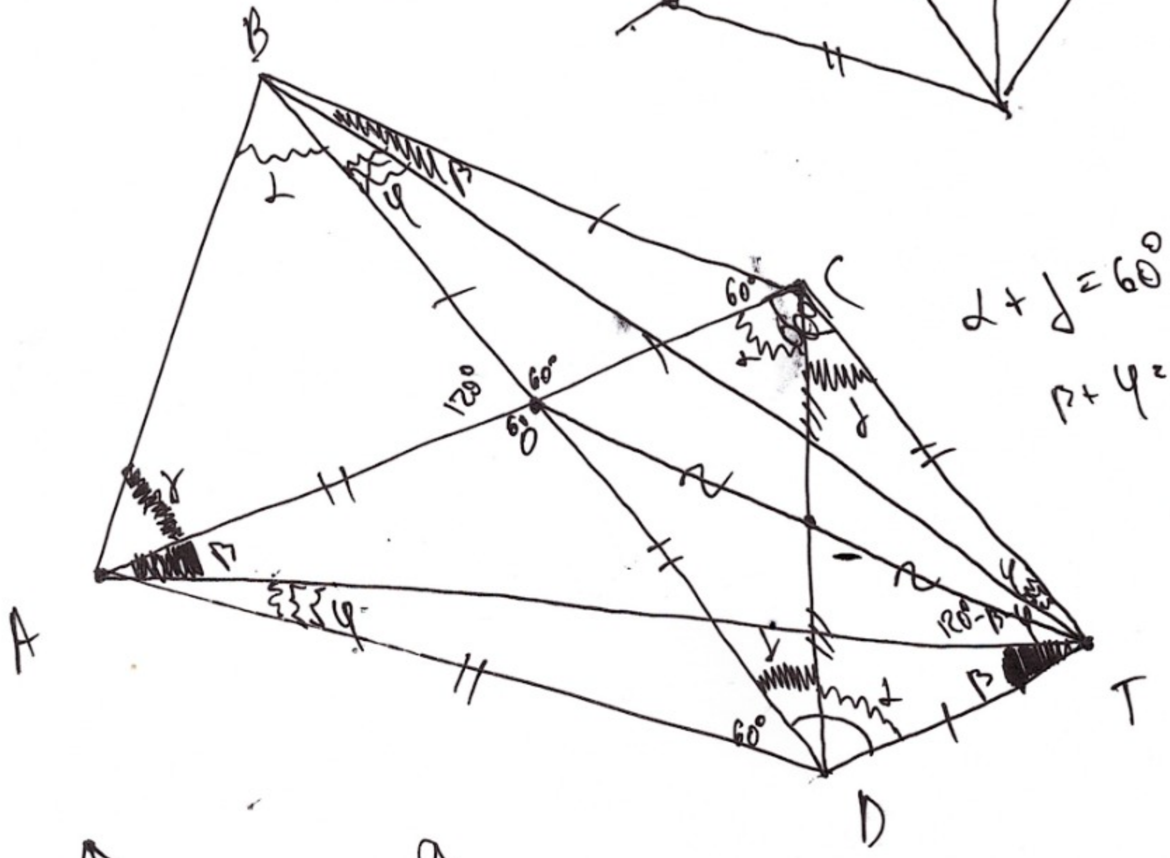
211007107 (U208273 M1276269)

$= \frac{49\sqrt{3}}{4}$. $\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{39\sqrt{3} \cdot \cancel{4}}{\cancel{4} \cdot 49\sqrt{3}} = \frac{39}{49}$.

$\boxed{\text{Ответ: } \frac{39}{49}}$

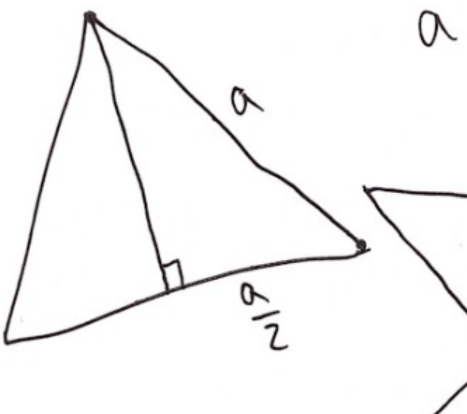
$$\begin{array}{r} 360 \\ -\;120 \\ \hline 240 \end{array}$$

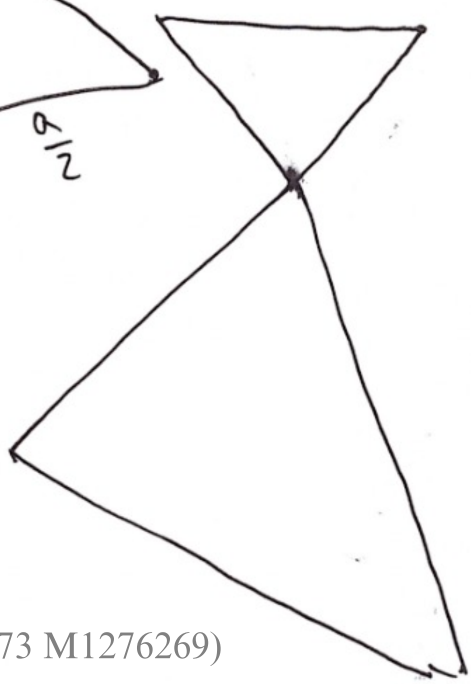


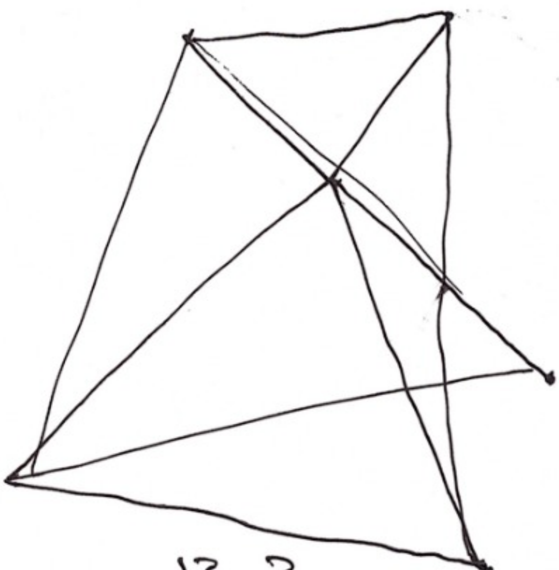


$\alpha + \gamma = 60^\circ$

$\beta + \varphi = 60^\circ$







$$\begin{array}{r} 13.3 \\ \hline 7.7 \end{array}$$

$$\begin{cases} \dfrac{4}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 5 \\ x^4 + y^4 + 3x^2y^2 = 20 \end{cases}$$

$x^2y^2 = a \geq 0$

$x^2 + y^2 = b > 0$

$$\begin{cases} \dfrac{4}{b} + a = 5 \\ b^2 + a = 20 \end{cases}$$

$a = 20 - b^2$

$\frac{4}{b} + 20 - b^2 = 5 \mid \cdot b$

$64-$

$4 + 20b - b^3 = 5b$

$-b^3 - 15b - 4 = \mid b - 4$

$b^3 - 4b^2$ $\quad$ $b^2 + 4b + 1$

$4b^2 - 15b - 4$

$4b^2 - 16b$

$b - 4$

$b = -2 \pm \sqrt{4-1} =$

$= -2 \pm \sqrt{3}$

$(\sqrt{3}-2)^2 + 4(\sqrt{3}-2) + 1$

$3 - \cancel{4\sqrt{3}} + 4 + \cancel{4\sqrt{3}} \cancel{-8} + \cancel{8}$

211007107 (U208273 M1276269)

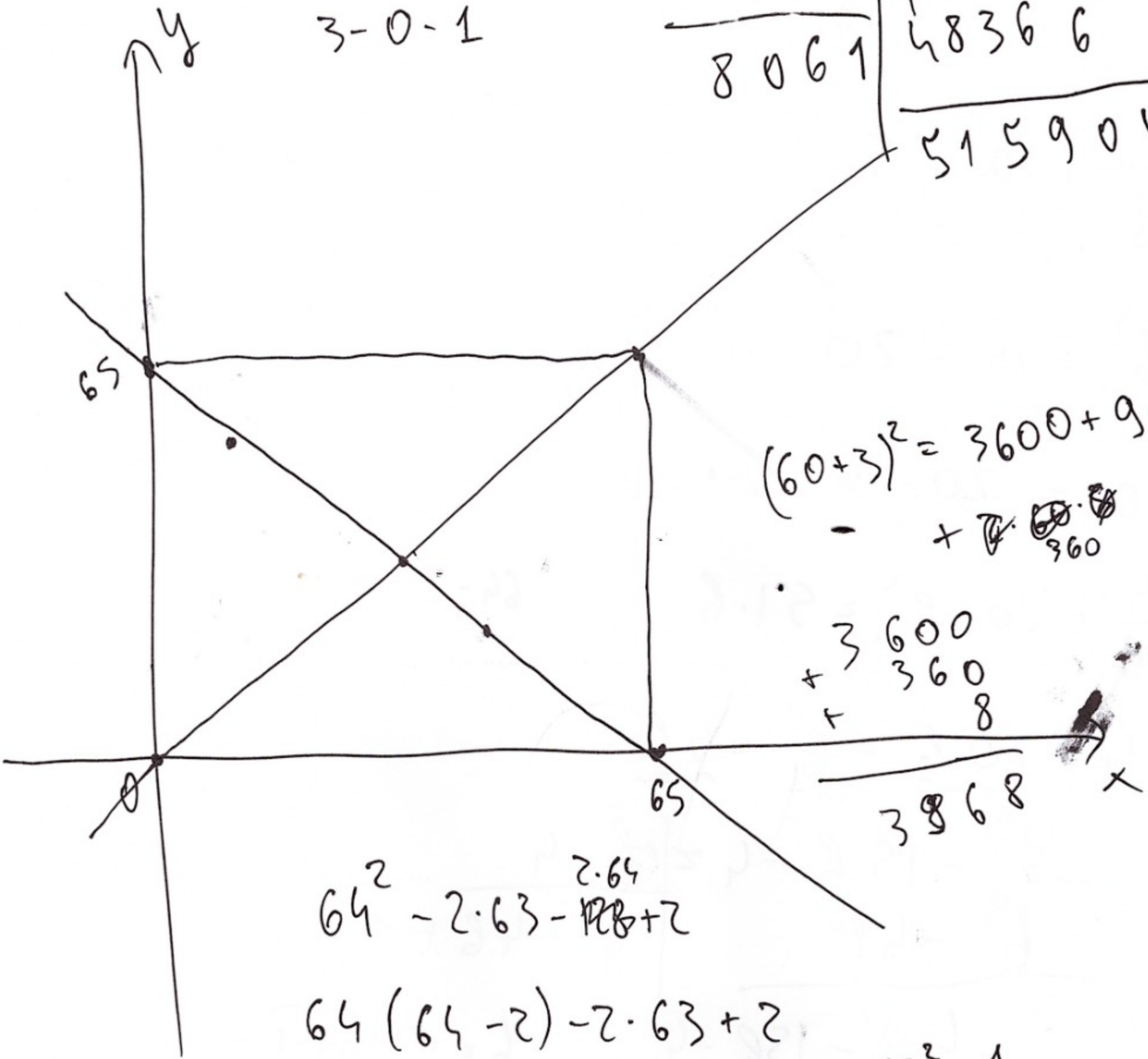
$0 < x < 3$

$1, 2$

$3 - 0 - 1$

$$\begin{array}{r} 3968 \\ +\ 3968 \\ \hline 7936 \\ +\ 125 \\ \hline 8061 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8061 \\ \times\ 64 \\ \hline 32244 \\ 48366 \\ \hline 515904 \end{array}$$



$(60+3)^2 = 3600 + 9 + \cancel{2 \cdot 60 \cdot 3}$ 360

$$\begin{array}{r} 3600 \\ +\ 360 \\ +\ 8 \\ \hline 3968 \end{array}$$

$64^2 - 2 \cdot 63 - \overset{2 \cdot 64}{\cancel{128}} + 2$

$64(64-2) - 2 \cdot 63 + 2$

$64 \cdot 62 - 2 \cdot 63 + 2$

$63^2 - 1$

$\cancel{61+1}$

$(63+1)(63-1) - 2 \cdot (63-1)$

$(63-1)(63-1)$